现代数学译丛

# 现代分析基础

第二卷

[法] J. 迪厄多内 著

科学出版社

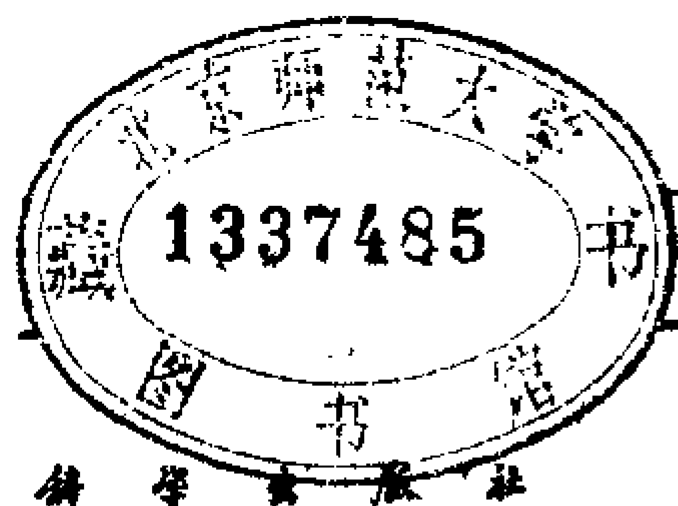
数学名著译丛

# 现代分析基础

## 第二卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

沈永欢 译




科学出版社

1986

## 内 容 简 介

本书为法国著名数学家 J. 迪厄多内关于现代分析的多卷集的第二卷，内容包括：拓扑补充知识和拓扑代数、积分、局部紧群上的积分、赋范代数与谱论。

本书从公理出发发展理论，论证严谨。书中附有大量问题，以便帮助读者加深理解。

本书译稿经南京大学苏维宜同志校订。

本书适于高等学校数学系高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读。

J. Dieudonné

Éléments d'analyse

2

Gauthier-Villars, 1974

数学名著译丛

现代分析基础

第二卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

沈永欢 译

责任编辑 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1986年3月第一次印刷 印张：16 1/4

印数：0001—4,800 字数：423,000

统一书号：13031·3082

本社书号：4421·13—1

定价：4.55 元

# 符　号　表

在下列符号中，第一个数字指该符号所在的章数，第二个数字指节数。

| 符号 | 说明 |
|---|---|
| Supp $(f)$ | 函数的支集：12.6 |
| $G^O$ | 群 $G$ 的反群：12.8 |
| $\varphi_A$ | 一个集的子集 $A$ 的特征函数：12.7 |
| $\sup\limits_{\alpha} f_\alpha$，$\inf\limits_{\alpha} f_\alpha$ | 实值函数族的上包络与下包络：12.7 |
| $\lim\limits_{n\to\infty}.\sup f_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}.\inf f_n$ | 实值函数序列的上极限与下极限：12.7 |
| $GL(E)$ | 拓扑向量空间 $E$ 的自同构群：12.8 |
| $A^{-1}$ | $x^{-1}(x\in A)$ 的集，其中 $A$ 是乘法群的子集：12.8 |
| $AB$ | $xy(x\in A, y\in B)$ 的集，其中 $A$ 与 $B$ 是乘法群的子集：12.8 |
| $\mathscr{N}(H)$，$\mathscr{Z}(H)$ | 群的子集 $H$ 的正规化子与中心化子：12.8 |
| $V^\infty$ | 一个群的子集 $V$ 的元的有限积 $x_1x_2\cdots x_n$（$n$ 为任意）所成的集：12.8 |
| $Z_p$ | $p$-adic 整数集：12.9，问题 4 |
| $T_p$ | $p$-adic 螺线：12.9，问题 5 |
| $G/H$，$H\backslash G$ | 群 $G$ 中由 $H$ 确定的左（右）陪集组成的齐性空间：12.10 和 11 |
| $G\cdot A$ | $A\subset E$ 的点对于 $G$ 在 $E$ 上的一个作用的轨道的并：12.10 |
| $E/G$ | 由 $G$ 确定的轨道所成的空间：12.10 |
| $\mathscr{C}_C(X)$ | $X$ 上的连续复值函数组成的空间：12.14 |

| | |
|---|---|
| $E/F$ | 赋范空间 $E$ 由它的向量子空间 $F$ 所作的商赋范空间：12.14 |
| $\langle x,x'\rangle,\langle x',x\rangle$　$x'(x)$, | 其中向量 $x\in E$,连续线性形式 $x'\in E'$（$E$ 的对偶空间）：12.15 |
| ${}^t u$ | 连续线性映射 $u$ 的转置：12.15 |
| $U(E)$ | Hilbert 空间 $E$ 上的酉群：12.15，问题 8 |
| $\mathscr{K}(X;K)$, $\mathscr{K}_{C}(X;K)$ | 其支集包含在紧集 $K\subset X$ 内的连续复值函数的空间：13.1 |
| $\mathscr{K}(X)$, $\mathscr{K}_{C}(X)$ | 在 $X$ 上连续且具有紧支集的复值函数的空间：13.1 |
| $\varepsilon_x$ | 点 $x$ 处的 Dirac 测度：13.1 |
| $g\cdot\mu$ | 关于 $\mu$ 以 $g$ 为密度的测度：13.1 与 13.13 |
| $\pi(\mu)$ | 测度 $\mu$ 在正常连续映射 $\pi$ 下的象：13.1 与 13.1，问题 8 |
| $\mu_U,\mu\mid U$ | 由测度 $\mu$ 在开集 $U$ 上诱导的测度（或 $\mu$ 在 $U$ 上的限制）：13.1 |
| $M_{C}(X),M(X)$ | $X$ 上的复测度空间：13.1 |
| $\langle f,\mu\rangle,\mu(f)$, $\int f d\mu$, $\int f(x)d\mu(x)$ | $f\in\mathscr{K}(X)$ 关于 $\mu$ 的积分：13.1 |
| $\mathscr{K}_{R}(X;K)$ | 其支集包含在紧集 $K\subset X$ 内的连续有限实值函数的空间：13.2 |
| $\mathscr{K}_{R}(X)$ | 在 $X$ 上连续且具有紧支集的有限实值函数的空间：13.2 |
| $\bar{\mu}$ | $\mu$ 的共轭测度：13.2 |
| $M_{R}(X)$ | $X$ 上的实测度空间：13.2 |
| $\mathscr{R}\mu,\mathscr{I}\mu$ | 复测度 $\mu$ 的实部与虚部：13.2 |
| $M_{+}(X)$ | $X$ 上的正测度集：13.3 |

| | |
|---|---|
| $f^+, f^-$ | 有限实值函数 $f$ 的正部与负部：13.3 |
| $\mu \leqslant \nu$ | 实测度之间的序关系：13.3 |
| $\lvert\mu\rvert$ | 复测度 $\mu$ 的绝对值：13.3 |
| $\mathscr{I}$，$\mathscr{I}(X)$ | 在 $X$ 上下半连续且以属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的某个函数为下界的函数组成的集：13.5 |
| $\mu^*(f)$，$\int^* f d\mu$，$\int^* f(x) d\mu(x)$ | $f$ 的上积分：13.5 |
| $\sum_n t_n$ | $\bar{R}$ 的非负元的序列 $(t_n)$ 的和：13.5 |
| $\mathscr{S}$，$\mathscr{S}(X)$ | 在 $X$ 上上半连续且以属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的某个函数为上界的函数组成的集：13.5 |
| $\mu_*(f)$，$\int_* f d\mu$，$\int_* f(x) d\mu(x)$ | $f$ 的下积分：13.5 |
| $\mu^*(A)$，$\mu_*(A)$ | $A \subset X$ 的外测度与内测度：13.5 |
| $\tilde{f}$ | $f$（关于 $\mu$）的等价类：13.6 |
| $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ | 等价类之间的序关系：13.6 |
| $\tilde{f} + \tilde{g}$，$\tilde{f}\tilde{g}$ | 等价类的和与积：13.6 |
| $\int f d\mu$，$\int f(x) d\mu(x)$，$\mu(f)$，$\langle f, \mu \rangle$ | $\mu$ 可积函数 $f$ 的积分：13.7 |
| $\mathscr{L}^1_R(X, \mu)$，$\mathscr{L}^1_R(\mu)$，$\mathscr{L}^1_R$ | $\mu$ 可积(有限)实值函数的空间：13.7 |
| $\mu(A)$ | $\mu$ 可积集 $A$ 的测度：13.7 |
| $\mu(\tilde{f})$ | 等价类 $\tilde{f}$ 的积分：13.7 |
| $\int_A f d\mu$，$\int_A f(x) d\mu(x)$ | $f$ 在 $A$ 上的积分：13.9 |
| $\int_A^* f d\mu$ | $f$ 在 $A$ 上的上积分：13.9 |

$\mu_Y$　$\mu$ 在闭子空间 $Y$ 上诱导的测度：13.9

$H(\alpha)$　有限划分 $\alpha$ 的熵：13.9，问题 27

$H(\alpha/\beta)$　有限划分 $\alpha$ 关于有限划分 $\beta$ 的熵：13.9，问题 27

$\bigvee_{j=1}^{n}\alpha_j, \alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_n$　有限划分的有限序列的上确界：13.9，问题 27

$h(u,\alpha)$　映射 $u$ 关于有限划分 $\alpha$ 的熵：13.9，问题 28

$h(u)$　映射 $u$ 的熵：13.9，问题 28

$\int \mathbf{f}d\mu, \int \mathbf{f}(x)d\mu(x)$　向量值函数 $\mathbf{f}$ 的积分：13.10

$\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(X,\mu), \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu), \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}$　$\mu$ 可积复值函数的空间：13.10

$N_1(f)$　$\int^* |f|d\mu$：13.11

$N_2(f)$　$\left(\int^* |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$：13.11

$\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(X,\mu), \mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(\mu), \mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}$　$\mu$ 平方可积（有限）实值函数的空间：13.11

$\mathscr{N}$　$\mu$ 可忽略函数的空间：13.11

$L^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$, $L^p_{\mathbf{R}}(\mu), L^p_{\mathbf{R}}$　$p$ 幂可积函数的类组成的空间：13.11 与 13.11，问题 12

$N_p(\tilde{f})$　关于类 $\tilde{f}$ 中任一函数 $f$ 的 $N_p(f)$：13.11

$\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu), \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\mu), \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$　平方 $\mu$ 可积复值函数的空间：13.11

$L^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$, $L^2_{\mathbf{C}}(\mu)$, $L^2_{\mathbf{C}}$　平方 $\mu$ 可积复值函数的类组成的空间：13.11

$M_\infty(f), m_\infty(f)$

$\underset{x\in X}{\text{ess.sup}}\, f(x)$, $\underset{x\in X}{\text{ess.inf}}\, f(x)$　$f$ 的依测度最大值与依测度最小值：13.12

$\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{R}}(X,\mu), \mathscr{L}^\infty_{\mathbf{R}}(\mu), \mathscr{L}^\infty_{\mathbf{R}}$　依测度有界 $\mu$ 可测有限实值函数的空间：13.12

$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(X,\mu),\mathscr{L}_{C}^{\infty}(\mu),\mathscr{L}_{C}^{\infty}$ 依测度有界 $\mu$ 可测复值函数的空间：13.12

$L_{R}^{\infty}(X,\mu),L_{R}^{\infty}(\mu),L_{R}^{\infty}$ 依测度有界 $\mu$ 可测有限实值函数的类组成的空间：13.12

$L_{C}^{\infty}(X,\mu),L_{C}^{\infty}(\mu),L_{C}^{\infty}$ 依测度有界 $\mu$ 可测复值函数的类组成的空间：13.12

$\mathscr{S}(X,\mu)$ $\mu$ 可测(有限)实值函数的空间：13.12，问题 2

$S(X,\mu)$ $\mu$ 可测(有限)实值函数的类组成的空间：13.2，问题 2

$\mathscr{L}_{\mathrm{loc},R}^{1}(X,\mu),\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$
$\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X),\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$ 局部 $\mu$ 可积有限实值函数的空间：13.13

$\mathscr{L}_{\mathrm{loc},C}^{1}(X,\mu)$ 局部 $\mu$ 可积复值函数的空间：13.13

$L_{\mathrm{loc},R}^{1}(X,\mu)$,
$L_{\mathrm{loc},C}^{1}(X,\mu)$ 局部 $\mu$ 可积有限实值(复值)函数的类组成的空间：13.13

$\int f d\lambda,\ \int f(x)d\lambda(x)$ $f$ 关于复测度 $\lambda$ 的积分：13.16

$\mathrm{Supp}(\mu)$ 测度 $\mu$ 的支集：13.19

$\|\mu\|$ 测度 $\mu$ 的范数：13.20

$M_{R}^{1}(X),M_{C}^{1}(X)$ 有界实(复)测度空间：13.20

$\mathscr{C}_{R}^{0}(X),\ \mathscr{C}_{C}^{0}(X)$ 在无穷远处趋于 0 的有限实值(复值)连续函数的空间：13.20

$\int d\mu(y)\int h(x,y)d\lambda(x)$,
$\iint h d\lambda d\mu$,
$\iint h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$ $h$ 关于乘积测度 $\lambda\otimes\mu$ 的积分：13.21

$\lambda\otimes\mu$ 乘积测度：13.21

| | |
|---|---|
| $\iint^* h d\lambda d\mu$, $\iint^* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$ | $h$ 关于乘积测度的上积分：13.21 |
| $\iint_* h d\lambda d\mu$, $\iint_* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$ | $h$ 关于乘积测度的下积分：13.21 |
| $f\otimes g$ | 函数 $(x,y)\to f(x)g(y)$： 13.21 |
| $\mu_1\otimes\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n$, $\bigotimes_{i=1}^{n}\mu_i$ | $n$ 个测度的乘积：13.21 |
| $\iint\cdots\int f d\mu_1\cdots d\mu_n$, $\iint\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)$ $d\mu_1(x_1)\cdots d\mu_n(x_n)$ | 关于 $n$ 个测度的乘积的积分：13.21 |
| $\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mu_n$ | 测度无穷序列的乘积：13.21，问题 9 |
| $\gamma(s)f,\delta(s)f$ | 函数的平移：14.1 |
| $\gamma(s)\mu,\delta(s)\mu$ | 测度的平移：14.1 |
| $\check{f},\check{\mu}$ | 函数 $f$ 或测度 $\mu$ 在对称 $s\to s^{-1}$ 下的变换：14.1 |
| $\boldsymbol{T}$ | 一维环面：14.2 |
| $\Delta_G(s),\Delta(s)$ | 群 $G$ 上的模函数：14.3 |
| $\mathrm{mod}_G(u)$, $\mathrm{mod}(u)$ | $G$ 的自同构 $u$ 的模：14.3 |
| $\boldsymbol{Q}_p$ | $p$-adic 数域：14.3，问题 6 |
| $f^\flat$ | $f$ 在一个纤维上的平均：14.4，问题 2 |
| $\mu_1*\mu_2*\cdots*\mu_n$ | $n$ 个测度的卷积：14.5 |
| $M_{\mathbf{C}}^c(X)$ | 具有紧支集的测度的空间：14.7 |
| $\mu^\natural$ | 测度 $\mu$ 的中心化：14.7，问题 6 |
| $\mu*f,\mu*^\beta f,f*\mu,f*^\beta\mu$ | 测度 $\mu$ 与函数 $f$ 的卷积：14.8 |
| $f*g,f*^\beta g$ | 两个函数的卷积：14.10 |
| $\mathrm{Sp}_A(x),\mathrm{Sp}(x)$ | 代数 $A$ 的元 $x$ 的谱：15.2 |

$\rho(x)$ — $x$ 的谱半径：15.2

$\boldsymbol{X}(A)$ — 代数 $A$ 的谱：15.3

$\mathscr{G}$ — Гельфанд 变换：15.3

$\mathscr{H}^p(\mu), \mathscr{H}^\infty(\mu)$,
$H^p(\mu), H^\infty(\mu)$ — Hardy 空间：15.3，问题 15

$x^*$ — 对合代数的元 $x$ 的伴随元：15.4

$\|u\|_2$ — Hilbert-Schmidt 范数：15.4

$\mathscr{L}_2(E)$ — Hilbert-Schmidt 算子代数：15.4

$\check{\mu}$ — $M^1_C(G)$ 中的对合：15.4

$p(x), p_A(x)$ — $(\rho(x^*x))^{1/2}$：15.4，问题 18

$U_0(x), U_A(x)$ — 完备 Hilbert 代数的正则表示：15.8

$\boldsymbol{H}(A)$ — Hermite 特征标空间：15.9

$M_\mu(u)$ — 乘以 $u$ 的类的乘法：15.10

$H \geqslant 0$ — 对一切 $x$ 有 $(H \cdot x|x) \geqslant 0$：15.11

$f(N)$ — 正规算子的函数：15.11

$\mathscr{U}_C(K)$ — 在 $K$ 上普遍可测且有界的复值函数的空间：15.10

$H^{1/2}$ — 正 Hermite 算子 $H$ 的平方根：15.11

$\operatorname{abs}(T)$ — 算子 $T$ 的绝对值：15.11，问题 6

$\operatorname{Tr}(T)$ — 核子算子 $T$ 的迹：15.11，问题 7

$\|T\|_1$ — 核子范数：15.11，问题 7

$\mathscr{L}_1(E)$ — 核子算子空间：15.11，问题 7

$\operatorname{Spa}(T)$ — 算子 $T$ 的逼近点谱：15.11，问题 9

$\operatorname{dom}(T)$ — 无界算子 $T$ 的定义域：15.12

$T^*$ — 定义域为稠密的无界算子 T 的伴随算子：15.12

$\operatorname{Sp}(T)$ — 无界算子 $T$ 的谱：15.12

$f(N)$ — 无界正规算子的函数：15.12

# 目　　录

# 第十二章 关于拓扑的补充与拓扑代数

正如本书序言中所说，我们力求把本章叙述的关于拓扑的补充内容限制在读者所需的最小范围之内。我们并不打算在一般拓扑的精致部分(滤系、一致结构、各种分离公理)上耽搁，而是尽快地进入可一致化空间的范畴，因为以后各章用到的将只是这种空间. 通常只是把这种空间看作便于处理的“环绕空间”，然而按照本书的意图，我们尤其对可分与可度量化的子空间感到兴趣. 为此在本章引入了可度量化与可分性的许多判断准则 (12.3.6, 12.4.6, 12.4.7, 12.5.8, 12.9.1, 12.10.10, 12.11.3, 12.14.6.2, 12.15.7, 12.15.9, 12.15.10). 这些准则,连同 Baire 定理及其推论 (12.16), 是本章中仅有的其证明并不那么直接的结果. 本章的其余内容，一部分是阐明第一卷中没有出现的纯拓扑技巧(单位分解 (12.6)、半连续函数 (12.7)); 另一部分，占本章篇幅一半以上 ((12.8) 到 (12.16) 各节), 用于阐明拓扑代数的基本概念(拓扑群、带算子空间、拓扑向量空间). 所有这些概念,在以后各章中都常用到.

## 1. 拓扑空间

如果由集 $E$ 的子集组成的一个集 (即 $\mathfrak{P}(E)$ 的一个子集) $\mathfrak{O}$ 满足下面两个条件,则称 $\mathfrak{O}$ 为 $E$ 上的一个**拓扑**:

$(O_{\text{I}})$ 属于 $\mathfrak{O}$ 的集的任意族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的并仍属于 $\mathfrak{O}$.

$(O_{\text{II}})$ 集 $E$ 属于 $\mathfrak{O}$, 并且属于 $\mathfrak{O}$ 的任意两个集的交仍属于 $\mathfrak{O}$.

赋予一个拓扑 $\mathfrak{O}$ 的集 $E$, 称为**拓扑空间**; $E$ 的属于 $\mathfrak{O}$ 的子集称为拓扑空间 $E$ 的**开集**. 在 $(O_{\text{I}})$ 中令 $L=\varnothing$, 则得 $E$ 的空集 $\varnothing$ 总是开集; 且由 $(O_{\text{II}})$ 得知, $E$ 自身也是开集.

**(12.1.1) 例.** 度量空间 $E$ 的开集所成的集 $\mathfrak{D}$ 满足 $(O_{I})$ 与 $(O_{II})$ (3.5.2 与 3.5.3)；$\mathfrak{D}$ 称为度量空间 $E$ 的拓扑（或称该拓扑由 $E$ 上给定的**距离所确定**)；两个拓扑等价的距离 (3.12) 定义同样的拓扑. 如果某个拓扑空间的拓扑可由一个距离来定义，就把这个拓扑空间称为**可度量化的**(此时也把这个拓扑称为**可度量化的**).

在任意的集 $E$ 上，集 $\mathfrak{D}=\{\varnothing, E\}$ 是一个拓扑（称它为**平庸拓扑**)；如果 $E$ 至少含有两个元，则 $E$ 上的平庸拓扑就不是可度量化的，因为否则就会存在含有其中一个元而不含有另一个元的开球，然而由于 $E$ 是唯一的非空开集，所以这是不可能的.

在含有两个元的集 $E=\{a, b\}$ 上，$\mathfrak{D}=\{\varnothing, \{a\}, E\}$ 是一个不可度量化的拓扑.

设在同一集 $E$ 上给出两个拓扑 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, 若 $\mathfrak{D}_1\subset\mathfrak{D}_2$, 则称 $\mathfrak{D}_2$ **精于** $\mathfrak{D}_1$ (或 $\mathfrak{D}_1$ **粗于** $\mathfrak{D}_2$)；若两个拓扑中有一个精于另一个，则称它们为**可比的.** 平庸拓扑粗于所有其他拓扑；**离散拓扑**(即由距离 (3.2.5) 所定义的拓扑，对于它有 $\mathfrak{D}=\mathfrak{P}(E)$) 精于所有其他拓扑. $E$ 上的两个拓扑不一定可比. 例如，设 $E=\{a, b\}$ 是具有两个元的集，并考虑 $E$ 上的两个拓扑 $\mathfrak{D}_1=\{\varnothing, \{a\}, E\}$ 与 $\mathfrak{D}_2=\{\varnothing, \{b\}, E\}$.

## 2. 拓 扑 概 念

我们已经注意到 (3.12)，对于度量空间，**闭集**、集的**触点**、集的**内点**、集的**边界点**、点(或集)的**邻域**、关于另一个集为**稠密**的集、**连续函数**、**同胚**等等概念，都是只从度量空间内开集的概念出发来定义的，因而可以把它们逐字逐句地照搬到任意拓扑空间上来.

此外，对于度量空间证明的有关这些概念的性质，其中在其陈述中不出现距离的那些命题（参阅 (3.5) 到 (3.12))，对拓扑空间仍然成立（因而我们将把这些命题推广到一般拓扑空间的情形)，但有下面几个例外:

1° 性质 (3.8.11) 与 (3.8.12) 对任意拓扑空间不再成立，这

可由赋予拓扑 $\mathfrak{O}=\{\varnothing,\{a\},E\}$ 的空间 $E=\{a,b\}$ 看出．（在这两个性质的证明中，距离起了根本的作用，但在它们的陈述中，距离并没有出现．）

2° 我们可以象 (3.9) 中那样定义拓扑空间 $E$ 的开集的**基**(也称为 $E$ 的**拓扑基**)的概念；准则 (3.9.3) 在一般情形下仍然成立．另一方面，如 (3.9.4) 那样，我们看到，如果关于拓扑空间 $E$ 的拓扑存在一可数基，则在 $E$ 内存在一处处稠密的至多可数的集；但对任意拓扑空间，这个命题的逆不再成立 (12.4 节，问题 6)．

根据定义，拓扑空间 $E$ 的拓扑基 $\mathfrak{B}$ 具有下述性质：

属于 $\mathfrak{B}$ 的两个集的交是属于 $\mathfrak{B}$ 的一些集的并．

反之，设 $\mathfrak{B}$ 是由任意集 $E$ 的子集组成的一个集，它满足上述性质且有 $E\in\mathfrak{B}$，则属于 $\mathfrak{B}$ 的集的(任意)并所成的集 $\mathfrak{O}$ 是一个拓扑，而且 $\mathfrak{B}$ 是该拓扑的基，因为显见 $\mathfrak{O}$ 满足 $(O_{\rm I})$ 与 $(O_{\rm II})$．

设 $E$ 是拓扑空间，$F$ 是 $E$ 的任一子集，则当 $U$ 取遍 $E$ 的开子集所成的集时，交 $U\cap F$ 所成的集满足公理 $(O_{\rm I})$ 与 $(O_{\rm II})$，因而它是 $F$ 上的一个拓扑，称为由 $E$ 上拓扑所**诱导的拓扑**；赋予这个拓扑的集 $F$，称为 $E$ 的**子空间**．在这样的定义下，除了 (3.10.9) 以外，(3.10) 中的所有性质对任意拓扑空间依然成立；而 (3.10.9) 必须陈述为：若 $E$ 的拓扑具有可数基，则它在 $E$ 的任一子集上的诱导拓扑同样具有可数基．

我们也已注意到，度量空间为紧或局部紧的性质只依赖于它的拓扑而不依赖于定义该拓扑的距离；因而我们可毫不含糊地谈论**紧可度量化空间**或**局部紧可度量化空间**．

我们还注意到，(3.19) 中关于**连通性**的所有定义与结果对任意拓扑空间都适用．

**(12.2.1)** 设 $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ 是集 $E$ 上的两个拓扑，则下列性质是等价的：

a) $\mathfrak{O}_2$ 精于 $\mathfrak{O}_1$；

b) 如果以 $E_i$ 表示在 $E$ 上赋予拓扑 $\mathfrak{O}_i(i=1,2)$ 所得到的拓扑空间，则 $E_2$ 到 $E_1$ 上的恒等映射连续；

c) 对每个点 $x\in E$，$x$ 关于 $\mathfrak{O}_1$ 的每个邻域都是 $x$ 关于 $\mathfrak{O}_2$ 的

邻域.

事实上，由连续性准则（3.11.4,b)）可得到 a) 与 b) 的等价性，而由连续函数的定义可得到 b) 与 c) 的等价性.

**(12.2.2)** **附注.** 设 $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间 $E$ 的一个开覆盖（3.16），则为使集 $G\subset E$ 在 $E$ 内是开的，必须且只须每个集 $G\cap U_\alpha$ 在子空间 $U_\alpha$ 内是开的；这可由公理 $(O_\text{I})$ 与 $(O_\text{II})$ 以及关系

$$G=\bigcup_{\alpha\in I}(G\cap U_\alpha)$$

立即得到. 通过取余集就可以推出：为使集 $F\subset E$ 在 $E$ 内是闭的，必须且只须每个集 $F\cap U_\alpha$ 在子空间 $U_\alpha$ 内是闭的.

**(12.2.3)** 设 $L$ 是拓扑空间 $E$ 的一个子集，则下列性质是等价的：

a) 对每个 $x\in L$，存在 $x$ 在 $E$ 内的邻域 $V$，使得 $L\cap V$ 在 $V$ 内是闭的.

b) $L$ 是子空间 $\bar{L}$ 的开子集，这里 $\bar{L}$ 是 $L$ 在 $E$ 内的闭包.

c) $L$ 是 $E$ 的某个开子集与某个闭子集的交.

显然 b) 蕴涵 c)，因为由 b)，$L$ 是 $\bar{L}$ 与 $E$ 的某个开子集的交. 显然由 c) 可推出 a). 最后，我们证明 a) 蕴涵 b)：对每个 $x\in L$，因为 $V\cap L$ 在 $V$ 内是闭的，所以 $V\cap L=V\cap\bar{L}$；这表明在子空间 $\bar{L}$ 内，$x$ 是 $L$ 的内点，从而 $L$ 在 $\bar{L}$ 内是开的.

当 $L$ 满足 (12.2.3) 中的等价条件时，就把它称为 $E$ 的**局部闭子集**.

**(12.2.4)** 定义拓扑空间的一种常用方法是"**粘合**"拓扑空间族 $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$，使得在这样得到的拓扑空间 $E$ 内，这些 $E_\lambda$ 等同于 $E$ 的开集；由于这些开集中每两个可能有非空交，所以这样的等同就要求对一切二元组 $(\lambda,\mu)$，都给出 $E_\lambda$ 的某个开子集到 $E_\mu$ 的某个开子集上的同胚.

明确地说，假定对每个二元组 $(\lambda,\mu)\in L\times L$ 给定了：1° $E_\lambda$ 的一个开子集 $A_{\lambda\mu}$；2° 一个同胚 $h_{\mu\lambda}: A_{\lambda\mu}\to A_{\mu\lambda}$，满足下列条件：

I) $A_{\lambda\lambda}=E_\lambda$，且 $h_{\lambda\lambda}$ 是恒等映射 $1_{E_\lambda}$；

II) 对于由属于 $L$ 的指标组成的每个三元组 $(\lambda,\mu,\nu)$ 与每个 $x\in A_{\lambda\mu}\cap A_{\lambda\nu}$，有 $h_{\mu\lambda}(x)\in A_{\mu\nu}$，且

**(12.2.4.1)** $$h_{\nu\lambda}(x)=h_{\nu\mu}(h_{\mu\lambda}(x))$$

**(粘合条件)**.

设 $F$ 是 $E_\lambda(\lambda\in L)$ 的和集，因而 $E_\lambda$ 是 $F$ 的两两互不相交的子集 (1.8). 在 $F$ 上考虑关系

$R(x,y)$："存在 $\lambda$, $\mu$, 使得 $x\in A_{\lambda\mu}$, $y\in A_{\mu\lambda}$, 并且有 $y=h_{\mu\lambda}(x)$"；

这是一个等价关系. 事实上，根据条件 I)，它是自反的；它是对称的，因为在 II) 中令 $\nu=\lambda$ 且由 I) 即见 $h_{\mu\lambda}$ 与 $h_{\lambda\mu}$ 是互逆的；最后，它是传递的，因为若

$$x\in A_{\lambda\mu},\ y=h_{\mu\lambda}(x)\in A_{\mu\lambda}\cap A_{\mu\nu}\ \text{且}\ z=h_{\nu\mu}(y),$$

则也会有 $x=h_{\lambda\mu}(y)$，因而由 II)，$x\in A_{\lambda\mu}\cap A_{\lambda\nu}$，所以由(12.2.4.1)得到 $z=h_{\nu\lambda}(x)$. 我们还注意到，由于 I)，$E_\lambda$ 与 $R$ 的等价类的交至多由一个点组成. 设 $E=F/R$ 是 $R$ 的等价类的集，

$$\pi: F\to F/R=E$$

是典则映射，则每个限制 $\pi_\lambda=\pi|E_\lambda$: $E_\lambda\to E$ 是单射. 此外，$\pi_\lambda(E_\lambda)(\lambda\in L)$形成 $E$ 的一个覆盖.

现在考虑 $E$ 的具有下述性质的子集 $X$ 所成的集 $\mathfrak{O}$：对每个 $\lambda\in L$, $\pi_\lambda^{-1}(X\cap\pi_\lambda(E_\lambda))$ 在 $E_\lambda$ 内是开的. 显然 $\mathfrak{O}$ 满足公理 $(O_I)$ 与 $(O_{II})$，因而是 $E$ 上的一个拓扑. 我们来证明，对每个 $\lambda\in L$, $\pi_\lambda(E_\lambda)$ 在 $E$ 内关于这个拓扑是开的，且 $\pi_\lambda$ 是 $E_\lambda$ 到 $E$ 的子空间 $\pi_\lambda(E_\lambda)$ 上的同胚. 考虑到 $\pi_\lambda$ 是 $E_\lambda$ 到 $\pi_\lambda(E_\lambda)$ 上的双射以及 $\mathfrak{O}$ 的定义，则归结为证明，对 $E_\lambda$ 的子集 $X_\lambda$，下面两个性质是等价的:

a) $X_\lambda$ 在拓扑空间 $E_\lambda$ 内是开的；

b) 对每个 $\mu\in L$, $\pi_\mu^{-1}(\pi_\lambda(X_\lambda)\cap\pi_\mu(E_\mu))$ 在 $E_\mu$ 内是开的.

取 $\mu=\lambda$，即见 b) 蕴涵 a). 反之，若 a) 成立，则按定义有 $\pi_\mu^{-1}(\pi_\lambda(E_\lambda)\cap\pi_\mu(E_\mu))=A_{\mu\lambda}$, 所以条件 b) 表明对每个 $\mu\in L$, $h_{\mu\lambda}(X_\lambda\cap A_{\lambda\mu})$ 在 $E_\mu$ 内是开的；可是 $X_\lambda\cap A_{\lambda\mu}$ 在 $A_{\lambda\mu}$ 内是开的，因而所需结论可由 $h_{\mu\lambda}$ 是 $A_{\lambda\mu}$ 到 $E_\mu$ 的一个开子集上的同胚得到.

这样定义的拓扑空间 $E$ 称为**由 $E_\lambda$ 沿 $A_{\lambda\mu}$ 用 $h_{\mu\lambda}$ 粘合**所得到的拓扑空间.

## 3. 分 离 空 间

对于任意的拓扑空间，可以如 (3.13) 中那样定义**极限**的**概念**，而准则 (3.13.1) 不过是这个定义的另一种表达方式，但 (3.13.3) 的结论不一定正确：例如，设 $E$ 是赋予平庸拓扑 (12.1.1) 的集，则 $E$ 中的每个点列以 $E$ 的所有点为其极限.

若拓扑空间 $E$ 满足下述条件 ("Hausdorff 公理")，则称 $E$ 为**分离空间**(或 **Hausdorff 空间**)，而称它的拓扑为**分离拓扑**:

对 $E$ 的任何两个不同的点 $a$，$b$，存在 $a$ 的邻域 $U$ 与 $b$ 的邻域 $V$，使得 $U$ 与 $V$ 没有公共点.

任何可度量化空间都是分离的.

**(12.3.1)** 设 $E$ 是拓扑空间，$A$ 是 $E$ 的子集，$a$ 是 $A$ 的触点，则 $A$ 到分离空间 $E'$ 的映射 $f$ 在点 $a$ 处关于 $A$ 至多只能有一个极限.

事实上，如果 $a'$ 与 $b'$ 是 $f$ 在点 $a$ 处的两个不同的极限，则分别存在 $a'$, $b'$ 的邻域 $U'$, $V'$，它们没有公共点；但由假设，在 $E$ 中存在点 $a$ 的邻域 $W$，使得 $f(W\cap A)\subset U'$, $f(W\cap A)\subset V'$，而由于 $W\cap A\neq\varnothing$，这是不可能的.

这样，我们仍然可以用记号 $\lim\limits_{x\in A, x\to a} f(x)$ 来表示 $f$ 在点 $a$ 处的唯一极限：在 (3.13) 中，除了 (3.13.13) 与 (3.13.14) 以外，在其陈述中不出现距离的命题，对定义于任意的拓扑空间上而在某个分离空间中取值的映射(特别是序列)依然成立.

**(12.3.2)** 分离空间的子空间是分离的.

**(12.3.3)** 精于分离拓扑的拓扑是分离的.

这两个命题都可由定义直接推出.

**(12.3.4)** 分离空间 $E$ 内的有限子集是闭的.

事实上，设 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $E$ 的点的有限序列，则异于这些 $a_i$ 的点 $b$ 不可能是这些 $a_i$ 所成的集的触点，因为对每个 $i$，存在 $b$ 的

邻域 $V_i$，它不含有 $a_i$，故 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ 是 $b$ 的不含有任何 $a_i$ 的邻域.

**(12.3.5)** 设 $f, g$ 是拓扑空间 $E$ 到分离空间 $E'$ 的两个连续映射，则使得 $f(x) = g(x)$ 的点 $x \in E$ 所成的集 $A$ 在 $E$ 内是闭的.

本命题的推理类似于 (3.15.1)（它是 (12.3.5) 的特殊情形）：如果 $a \in A$，则 $f(a) \neq g(a)$，因而存在 $f(a)$ 的邻域 $U'$ 与 $g(a)$ 的邻域 $V'$，使得 $U'$ 与 $V'$ 没有公共点. 由于 $f^{-1}(U')$ 与 $g^{-1}(V')$ 是 $a$ 在 $E$ 内的邻域，所以它们的交 $W$ 也是 $a$ 在 $E$ 内的邻域. 显然，对一切 $x \in W$，有 $f(x) \neq g(x)$，所以 $E - A$ 是开的.

这样，恒等式延拓原理 (3.15.2) 对拓扑空间到分离空间的连续映射仍然有效. 命题 (3.15.3) 及其推论 (3.15.4)（"不等式延拓原理"），连同它们的证明，都可推广到任意的拓扑空间.

**(12.3.6)** 设 $E$ 是紧可度量化空间，$F$ 是分离空间，$f$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射，则 $f(E)$ 在 $F$ 内是闭的. 如果 $f$ 是单射，则 $f$ 是 $E$ 到 $F$ 的子空间 $f(E)$ 上的一个同胚.

设 $y$ 是 $f(E)$ 的一个点；对每个 $z \in f(E)$，存在 $z$ 的开邻域 $V(z)$ 与 $y$ 的开邻域 $W(z)$，使得两者没有公共点. 当 $z$ 取遍 $f(E)$ 时，所有逆象 $f^{-1}(V(z))$ 形成 $E$ 的一个开覆盖 (3.11.4)，因而存在有限个点 $z_i \in f(E)$，使得相应这些点的 $V(z_i)$ 在 $F$ 内形成 $f(E)$ 的一个开覆盖，而此时 $U = \bigcap_i W(z_i)$ 是 $y$ 的开邻域，且与 $f(E)$ 不相交，这表明 $f(E)$ 在 $F$ 内是闭的. 由此得知，对于 $E$ 的每个闭子集 $A$，由于 $A$ 是紧的 (3.17.3)，故 $f(A)$ 在 $F$ 内是闭的（从而它在 $f(E)$ 内更是闭的）. 如果 $f$ 是单射，则上述结果表明 $f(E) \to E$ 的逆映射是连续的 (3.11.4).

**(12.3.7)** 如果一个分离拓扑粗于一个紧可度量化空间的拓扑，则这两个拓扑必定相同.

**(12.3.8)** 设 $E$ 是紧可度量化空间，$F$ 是分离空间，$f$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射，则对每个点 $b \in f(E)$ 与 $E$ 内每个包含 $f^{-1}(b)$ 的开集 $U$，在 $F$ 内存在点 $b$ 的邻域 $V$，使得 $f^{-1}(V) \subset U$.

事实上，$E-U$ 在 $E$ 内是闭的，因而由 (12.3.6)，$f(E-U)$ 在 $F$ 内是闭的；据定义，$b \notin f(E-U)$，从而 $f(E-U)$ 在 $F$ 内的余集 $V$ 是 $b$ 的开邻域，并且显然有 $U \supset f^{-1}(V)$。

## 问　　题

1）确定具有两个或三个元的集 $E$ 上的所有拓扑.

2）设 $\mathfrak{F}$ 是由集 $E$ 的子集组成的一个集. 试证，为使 $\mathfrak{F}$ 是 $E$ 的关于 $E$ 上的某个拓扑的闭子集所成的集，必须且只须 $\mathfrak{F}$ 满足下面两个条件:

1° 属于 $\mathfrak{F}$ 的集组成的任何族的交仍属于 $\mathfrak{F}$；

2° 空集属于 $\mathfrak{F}$，并且属于 $\mathfrak{F}$ 的两个集的并属于 $\mathfrak{F}$.

3） 设 $E$ 是一个集，对每个 $x \in E$，设 $\mathfrak{B}(x)$ 是 $E$ 的子集组成的一个集. 试证，为了存在 $E$ 上的拓扑 $\mathscr{T}$，使对每个 $x \in E$，$\mathfrak{B}(x)$ 是 $x$ 关于 $\mathscr{T}$ 的邻域系，必须且只须这些 $\mathfrak{B}(x)$ 满足下列条件:

($V_I$) $E$ 的每个包含属于 $\mathfrak{B}(x)$ 的某个集的子集也属于 $\mathfrak{B}(x)$.

($V_{II}$) 属于 $\mathfrak{B}(x)$ 的两个集的交属于 $\mathfrak{B}(x)$.

($V_{III}$) 对每个 $x \in E$ 与每个 $V \in \mathfrak{B}(x)$，有 $x \in V$.

($V_{IV}$) 对每个 $x \in E$ 与每个集 $V \in \mathfrak{B}(x)$，存在集 $W \in \mathfrak{B}(x)$，使对一切 $y \in W$，有 $V \in \mathfrak{B}(y)$.

在这些条件下，拓扑 $\mathscr{T}$ 是唯一的.

4）设 $A$ 是具有异于 0 的单位元（记作 1）的交换环. $A$ 的理想 $\mathfrak{p}$ 称为**素理想**，如果 $A/\mathfrak{p}$ 是整环（因而它不会只含有 0）. $A$ 的素理想的集称为 $A$ 的**谱**（可以证明这个集是非空的），记作 spec($A$). 对 $A$ 的每个理想 $\mathfrak{a}$，以 $V(\mathfrak{a})$ 表示包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集. 试证对于 $A$ 的任何两个理想 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$，有

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b});$$

由此推断 spec($A$) 的子集 $V(\mathfrak{a})$ 的族是某个拓扑的闭集族，这个拓扑称为 spec($A$) 上的**谱拓扑**. 设 $x, y$ 是 spec($A$) 的两个不同的点，试证，或者存在 $x$ 的邻域，它不含有 $y$；或者存在 $y$ 的邻域，它不含有 $x$. 在什么条件下，单点集 $\{x\}$ 在 spec($A$) 内是闭的？考虑 $A = Z$ 的情形；考虑 $A$ 是离散赋值环的情形.

设 $A'$ 是另一个环，$h: A \to A'$ 是使 $h(1) = 1$ 的环同态，试证 spec($A'$) 到 spec($A$) 的映射 $\mathfrak{p}' \to h^{-1}(\mathfrak{p}')$ 关于谱拓扑是连续的.

5）a) 对于非空拓扑空间 $E$，下列条件是等价的：1° $E$ 的两个非空开集的交非空；2° $E$ 内的每个非空开集是处处稠密的；3° $E$ 内的每个开集是连

通的. 此时我们把空间 $E$ 称为**不可约空间**. 拓扑空间 $E$ 的非空子集 $F$ 称为**不可约集**,如果子空间 $F$ 是不可约的.

b) 试证,在分离空间中,不可约集仅由一个点组成.

c) 在拓扑空间 $E$ 内,为使子集 $F$ 是不可约的,必须且只须它的闭包 $\bar{F}$ 是不可约的. 特别地,对每个点 $x\in E$,集 $\overline{\{x\}}$ 是不可约的. 当 $E$ 内的不可约集 $F$ 具有 $\overline{\{x\}}$ 的形式时,就称 $x$ 为 $F$ 的**一般点**.

d) 设 $A$ 是整环,试证拓扑空间 spec$(A)$ (问题 4) 是不可约的,且 $\{0\}$ 是唯一的一般点.

试证在 spec$(Z)$ 内,一般点的余集是没有一般点的不可约集.

e) 设 $E$ 是不可约空间,则 $E$ 的每个非空开子集是不可约集.

f) 设 $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是拓扑空间 $E$ 的开覆盖,且对任何指标组 $(\alpha,\beta)$,有 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$. 试证,若集 $U_\alpha(\alpha\in A)$ 都是不可约的,则空间 $E$ 是不可约的.

g) 设 $E$, $F$ 是两个拓扑空间,$f$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射,则对 $E$ 的每个不可约子集 $A$, $f(A)$ 是 $F$ 的不可约子集.

h) 设 $E$, $F$ 是两个不可约空间,每个都至少具有一个一般点;此外还假定 $F$ 只有唯一的一般点 $b$. 设 $f$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射,试证,为使 $f(E)$ 在 $F$ 内稠密,必须且只须对 $E$ 的每个一般点 $x$,有 $f(x)=b$.

6) 如果拓扑空间 $E$ 满足 Borel-Lebesgue 公理 (3.16),则称为**拟紧空间**;如果它是分离的与拟紧的,则称为**紧空间**. 拓扑空间 $E$ 的子集 $F$ 称为**拟紧集**(相应地,**紧集**),如果 $E$ 的子空间 $F$ 是拟紧的(相应地,紧的). 有限集是拟紧集.

a) 在拟紧拓扑空间内,任何闭集是拟紧的.

b) 设 $E$ 是分离拓扑空间, $A$, $B$ 是 $E$ 内的两个没有公共点的紧集. 试证,存在两个没有公共点的开集 $U$, $V$, 使得 $A\subset U$, $B\subset V$ (首先考虑 $A$ 是单点集情形). 由此推断,在分离空间中,紧集是闭的.

c) 试证在拓扑空间 $E$ 中,有限个拟紧集的并是拟紧集.

d) 设 $E$ 是拟紧空间, $f$: $E\to F$ 是连续映射,则集 $f(E)$ 是拟紧的.

e) $E$ 的非空子集的一个集 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{P}(E)$ 称为集 $E$ 上的一个**滤系基**,如果对属于 $\mathfrak{B}$ 的任意两个子集 $X$, $Y$, 存在子集 $Z\in\mathfrak{B}$, 使得 $Z\subset X\cap Y$. 试证在拟紧空间 $E$ 内,对于任何由闭集组成的滤系基 $\mathfrak{B}$, 所有属于 $\mathfrak{B}$ 的集的交必是非空的(用反证法,考虑属于 $\mathfrak{B}$ 的集的余集).

f) 对于具有不等于 0 的单位元的交换环 $A$, 试证拓扑空间 spec$(A)$ (问题 4) 是拟紧的.

g) 设 $E$ 是区间 $]0, 1]$ 与两个单点集 $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ 的并, $\mathfrak{B}$ 是形如 $]a, 1]$, $\{\alpha\} \cup ]0, a[$, $\{\beta\} \cup ]0, a[$ 的集的有限交所成的集,其中 $0<a<1$. 试证 $\mathfrak{B}$ 是 $E$ 上的某个非分离拓扑的基,对于这个拓扑, $E$ 是拟紧的,并且每个单点集在 $E$ 内是闭的. $E$ 的每个点都有一个可度量化的紧邻域;但是存在 $\alpha$ (或 $\beta$) 的非闭邻域. 试证 $\alpha$ 的一个可度量化紧邻域与 $\beta$ 的一个可度量化紧邻域的交不是拟紧的. 存在 $E$ 的可数拓扑基, 它由 $E$ 的可分可度量化的子空间所组成.

h) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{N}$ 与无限集 $A$ 的和集 (1.8). 对每个 $x \in \boldsymbol{N}$, 令 $\mathfrak{S}(x) = \{x\}$; 对 $x \in A$, 以 $S_{x,n}$ 表示 $\{x\}$ 与不小于 $n$ 的整数的集的并,以 $\mathfrak{S}(x)$ 表示 $n$ 取遍 $\boldsymbol{N}$ 时 $S_{x,n}$ 所成的集. 试证存在 $E$ 上的非分离拓扑, 使对每个 $x \in E$, $\mathfrak{S}(x)$ 是 $x$ 的基本邻域系. 单点集关于这个拓扑都是闭的. 虽然 $E$ 不是拟紧的,但在 $E$ 内存在处处稠密且拟紧的分离子空间.

## 4. 可一致化空间

$E \times E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $d$ 称为集 $E$ 上的**伪距离**, 如果对每个 $x \in E$, 有 $d(x, x) = 0$, 且它具有 (3.1) 的性质 (I), (III) 与 (IV), 但不一定具有性质 (II). 显然, 对于 $E$ 内的任何 $x_i$ 与 $x$, $y$, $z$, $d$ 还满足不等式

$$d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n),$$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y).$$

**(12.4.1)** 例. 对集 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的任一映射 $f$, 映射 $(x,y) \to |f(x) - f(y)|$ 是一个伪距离.

设 $\varphi$ 是区间 $[0,+\infty[$ 到自身的映射,满足下面三个条件:
1° $\varphi(0) = 0$; 2° $\varphi$ 是递增的; 3° 对 $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, 有

$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v).$$

于是,如果 $d$ 是集 $E$ 上的伪距离, 则合成映射 $\varphi \circ d$: $(x, y) \to \varphi(d(x,y))$ 也是 $E$ 上的伪距离. 事实上,只须证明三角不等式, 而根据性质 2° 与 3°, 有

$$\varphi(d(x,z)) \leqslant \varphi(d(x,y) + d(y,z)) \leqslant \varphi(d(x,y)) + \varphi(d(y,z)).$$

设 $(d_n)$ 是集 $E$ 上的伪距离序列，满足：对一切 $(x,y)\in E\times E$，级数 $\sum_n d_n(x,y)$ 恒收敛，则此级数的和 $d(x,y)$ 也是 $E$ 上的伪距离 (3.15.4)。

现在，考虑集 $E$ 上的伪距离族 $(d_\alpha)_{\alpha\in I}$。对每个 $a\in E$，每个 $I$ 的元组成的有限族 $(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ 以及每个正数的有限族 $(r_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$，令

$$B(a;(\alpha_j),(r_j))=\{x\in E\,|\,d_{\alpha_j}(a,x)<r_j,1\leqslant j\leqslant m\},$$
$$B'(a;(\alpha_j),(r_j))=\{x\in E\,|\,d_{\alpha_j}(a,x)\leqslant r_j,1\leqslant j\leqslant m\}.$$

以 $\mathfrak{D}$ 表示 $E$ 的满足下述条件的子集 $U$ 的集：对每个 $x\in U$，存在 $I$ 的元的有限族 $(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ 与正数的有限族 $(r_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$，使得 $B(x;(\alpha_j),(r_j))\subset U$。显然 $\mathfrak{D}$ 是 $E$ 上的一个拓扑，称为**由伪距离族 $(d_\alpha)_{\alpha\in I}$ 定义的拓扑**。如果某个拓扑可由一个伪距离族定义，则这个拓扑称为**可一致化拓扑**，赋予这样的拓扑的空间称为**可一致化空间**。度量空间显然是可一致化的，但反之不然(例如，仅由一个伪距离 $d=0$ 组成的族定义的平庸拓扑)。存在不可一致化的分离拓扑(问题 3 与 4)；但在本书中，此后只考虑可一致化空间(在数学分析的大部分问题中也是如此)。

**(12.4.2)** 设 $E$ 是可一致化空间，其拓扑由伪距离族 $(d_\alpha)_{\alpha\in I}$ 定义，则集

$$B(a;(\alpha_j),(r_j))\quad(\text{相应地，}B'(a;(\alpha_j),(r_j)))$$

在 $E$ 内是开(相应地，闭)的。

事实上，设 $x\in B(a;(\alpha_j),(r_j))$，且令 $s_j=d_{\alpha_j}(a,x)$。由假设，对 $1\leqslant j\leqslant m$，有 $s_j<r_j$；根据 $d_{\alpha_j}$ 的三角不等式，可知 $B(a;(\alpha_j),(r_j))$ 包含集 $B(x;(\alpha_j),(r_j-s_j))$，这表明 $B(a;(\alpha_j),(r_j))$ 是开的。同样地，若 $x\notin B'(a;(\alpha_j),(r_j))$，则存在指标 $k$，使得 $1\leqslant k\leqslant m$，且有 $d_{\alpha_k}(a,x)=s_k>r_k$；于是由 $d_{\alpha_k}$ 的三角不等式，可证集 $B(x;\alpha_k,s_k-r_k)$ 与 $B'(a;(\alpha_j),(r_j))$ 不相交，因而 $B'(a;(\alpha_j),(r_j))$ 是闭的。

**(12.4.3)** 在可一致化空间内，任意一点的所有闭邻域形成该点的一个基本邻域系。

为此只须利用(12.4.2)并注意

$$B'(a;(\alpha_j),(r_j/2))\subset B(a;(\alpha_j),(r_j))$$

即可证得.

**(12.4.4)** 设 $E$ 是可一致化空间，$(d_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是定义 $E$ 的拓扑的伪距离族，则为使 $E$ 是分离的，必须且只须对 $E$ 的每对不同的点 $x$, $y$, 存在 $\beta\in I$, 使得 $d_\beta(x,y)\neq 0$.

事实上，如果 $E$ 是分离的，则据定义，存在不含 $y$ 的集 $B(x;(\alpha_j),(r_j))$, 这表示至少对某个指标 $j$, 有 $d_{\alpha_j}(x,y)\geqslant r_j>0$. 反之，若 $d_\beta(x,y)=t>0$, 则根据 $d_\beta$ 的三角不等式，即知 $x$ 的开邻域 $B(x;\beta,t/2)$ 与 $y$ 的开邻域 $B(y;\beta,t/2)$ 没有公共点.

若 $(d_\alpha)$ 是在集 $E$ 上定义一个分离拓扑的伪距离族，则 $E$ 中的点列 $(x_n)$ 关于该拓扑以点 $a$ 为极限意味着，对一切 $\alpha$, 有

$$\lim_{n\to\infty} d_\alpha(a, x_n)=0.$$

同一个集 $E$ 上的两个伪距离族称为**拓扑等价的**，如果它们在 $E$ 上定义相同的拓扑.

**(12.4.5)** 对于集 $E$ 上的每个伪距离族 $(d_\alpha)_{\alpha\in I}$, 必存在与它拓扑等价的伪距离族 $(d'_\alpha)_{\alpha\in I}$, 使对一切 $\alpha\in I$, 有 $0\leqslant d'_\alpha\leqslant 1$.

对 $0\leqslant u<+\infty$, 令 $\varphi(u)=\inf(u,1)$; 易于验证 $\varphi(0)=0$, $\varphi$ 在 $[0,+\infty[$ 上递增，且满足不等式

$$\varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v).$$

最后这个不等式当 $u>1$ 或 $v>1$ 时，或当 $u+v\leqslant 1$ 时是显然成立的；另一方面，当 $u\leqslant 1$, $v\leqslant 1$ 与 $u+v>1$ 时，有 $\varphi(u+v)=1<\varphi(u)+\varphi(v)$. 由此推出(12.4.1), 对每个 $\alpha\in I$, $d'_\alpha=\varphi\circ d_\alpha$ 是 $E$ 上的伪距离. 于是由对于 $0<r<1$, 关系 $d_\alpha(x,y)<r$ 与 $d'_\alpha(x,y)<r$ 等价以及(12.2.1), 即知 $(d_\alpha)$ 与 $(d'_\alpha)$ 所定义的拓扑相同.

**(12.4.6)** 如果分离可一致化空间 $E$ 的拓扑可由一个伪距离序列 $(d_n)$ 来定义，则这个空间是可度量化的.

可以限于序列 $(d_n)$ 是无限的情形；用 $\inf(d_n, 1)$ 代替 $d_n$

(12.4.5)，还可以限于讨论 $0 \leqslant d_n \leqslant 1$ 对一切 $n$ 都成立的情形．此时对由 $E$ 的元组成的每个二元组 $(x,y)$，级数

(12.4.6.1) $$d(x,y)=\frac{1}{2}d_1(x,y)+\frac{1}{2^2}d_2(x,y)+\cdots+\frac{1}{2^n}d_n(x,y)+\cdots$$

都收敛，并且 $d$ 是 $E$ 上的伪距离 (12.4.1)；进而，$d$ 还是距离，因为如果 $d(x,y)=0$，则对一切正整数 $n$，必有 $d_n(x,y)=0$，而由于 $E$ 是分离的，因此必有 $x=y$ (12.4.4)． 设 $B_0(x;r)$ 是以 $x$ 为中心、以 $r$ 为半径(关于距离 $d$) 的开球，则由 (12.4.6.1) 立即得到，对一切 $n$，有

$$B_0(x;r)\subset B(x;n,2^n r).$$

反之，若 $n$ 充分大，使得 $2^{n-1}\geqslant 1/r$，则对 $E$ 中任何 $x,y$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n-k}d_{n+k}(x,y)\leqslant 2^{-n}\leqslant r/2,$$

从而

$$B\left(x;(1,2,\cdots,n),\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\cdots,\frac{r}{2}\right)\right)\subset B_0(x;r).$$

根据 (12.2.1)，命题得证．

**(12.4.7)** 设 $E$ 是拓扑空间，$(U_n)$ 是 $E$ 的一个至多可数开覆盖，并使得 $E$ 的子空间 $\overline{U}_n$ 都是可度量化的与可分的，则 $E$ 是可度量化的与可分的．

我们首先证明 $E$ 的拓扑是分离的． 事实上，设 $x,y$ 是 $E$ 的两个不同的点，如果存在 $n$，使得 $x\in U_n$ 且 $y\notin\overline{U}_n$，则取 $V=U_n$ 与 $W=E-\overline{U}_n$，就分别得到 $x$ 与 $y$ 在 $E$ 内的邻域，它们没有公共点． 在相反情形下，即假定对于某个指标 $n$，有 $x\in U_n$ 且 $y\in\overline{U}_n$，则在可度量化子空间 $\overline{U}_n$ 内，存在 $x$ 的开邻域 $V_0$ 与 $y$ 的开邻域 $W_0$，它们没有公共点． 此时 $V=V_0\cap U_n$ 是 $x$ 在 $E$ 内的开邻域，而另一方面，存在 $E$ 内的开集 $W$，使得 $W\cap\overline{U}_n=W_0$，于是 $W$ 是 $y$ 在 $E$ 内的开邻域且 $V\cap W=\varnothing$．

对每个 $n$，设 $d_n$ 是定义 $\overline{U}_n$ 的拓扑的距离，且设 $(V_{mn})_{m\geqslant 1}$ 是 $U_n$ 的拓扑基，其中 $V_{mn}$ 是以 $a_{mn}$ 为中心、以 $r_{mn}$ 为半径的开球(3.9.4)。定义实值函数 $f_{mn}$ 如下：它在 $V_{mn}$ 上等于 $r_{mn}-d_n(a_{mn},x)$，在 $V_{mn}$ 关于 $E$ 的余集上等于 0；$f_{mn}$ 在 $V_{mn}$ 的边界上取值为 0，因而它在 $E$ 内是连续的．对 $E$ 的每对点 $x, y$，令 $d_{mn}(x, y)=|f_{mn}(x)-f_{mn}(y)|$．我们来证这些伪距离 $d_{mn}$ 定义了 $E$ 的拓扑，而根据(12.4.6)，这就证明了所述命题．对每个 $x_0\in E$，由形如 $d_{mn}(x_0,x)<\alpha$ 的不等式确定的集在 $E$ 内是开的(3.11.4)．反之，存在正整数 $n$，使得 $x_0\in U_n$，并且对于 $x_0$ 在 $E$ 内的每个邻域 $W$，存在整数 $m$，使得 $V_{mn}$ 是 $x_0$ 的包含于 $W$ 内的开邻域(3.9.3)；因而 $f_{mn}(x_0)=\beta>0$，且使得 $d_{mn}(x_0,x)<\beta/2$ 的点 $x\in E$ 所成的集包含于 $W$ 内，从而所述命题得证(12.2.1)．

注意，如果假定存在 $E$ 的不可数开覆盖 $(U_\lambda)$，使得 $\overline{U}_\lambda$ 都是可度量化与可分的(甚至紧的)，则(12.4.7)的结论不再正确(12.16 问题 22)．我们也不能在(12.4.7)中只假定开集 $U_n$ 都是可度量化与可分的(12.3 问题 6g))．

## 问　　题

1）设 $E$ 是这样的拓扑空间：对于每个 $x\in E$，$x$ 的所有在 $E$ 内既开又闭的邻域形成 $x$ 的基本邻域系．试证 $E$ 是可一致化的(注意 $E$ 内既开又闭的集的特征函数在 $E$ 内是连续的)．

2）设 $E$ 是可数、可一致化与分离的空间．试证对每个 $x\in E$，$x$ 的所有既开又闭的邻域形成 $x$ 的一个基本邻域系．

3）设 $\theta$ 是正无理数．对每个点 $(x,y)\in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ (这里 $\mathbf{Q}_+=\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+$) 与每个正整数 $n$，设 $B_n(x,y)$ 是点 $(x,y)$ 以及使得 $|z-(x+\theta y)|<1/n$ 或 $|z-(x-\theta y)|<1/n$ 的点 $(z,0)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 所成的集．试证当 $(x,y)$ 取遍 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 并且 $n$ 取遍正整数集时，集 $B_n(x,y)$ 构成 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 上某个拓扑 $\mathscr{T}$ 的(可数)基；证明 $\mathscr{T}$ 是分离的，但对 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 的任何两个点 $a, b$，$a$ 的每个闭邻域与 $b$ 的每个闭邻域都相交．由此推断，赋予拓扑 $\mathscr{T}$ 的 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 是连通的，且 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+$ 到 $\mathbf{R}$ 的每个(关于 $\mathscr{T}$ 为)连续的映射都是常值映射；这表明 $\mathscr{T}$ 是不可一致化的．

4）设 $\boldsymbol{Q}$ 是有理数集，赋予 $\boldsymbol{R}$ 上拓扑的诱导拓扑 $\mathscr{T}_0$；设 $\mathfrak{M}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的满足下述条件的子集 $A$ 的集：$A$ 对于 $\mathscr{T}_0$ 的闭包 $\bar{A}$ 只有有限个非孤立点(3.10.10)。以 $\mathfrak{B}$ 表示由下列各种集所成的集：$\boldsymbol{Q}$ 内的开区间；属于 $\mathfrak{M}$ 的集在 $\boldsymbol{Q}$ 内的余集；还有这种余集与 $\boldsymbol{Q}$ 的任意开区间的交。试证 $\mathfrak{B}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 上的某个拓扑 $\mathscr{T}$ 的基，$\mathscr{T}$ 精于 $\mathscr{T}_0$，因而 $\mathscr{T}$ 是分离的。试证 $\boldsymbol{Q}$ 中关于拓扑 $\mathscr{T}$ 收敛的序列只有有限个不同的项，但拓扑 $\mathscr{T}$ 不是离散的。虽然 $\boldsymbol{Q}$ 是可数的，并且关于拓扑 $\mathscr{T}$，$\boldsymbol{Q}$ 的每个点都是由该点的邻域组成的一个可数族的交，但是关于这个拓扑，$\boldsymbol{Q}$ 的每个点没有可数的基本邻域系。利用(12.4.3)证明，虽然拓扑 $\mathscr{T}$ 精于一个可度量化拓扑，但却不是可一致化的。

5）设 $E$ 是满足下述条件的拓扑空间：对每个 $x \in E$ 与 $x$ 在 $E$ 内的每个邻域 $V$，存在 $E$ 到 $[0,1]$ 的连续映射 $f$，使得 $f(x) = 1$，且当 $y \in E - V$ 时，有 $f(y) = 0$。试证 $E$ 是可一致化的。

由此推断，若 $E$ 是这样的拓扑空间，它的每个点都有一个在 $E$ 内为闭的邻域，使得这个闭邻域是可一致化的子空间，则 $E$ 是可一致化的。能否在这个命题中去掉“闭”字？（参阅 12.3，问题 6f)。）

6）对每个 $x \in R$ 与每个正整数 $n$，以 $U_n(x)$ 表示区间 $[x, x + 1/n[$ 与 $]-x - 1/n, -x[$ 的并。试证 $\boldsymbol{R}$ 上只存在一个拓扑 $\mathscr{T}$，它与 $\boldsymbol{R}$ 上的通常拓扑是不可比的，而对每个 $x \in \boldsymbol{R}$，上述 $U_n(x)$ 构成 $x$ 的一个基本邻域系。试证 $\mathscr{T}$ 是可一致化的（利用问题 5）。关于这个拓扑，每个点都具有可数的基本邻域系，并且存在处处稠密的可数集；但是不存在关于 $\mathscr{T}$ 的开集可数基，因而 $\mathscr{T}$ 不是可度量化的。同样去证明 $\mathscr{T}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $E = [-1,1]$ 上的诱导拓扑不是可度量化的，但赋予该拓扑的 $E$ 却是紧的。

## 5. 可一致化空间的积

设 $E_1$，$E_2$ 是两个拓扑空间，在积集 $E_1 \times E_2$ 上，考虑形如 $A_1 \times A_2$ 的集的（任意）并所成的集 $\mathfrak{O}$，其中 $A_1$ 是 $E_1$ 内的开集而 $A_2$ 是 $E_2$ 内的开集。集 $\mathfrak{O}$ 是 $E$ 上的一个拓扑，因为显然它满足 $(O_{\rm I})$；又对于 $E_1$ 内的开集 $A_1$，$B_1$ 与 $E_2$ 内的开集 $A_2$，$B_2$，有关系式

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

因而它满足 $(O_{\rm II})$。这个拓扑称为 $E_1$ 的拓扑与 $E_2$ 的拓扑的**积拓**

扑；赋予这个拓扑的 $E$ 称为 $E_1$ 与 $E_2$ 的**积空间**．设 $x=(x_1,x_2)$ 是 $E$ 的任意一点，则当 $V_i$ 取遍 $x_i(i=1,2)$ 的基本邻域系时，集 $V_1\times V_2$ 在 $E$ 内形成点 $x$ 的基本邻域系 (3.9.3)．由此推出连续性判断准则 (3.20.4) 对任意两个拓扑空间的积仍然有效．

当 $A_1\subset E_1$, $A_2\subset E_2$ 时，关系式 $\overline{A_1\times A_2}=\bar{A}_1\times\bar{A}_2$ 仍然成立．因为对每个点 $(a_1,a_2)\in E$ 与该点的每个形如 $V_1\times V_2$ 的邻域(其中 $V_i$ 是 $a_i$ 的邻域，$i=1,2$)，当且仅当两个集 $V_1\cap A_1$, $V_2\cap A_2$ 之一为空集时，$(V_1\times V_2)\cap(A_1\times A_2)=(V_1\cap A_1)\times(V_2\cap A_2)$ 才是空的．

对每个 $a_1\in E_1$，集 $(\{a_1\}\times E_2)\cap(A_1\times A_2)$ 或者是空的，或者等于 $\{a_1\}\times A_2$，因而映射 $x_2\to(a_1,x_2)$ 是 $E_2$ 到 $E$ 的子空间 $\{a_1\}\times E_2$ 上的同胚(同样地，对每个 $a_2\in E_2$，映射 $x_1\to(x_1,a_2)$ 是 $E_1$ 到 $E$ 的子空间 $E_1\times\{a_2\}$ 上的同胚)．由此立即得到，命题 (3.20.12) 与 (3.20.13)，还有连续性准则 (3.20.14) 与 (3.20.15) 在一般情形下仍然成立．

若 $E_1$ 与 $E_2$ 是分离的，则 $E_1\times E_2$ 也是分离的．因为如果 $x=(x_1,x_2)$ 与 $y=(y_1,y_2)$ 不相同，例如，设 $x_2\neq y_2$，则在 $E_2$ 内存在 $x_2$ 的邻域 $U$ 与 $y_2$ 的邻域 $V$，它们没有公共点，于是 $E_1\times U$ 与 $E_1\times V$ 分别是 $x$ 与 $y$ 的邻域，并且没有公共点．

若 $E_1=E_2$，则**典则对称** $(x_1,x_2)\to(x_2,x_1)$ 是 $E_1\times E_2$ 到自身的同胚，这个同胚与其逆同胚相等．

我们可以同样地定义任意有限个拓扑空间的积；由这个定义可以直接推出，使 $(E_1\times E_2)\times E_3\to E_1\times(E_2\times E_3)$ 的"结合"典则映射是同胚．

下面要特别考虑 $E_1$ 与 $E_2$ 是可一致化空间的情形，此时积空间 $E$ 也是可一致化的．更明确地说，设 $(d_\lambda^{(1)})_{\lambda\in L}$, $(d_\mu^{(2)})_{\mu\in M}$ 分别是定义 $E_1$ 与 $E_2$ 的拓扑的两个伪距离族，令

$$e_\lambda^{(1)}(x,y)=d_\lambda^{(1)}(\mathrm{pr}_1x,\mathrm{pr}_1y),\quad e_\mu^{(2)}(x,y)=d_\mu^{(2)}(\mathrm{pr}_2x,\mathrm{pr}_2y),$$

则 $e_\lambda^{(1)}$ 与 $e_\mu^{(2)}$ 是 $E$ 上的伪距离，而且由上面给出的邻域定义，即可证明当 $\lambda\in L$ 与 $\mu\in M$ 时，伪距离 $e_\lambda^{(1)}$ 与 $e_\mu^{(2)}$ 所成的集定义了 $E$ 上

的积拓扑.

这就导致推广到不一定是有限个空间组成的族的积的概念;我们仍然限于可一致化空间的情形.

设 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是可一致化空间的任意一个族，令 $E=\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$. 对每个 $\alpha\in I$，设 $(d_{\alpha,\lambda})_{\lambda\in L_\alpha}$ 是定义 $E_\alpha$ 的拓扑的伪距离族. 如果对 $E=\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$ 的每对元 $x, y$，令

(12.5.1) $$e_{\alpha,\lambda}(x,y)=d_{\alpha,\lambda}(\mathrm{pr}_\alpha x,\ \mathrm{pr}_\alpha y),$$

则显然这些 $e_{\alpha,\lambda}$ 都是 $E$ 上的伪距离. 当 $\alpha$ 取遍 $I$ 且对每个 $\alpha\in I$，$\lambda$ 取遍 $L_\alpha$ 时，由 $e_{\alpha,\lambda}$ 所定义的 $E$ 上的拓扑，称为 $E_\alpha(\alpha\in I)$ 的拓扑的**积拓扑**；而赋予该拓扑的 $E$，称为 $E_\alpha(\alpha\in I)$ 的**积空间**. 当 $I=\{1,2\}$ 时，我们又回到上面给出的定义.

对每个有限族 $(\alpha_i,\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 与每个正数的有限族 $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，可以把集 $B(x;((\alpha_i,\lambda_i)),(r_i))$ 写为 $\prod_{\alpha\in I}B_\alpha$，这里当 $\alpha=\alpha_i$ 时，$B_\alpha=B(\mathrm{pr}_{\alpha_i}x;(\lambda_j),(r_j))$，$j$ 取遍使得 $\alpha_j=\alpha_i$ 的指标；而当 $\alpha$ 异于所有这些 $\alpha_i$ 时，$B_\alpha=E_\alpha$，考虑到 (3.6.4)，由此可立即推出：

(12.5.2) 对每个 $\alpha\in I$，$\mathrm{pr}_\alpha$ 是 $E$ 到 $E_\alpha$ 上的连续映射，且 $E$ 内的每个开集在 $\mathrm{pr}_\alpha$ 下的象是 $E_\alpha$ 内的开集.

(12.5.3) 对 $I$ 的每个有限子集 $H$ 与每个族 $(U_\alpha)_{\alpha\in H}$（其中 $U_\alpha$ 是 $E_\alpha$ 内的开集，$\alpha\in H$），集 $\prod_{\alpha\in H}U_\alpha\times\prod_{\alpha\in I-H}E_\alpha$ 在 $E$ 内是开的.

事实上，这个集是关于 $\alpha\in H$ 的集 $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 的交，而 $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 是开的 (12.5.2) 并且只有有限个.

(12.5.3) 中描述的集称为 $E$ 的**基本集**；上面关于邻域的描述（并考虑到 (3.9.3)）表明，这些集形成 $E$ 的拓扑基. 这也附带证明了，在 $E$ 上定义的拓扑只依赖于 $E_\alpha$ 的拓扑，而不依赖于定义 $E_\alpha$ 的拓扑的伪距离族 $(d_{\alpha,\lambda})$. 此外，若 $\mathfrak{B}_\alpha$ 是 $E_\alpha$ 的拓扑基，则对一切 $\alpha$ 使得 $U_\alpha\in\mathfrak{B}_\alpha$ 的基本集也构成 $E$ 的拓扑基. 应当注意，如果 $I$ 是无限集，且对每个 $\alpha\in I$，$U_\alpha$ 是 $E_\alpha$ 内的非空且异于 $E_\alpha$ 的开集，则 $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ 不是 $E$ 内的开集.

**(12.5.4)** 对每个族 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ (对一切 $\alpha\in I$ 都有 $A_\alpha\subset E_\alpha$), 若令

$$A=\prod_{\alpha\in I}A_\alpha,$$

则

$$\overline{A}=\prod_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha;$$

特别地,若每个 $A_\alpha$ 在 $E_\alpha$ 内是闭的,则 $A$ 在 $E$ 内是闭的.

事实上, 对一切 $\alpha\in I$, 有 $\mathrm{pr}_\alpha(\overline{A})\subset\overline{\mathrm{pr}_\alpha(A)}=\overline{A}_\alpha$ ((12.5.2) 与 (3.11.4)), 因而 $\overline{A}\subset\prod\limits_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha$. 另一方面,设 $a=(a_\alpha)\in\prod\limits_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha$, 如果考虑含有 $a$ 的基本集 $U=\prod\limits_{\alpha\in H}U_\alpha\times\prod\limits_{\alpha\in I-H}E_\alpha$, 则这个基本集与 $A$ 的交是 $\prod\limits_{\alpha\in H}(A_\alpha\cap U_\alpha)\times\prod\limits_{\alpha\in I-H}A_\alpha$; 根据假设,每个 $\overline{A}_\alpha$ 非空,因而每个 $A_\alpha$ 非空,所以 $U\cap A\neq\varnothing$, 这表明 $a\in\overline{A}$.

**(12.5.5)** 设 $z\to f(z)=(f_\alpha(z))_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间 $F$ 到 $E$ 的映射,则为使 $f$ 在点 $z_0\in F$ 处连续, 必须且只须每个映射 $f_\alpha$ 在点 $z_0$ 处连续.

事实上,对每个基本集 $U=\prod\limits_{\alpha\in H}U_\alpha\times\prod\limits_{\alpha\in I-H}E_\alpha$, 有

$$f^{-1}(U)=\bigcap_{\alpha\in H}f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

**(12.5.6)** 设 $(x^{(n)})$ 是 $E$ 中的一个点列, 则为使 $a=(a_\alpha)$ 是序列 $(x^{(n)})$ 的极限, 必须且只须对每个 $\alpha\in I$, $a_\alpha$ 是序列 $(\mathrm{pr}_\alpha x^{(n)})_{n\geqslant1}$ 的极限.

这是 (12.5.5) 与极限定义的直接推论.

特别是,如果所有 $E_\alpha$ 都等于同一个空间 $F$, 则 $I$ 到 $F$ 的映射 $u\in F^I$ 是由 $I$ 到 $F$ 的映射组成的序列 $(u_n)_{n\geqslant1}$ (关于积拓扑) 的极限,就是对每个 $\alpha\in I$, 序列 $(u_n(\alpha))_{n\geqslant1}$ 在 $F$ 内具有极限 $u(\alpha)$. 在这种情形下,我们还把映射 $u$ 称为序列 $(u_n)$ 的**简单极限**, 或者称序列 $(u_n)$ **简单收敛**于 $u$.

**(12.5.7)** 若空间 $E_\alpha$ 都是分离的,则积空间 $E$ 也是分离的.

事实上，若 $x \neq y$，则存在 $\alpha \in I$，使得 $\mathrm{pr}_\alpha x \neq \mathrm{pr}_\alpha y$。由假设并根据 (12.4.4)，存在 $\lambda \in L_\alpha$，使得 $d_{\alpha,\lambda}(\mathrm{pr}_\alpha x, \mathrm{pr}_\alpha y) \neq 0$，因而 $e_{\alpha,\lambda}(x, y) \neq 0$；再由 (12.4.4) 即得所需的结论。

**(12.5.8)** 可度量化(相应地，可度量化与可分)空间的可数族的积 $E$ 是可度量化(相应地，可度量化与可分)的。

事实上，根据 (12.5.7)，$E$ 是分离的。为证明 $E$ 是可度量化的，只须应用 (12.4.6) 与积空间上伪距离的定义即可。假定 $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$，其中 $E_n$ 是可度量化与可分的；于是对每个 $n$，存在 $E_n$ 的一个可数拓扑基 $(U_{mn})_{m\geqslant 0}$。对每个正整数 $n$，设 $\mathfrak{B}_n$ 是 $E$ 内形如 $\prod_{i=1}^{n} U_{f(i),i} \times \prod_{k=n+1}^{\infty} E_k$ 的基本集所成的集，其中 $f$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到 $\boldsymbol{N}$ 的任一映射；由于 $\boldsymbol{N}^n$ 是可数的 (1.9.3)，所以 $\mathfrak{B}_n$ 至多是可数的 (1.9.2)。我们已经看到，这些 $\mathfrak{B}_n$ 的并 $\mathfrak{B}$ 是 $E$ 的一个拓扑基 (12.5.3)；由于 $\mathfrak{B}$ 是可数的 (1.9.4)，所以 $E$ 是可分的 (3.9.4)。

**(12.5.9)** 紧可度量化空间的可数族的积是紧可度量化空间。

设 $(E_n)$ 是紧度量空间序列；由于已知 $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ 是可度量化的(12.5.8)，因而只须证明 $E$ 中任何点列 $(x_n)$ 都有触值(3.16.1)。按下面的方式对 $m \geqslant 0$ 用归纳法定义 $E$ 中的点列 $(x_n^{(m)})_{n\geqslant 1}$：$x_n^{(0)} = x_n$；对 $m \geqslant 1$，$(x_n^{(m)})_{n\geqslant 1}$ 是序列 $(x_n^{(m-1)})_{n\geqslant 1}$ 的子序列(换言之，存在严格递增映射 $\varphi_m$: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$，满足 $x_n^{(m)} = x_{\varphi_m(n)}^{(m-1)}$)，使得序列 $(\mathrm{pr}_m x_n^{(m)})_{n\geqslant 1}$ 在 $E_m$ 内收敛于点 $a_m$；由于 $E_m$ 是紧的，所以这总是可能的。然后在 $E$ 中考虑由 $y_n = x_n^{(n)}$ 组成的序列 (Cantor 的**对角线**方法)，若令 $\psi_n = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_1$，则有 $y_n = x_{\psi_n(n)}$。因按定义有 $\psi_n(n) > \psi_{n-1}(n-1)$，故序列 $(y_n)$ 是 $(x_n)$ 的子序列。另一方面，对每个 $m$，序列 $(y_n)_{n\geqslant m}$ 是序列 $(x_n^{(m)})_{n\geqslant 1}$ 的子序列，因而序列 $(\mathrm{pr}_m y_n)_{n\geqslant m}$ 收敛于 $a_m$。而由于序列 $(\mathrm{pr}_m y_n)_{n\geqslant 1}$ 与序列 $(\mathrm{pr}_m y_n)_{n\geqslant m}$ 只差有限项，所以序列 $(\mathrm{pr}_m y_n)_{n\geqslant 1}$ 也收敛于 $a_m$，因而序列 $(y_n)$ 收敛于点 $a = (a_m)$ (12.5.6)。

## 问　　题

1）试证两个拟紧拓扑空间（12.3 问题 6））的积是拟紧的.

2）试证拓扑空间 $E$ 是分离的必要充分条件为 $E\times E$ 的对角线（1.4.2）在 $E\times E$ 内是闭的.

3）对任意拓扑空间族 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的积 $E=\prod\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$（这些拓扑空间不一定是可一致化的），试证（12.5.3）中定义的基本集形成 $E$ 的一个拓扑基，相应的拓扑称为 $E_\alpha(\alpha\in I)$ 的拓扑的**积拓扑**. 试对于这个拓扑推广性质（12.5.2）到（12.5.7）.

4）设 $E=\prod\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是分离拓扑空间的积，这里每个 $E_\alpha$ 至少含有两个不同的点 $a_\alpha$, $b_\alpha$. 对每个指标 $\alpha\in I$，设 $c_\alpha$ 是 $E$ 的点，满足：$\mathrm{pr}_\alpha c_\alpha=b_\alpha$，而对 $\beta\neq\alpha$，有 $\mathrm{pr}_\beta c_\alpha=a_\beta$. 试证在 $E$ 内，集 $(c_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的每个点都是孤立点.

由此推断，为使 $E$ 的拓扑具有可数基，必须且只须 $I$ 为可数，并且每个 $E_\alpha$ 的拓扑都具有可数基.

试证，若 $I$ 是不可数集，则点 $a=(a_\alpha)$ 没有可数基本邻域系. 进而设对一切 $\alpha$，$E_\alpha$ 只由两个点 $a_\alpha$, $b_\alpha$ 组成，并设 $F\subset E$ 是满足下述条件的 $x\in E$ 的集：除至多可数个指标 $\alpha$ 外，有 $\mathrm{pr}_\alpha x=b_\alpha$. 试证 $F$ 在 $E$ 内稠密，但是不存在 $F$ 中的序列，使得 $a=(a_\alpha)$ 是这个序列的极限[1].

5）设 $K$ 是由两个数 0，1 构成的离散空间，$A$ 是无限集，$E$ 是积空间 $K^A$. 设 $V$ 是 $E$ 内的非空基本集，$h$ 是使得 $\mathrm{pr}_\alpha V\neq K$ 的指标 $\alpha$ 的个数（它是有限数），令 $\mu(V)=2^{-h}$（参阅（13.21））：

a）试证，若 $U_1,\cdots,U_n$ 是两两互不相交的非空基本集，则

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(U_k)\leqslant 1.$$

（写 $U_k$ 为 $W_k\times K^B$ 的形式，其中 $B$ 对所有指标 $k$ 都相同，并且是 $A$ 的一个有限子集的余集.）

b）由 a）推断，若 $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 $E$ 的两两互不相交的非空开集族，则 $L$ 至多是可数的，尽管在 $E$ 内可以存在具有任意基数（对适当选取的 $A$）的集 $C$，

---

1）如 12.4 节问题 4 那样，这个例子表明，与可度量化空间的情形（参阅（3.13.3）与（3.13.4））相反，在一般的拓扑空间中（甚至在分离可一致化空间中），对于研究这些空间的拓扑，只有收敛序列的知识是不够的. 为了得到相应的结果，必须用更一般的滤系的概念来代替序列的概念（参阅[5]）.

使得 $C$ 的所有点在 $E$ 内都是孤立点。此外，试证若 $A$ 的基数严格大于 $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ 的基数，则在 $E$ 内不可能存在处处稠密的可数集.

6) 记号同问题 5. 设 $\mathfrak{B}$ 是 $K^A$ 的形如 $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$ 的子集的集，其中除了属于 $A$ 的一个至多可数子集的指标 $\alpha$ 外，都有 $M_\alpha = K$. 试证 $\mathfrak{B}$ 是 $K^A$ 上的某个分离拓扑的基，这个拓扑精于 $K^A$ 上的积拓扑，且当 $A$ 为不可数无限时，它不是离散的. 试证对于这个拓扑，可数个开集的交是开集；没有一个点具有可数基本邻域系；并且任何拟紧子集都是有限的. 对于这个拓扑，射影函数 $\mathrm{pr}_\alpha$ 是连续的；由此推断，$K^A$ 对于这个拓扑还是可一致化的 (12.4 问题 5)).

7) 设 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0, 1]$，赋予由 $\boldsymbol{R}$ 的拓扑诱导的拓扑，试证每个可分可度量化空间 $E$ 同胚于积空间 $I^{\boldsymbol{N}}$ 的一个子空间（归结为 $E$ 上的距离 $d \leqslant 1$ 的情形；考虑在 $E$ 内处处稠密的序列 $(a_n)$ 与函数 $x \to d(a_n, x)$).

8) 采用问题 7 的记号，试证在可一致化积空间 $I^I$ 内，$I$ 到 $I$ 的连续映射所成的子空间是处处稠密的. 由此推断，虽然 $I^I$ 没有开集可数基(问题 4)，但在 $I^I$ 内存在处处稠密的可数子集.

9) 试证，若 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的非空开区间，则不可能存在 $I$ 到积空间 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 的具有下述性质的非常值映射：对每个 $x \in I$ 与每个正整数 $n$，在 $I$ 内存在 $x$ 的邻域 $V$，使对一切 $y \in V$，序列 $f(y)$ 的前 $n$ 项与序列 $f(x)$ 的前 $n$ 项都相同(注意由这个条件可推出 $f$ 是连续的，并利用 (3.19.7)).

10) a) 设 $E$ 是拓扑空间，$A$ 是 $E$ 的非空闭子集. 设 $E'$ 是 $E - A$ 与单元集 $\{\omega\}$ 的和集，并设 $\mathfrak{O}'$ 是 $E'$ 的如下子集 $U$ 所成的集：或者 $U$ 是 $E - A$ 的开集，或者 $U$ 形如 $(V - A)\cup\{\omega\}$，其中 $V$ 是 $E$ 中包含 $A$ 的开集. 试证 $\mathfrak{O}'$ 是 $E'$ 上的一个拓扑；以 $E/A$ 表示赋予这个拓扑的集 $E'$. 对 $x \in E - A$，令 $\varphi(x) = x$；对 $x \in A$，令 $\varphi(x) = \omega$；试证 $\varphi$ 是 $E$ 到 $E/A$ 上的连续映射. 此外，如果 $E$ 到拓扑空间 $F$ 的连续映射 $f$ 在 $A$ 上取常值，则它可以唯一地写成 $f = g\circ\varphi$ 的形式，其中 $g: E/A \to F$ 是连续的.

b) 假定 $E$ 是可度量化的与紧的；设 $d$ 是定义 $E$ 的拓扑的一个距离，而 $(W_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $E - A$ 的拓扑基. 令 $f_0(x) = d(x, A)$；对 $n \geqslant 1$，令 $f_n(x) = d(x, E - W_n)$；并且令 $f(x) = (f_n(x))_{n\geqslant 0} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$. 试证 $f(E)$ 是 $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ 的紧子空间，并且同胚于 $E/A$，从而证明 $E/A$ 是可度量化的与紧的.

c) 试证，若取 $E = \boldsymbol{R}$, $A = \boldsymbol{Z}$，则 a) 中定义的空间 $E/A$ 不是可度量化的(参阅 3.6 的问题).

## 6. 局部有限覆盖与单位分解

在拓扑空间 $E$ 中，$E$ 的子集的一个族 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ 称为**局部有限的**，如果对每个点 $x\in E$，存在 $x$ 在 $E$ 内的邻域 $U$，使得除去有限个指标 $\alpha\in I$ 外，有 $U\cap A_\alpha=\varnothing$。如果 $E$ 是可度量化的，则对 $E$ 的每个紧子集 $K$，存在 $K$ 的一个覆盖，它由有限个 $K$ 的点在 $E$ 内的邻域所组成，这些邻域中每一个只与有限个 $A_\alpha$ 相交；因而 $K$ 只与有限个 $A_\alpha$ 相交。

给定拓扑空间 $E$ 的两个覆盖 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$，$(B_\mu)_{\mu\in M}$，如果对每个 $\mu\in M$，存在 $\lambda\in L$，使得 $B_\mu\subset A_\lambda$，则称覆盖 $(B_\mu)$ **精于** $(A_\lambda)$.

**(12.6.1)** 设 $E$ 是可分、局部紧、可度量化空间，$\mathfrak{B}$ 是 $E$ 的开集的一个基，则对 $E$ 的每个开覆盖 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$，存在由属于 $\mathfrak{B}$ 的相对紧集组成的可数开覆盖 $(B_n)$，使得 $(B_n)$ 是局部有限的且精于 $(A_\lambda)$，因而每个 $B_n$ 只与有限个集 $B_m$ 相交.

已知 (3.18.3) 存在相对紧开集的递增序列 $(U_n)_{n\geqslant 0}$，使对每个 $n$，有 $\bar{U}_n\subset U_{n+1}$，并且 $E=\bigcup\limits_n U_n$. 令 $K_n=\bar{U}_n-U_{n-1}$，当 $n\geqslant 0$ 时，$K_n$ 是紧集(为方便起见，当 $n<0$ 时，令 $U_n=\varnothing$). 对每个 $n\geqslant 0$，开集 $U_{n+1}-\bar{U}_{n-2}$ 是 $K_n$ 的一个邻域；因而对每个 $x\in K_n$，存在 $x$ 的开邻域 $W_x^{(n)}\in\mathfrak{B}$，它包含在 $U_{n+1}-\bar{U}_{n-2}$ 内且包含在某个 $A_\lambda$ 内. 存在有限个点 $x_i\in K_n(1\leqslant i\leqslant p_n)$，使得相应的 $W_{x_i}^{(n)}$ 形成 $K_n$ 的覆盖. 设 $(B_n)$ 是集 $W_{x_i}^{(m)}$ (其中 $m\geqslant 0$，而对每个 $m$，$1\leqslant i\leqslant p_m$) 按任意次序排成的序列，显然 $(B_n)$ 是由相对紧集组成的精于 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的开覆盖. 于是问题归结为证明这个覆盖是局部有限的. 设 $z$ 是 $E$ 的点，$n$ 是使得 $z\in U_n$ 的最小整数. 由于 $z\notin U_{n-1}$，故存在 $z$ 的邻域 $T$，它包含在 $U_n$ 中且与 $\bar{U}_{n-2}$ 不相交；因此，$T$ 只能与满足 $n-2\leqslant m\leqslant n+1$ 的集 $W_{x_i}^{(m)}$ 相交，而这些集只有有限个.

**(12.6.2)** 设 $(A_n)$ 是可度量化空间 $E$ 的局部有限可数开覆盖，则

存在 $E$ 的开覆盖 $(B_n)$，使对一切 $n$，有 $\bar{B}_n \subset A_n$.

我们对 $n$ 归纳地定义族 $(B_n)$，使对一切 $n$，有 $\bar{B}_n \subset A_n$，且对每个 $n$，由 $B_k (k \leqslant n)$ 与 $A_j (j > n)$ 组成的族是 $E$ 的一个开覆盖. 若对 $n < m$ 已定义了 $B_n$，因而 $B_n (n < m)$ 与 $A_j (j \geqslant m)$ 形成 $E$ 的一个覆盖. 设开集 $C$ 是指标 $n < m$ 的 $B_n$ 与指标 $j \geqslant m+1$ 的 $A_j$ 的并，由上所述，有 $E - A_m \subset C$. 我们来证明，存在开集 $V$，使得 $E - A_m \subset V \subset \bar{V} \subset C$. 若 $E = A_m$，则可取 $V = \varnothing$；若 $C = E$，则可取 $V = E$；若 $E - A_m$ 与 $E - C$ 都非空，则存在 $E$ 到 $[0, 1]$ 的连续映射 $f$，它在 $E - A_m$ 上等于 0，在 $E - C$ 上等于 1 (4.5.2)；于是取 $V$ 为使得 $f(y) < \frac{1}{2}$ 的点 $y$ 所成的开集，则 $\bar{V}$ 包含在使得 $f(y) \leqslant \frac{1}{2}$ 的点 $y$ 所成的闭集内，因而包含在 $C$ 内. 令 $B_m = E - \bar{V}$，就有

$$\bar{B}_m \subset E - V \subset A_m, \quad B_m \cup C = E,$$

所以指标 $n \leqslant m$ 的 $B_n$ 满足所提的条件，从而归纳过程可以继续进行. 由于对每个 $x \in E$，存在 $n$，使对 $m > n$，有 $x \notin A_m$，所以必有某个 $k \leqslant n$，使得 $x \in B_k$，故 $(B_n)$ 是 $E$ 的覆盖.

如果覆盖 $(A_n)$ 是有限族，显然同样的推理仍然适用.

给定拓扑空间 $E$ 与 $E$ 到实向量空间 $F$ 或 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$，$f$ 的**支集**(记作 $\mathrm{Supp}(f)$) 定义为 $E$ 内满足下述条件的最小闭集 $S$：在 $E - S$ 内，$f(x) = 0$. 换言之，$\mathrm{Supp}(f)$ 是使得 $f(x) \neq 0$ 的点 $x \in E$ 的集在 $E$ 内的闭包. 也可以说，它是满足下述条件的点 $x \in E$ 的集：在 $x$ 的每个邻域内，存在点 $y$，使得 $f(y) \neq 0$.

设 $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 $E$ 到 $F$ (相应地，$E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$) 的映射的一个族，且这些 $f_\alpha$ 的支集形成局部有限族，则对每个 $x \in E$，和 $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x)$ 有定义，因为它只含有有限个非零项. 我们以 $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha$ 表示函数

$$x \to \sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x).$$

如果 $F$ 是 $\bar{\boldsymbol{R}}$，或是一个赋范空间(或更一般地，是一个拓扑向量空

间(12.13))，且每个 $f_\alpha$ 在 $E$ 内连续，则 $f=\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ 也连续．事实上，对每个 $x\in E$，存在 $x$ 的邻域 $V$，它只与有限个 $f_\alpha$ 的支集相交，因而存在 $I$ 的有限子集 $H$，使对一切 $y\in V$，有

$$f(y)=\sum_{\alpha\in H} f_\alpha(y).$$

$E$ 上的**单位连续分解**定义为 $E$ 到 $[0,1]$ 的连续映射的一个族 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$，满足下述条件：$f_\alpha(\alpha\in I)$ 的支集形成局部有限族，且对一切 $x\in E$，有 $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha(x)=1$．设 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $E$ 的开覆盖，具有相同的指标集 $I$．如果对一切 $\alpha\in I$ 有 $\mathrm{Supp}\,(f_\alpha)\subset A_\alpha$，则称单位分解 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ **从属于**覆盖 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$．

**(12.6.3)** 对于可度量化空间的每个至多可数的局部有限开覆盖 $(A_n)$，存在 $E$ 上的单位连续分解 $(f_n)$，使得 $(f_n)$ 从属于 $(A_n)$．

事实上，设 $(B_n)$ 是 $E$ 的一个开覆盖，使对每个 $n$，有 $\bar{B}_n\subset A_n$ (12.6.2)．显然覆盖 $(B_n)$ 是局部有限的．根据 (4.5.2)，对每个 $n$，存在 $E$ 到 $[0,1]$ 的连续映射 $h_n$，使在 $B_n$ 内有 $h_n(x)=1$，而在 $E-A_n$ 内 $h_n(x)=0$．令 $g_n=\left(h_n-\frac{1}{2}\right)^+$，则 $\mathrm{Supp}(g_n)$ 包含在使得 $h_n(x)\geqslant 1/4$ 的点 $x$ 所成的集内，因而包含在 $A_n$ 内．令 $g=\sum g_n$，由于 $(B_n)$ 是 $E$ 的覆盖，所以对一切 $x\in E$，有 $g(x)>0$，因而 $f_n=g_n/g$ 在 $E$ 内有定义且连续，这些 $f_n$ 就形成具有所述性质的单位分解．

**(12.6.4)** 设 $E$ 是可度量化空间，$K$ 是 $E$ 的紧子集，$(A_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ 是 $K$ 的一个有限覆盖，其中 $A_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 是 $E$ 内的开集，则存在 $E$ 到 $[0,1]$ 的 $m$ 个连续映射 $f_k$，使对 $1\leqslant k\leqslant m$，有 $\mathrm{Supp}(f_k)\subset A_k$；而对一切 $x\in E$，有 $\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\leqslant 1$；且在 $K$ 上有 $\sum_{k=1}^{m} f_k(x)=1$．

事实上，只须考虑从属于由 $A_0=E-K$ 与 $A_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 组成的 $E$ 的开覆盖的单位连续分解 $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$．

**(12.6.5)** 附注．设 $\mathscr{F}$ 是 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射集的子集，具有下列

性质:

1° 对于$E$的任何一对没有公共点的非空子空间$M$, $N$, 其中$M$是紧的而$N$是闭的, 存在属于$\mathscr{F}$的非负函数$f$, 使得$f$在$N$上等于0而在$M$上不小于1;

2° 若$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$是属于$\mathscr{F}$的函数的一个族, 而这些函数的支集形成一个局部有限族,则$\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$属于$\mathscr{F}$;

3° 若$f\in\mathscr{F}$且对一切$x\in E$有$f(x)>0$, 则对任何函数$g\in\mathscr{F}$, 有$g/f$属于$\mathscr{F}$.

此时, 当所有$A_n$为相对紧时, 如果还附加$f_n$属于$\mathscr{F}$的条件,则(12.6.3)与(12.6.4)的结论仍然成立,其证明不变.

## 7. 半连续函数

在这一节中,特别在第十三章中,我们考虑集$A$到完全实直线$\overline{\boldsymbol{R}}$的映射(这样的映射也称为**实值函数**). 我们还把这样的函数称为**有限实值函数**,如果它在每个点$a\in A$处的值是有限的, 即如果$f(A)\subset\boldsymbol{R}$. 若$f(A)$存在有限上界(相应地, 有限下界), 就称函数$f$为**上有界的**(相应地,**下有界的**); 若$f(A)$同时存在有限上界与有限下界,则称$f$为**有界的**,此时显然有$f(A)\subset\boldsymbol{R}$.

我们记得((4.1.8), (4.1.9)与(3.15.5)), 在$\overline{\boldsymbol{R}}\times\overline{\boldsymbol{R}}$内,除点$(+\infty, -\infty)$与$(-\infty, +\infty)$外,函数$(x, y)\to x+y$有定义且连续;除点$(+\infty, 0)$, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, $(0, -\infty)$外, 函数$(x,y)\to xy$有定义且连续;在$\overline{\boldsymbol{R}}$内,除点0外,函数$x\to 1/x$有定义且连续; 对定义在$]0,+\infty]$上的函数$x\to 1/x$, 在点0处给以函数值$+\infty$, 就可以连续延拓到$\overline{\boldsymbol{R}}$的区间$[0, +\infty]$上.

设$E$是拓扑空间, $f$是$E$到完全实直线$\overline{\boldsymbol{R}}$的映射. $f$称为在点$x_0\in E$处**下半连续**(相应地, **上半连续**), 如果对满足$\alpha<f(x_0)$(相应地, $\alpha>f(x_0)$)的任意$\alpha\in\overline{\boldsymbol{R}}$, 存在$x_0$在$E$内的邻域$V$, 使对一切$x\in V$, 有$\alpha<f(x)$(相应地, $\alpha>f(x)$). 如果$f$在$E$的每个点处下半(相应地,上半)连续,就称它在$E$内**下半**(相应地,**上**

半)连续.

这样，$f$ 在点 $x_0 \in E$ 处连续意味着 $f$ 在该点处同时是下半连续与上半连续的.

显然，如果 $f$ 在点 $x_0$ 处下半连续，则 $-f$ 在该点处上半连续，这就允许我们只限于考虑下半连续函数.

设 $\varphi$ 是拓扑空间 $F$ 到 $E$ 的映射，它在点 $y_0 \in F$ 处连续，而 $f$ 在点 $x_0 = \varphi(y_0)$ 处下半连续，则 $f \circ \varphi$ 在点 $y_0$ 处下半连续. 特别地，如果 $F$ 是 $E$ 的子空间，且 $f$ 在点 $y_0 \in F$ 处下半连续，则 $f|F$ 也在该点处下半连续.

**(12.7.1)** 例. $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 称为在点 $x_0 \in E$ 处取到**相对极小值**，如果存在点 $x_0$ 的邻域 $V$，使对一切 $x \in V$，有 $f(x) \geqslant f(x_0)$；此时 $f$ 在点 $x_0$ 处下半连续. 显然，当 $f(x_0) = -\infty$ 时，$f$ 在点 $x_0$ 处取到相对极小值.

定义 $f$ 如下：对每个 $x \in \boldsymbol{R}$，若 $x$ 是无理数，则令 $f(x) = 0$；若 $x$ 是有理数且等于不可约分数 $p/q$（其中 $q > 0$），则令 $f(x) = 1/q$. 对每个非负整数 $n$，使得 $q \leqslant n$ 的有理数 $p/q$ 所成的子空间在 $\boldsymbol{R}$ 内是闭的与离散的；因而对每个无理数 $x$，存在 $x$ 的邻域 $V$，使对一切 $y \in V$，有 $f(y) \leqslant 1/n$，这表明 $f$ 在点 $x$ 处连续. 另一方面，$f$ 在每个有理点处取到相对极大值，因而它在 $\boldsymbol{R}$ 内上半连续.

**(12.7.2)** 为使 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 在 $E$ 内下半连续，必须且只须对每个 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，使得 $f(x) > \alpha$ 的点 $x$ 的集 $f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ 在 $E$ 内是开的(或等价地，使得 $f(x) \leqslant \alpha$ 的点 $x$ 的集 $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ 在 $E$ 内是闭的).

事实上，$f$ 在 $E$ 内下半连续意味着对每个 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，集 $f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ 是它的每个点的邻域 (3.6.4).

对 $E$ 的任一子集 $A$，$A$ 的**特征函数**(常以 $\varphi_A$ 表示)定义为 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射，使对一切 $x \in A$，有 $\varphi_A(x) = 1$，而对一切 $x \in E - A$，有 $\varphi_A(x) = 0$. 特别地，我们有 $\varphi_E = 1$，$\varphi_\phi = 0$ 以及下面的关系：

(12.7.3) $$\varphi_{E-A} = 1 - \varphi_A;$$

$$\varphi_A\varphi_B = \varphi_{A\cap B},\quad \varphi_A + \varphi_B = \varphi_{A\cup B} + \varphi_{A\cap B},$$

$$\varphi_{A\cap \complement B} = \varphi_A - \varphi_A\varphi_B;\quad |\varphi_A - \varphi_B| = \varphi_{A\cap \complement B} + \varphi_{B\cap \complement A};$$

$$\inf_\lambda(\varphi_{A_\lambda}) = \varphi_{\bigcap_\lambda A_\lambda},\quad \sup_\lambda(\varphi_{A_\lambda}) = \varphi_{\bigcup_\lambda A_\lambda};$$

其中 $A$，$B$ 是 $E$ 的任意两个子集，而 $(A_\lambda)$ 是 $E$ 的子集的任意一个族.

**(12.7.4)** 为使拓扑空间 $E$ 的子集 $A$ 在 $E$ 内是开(相应地，闭)的，必须且只须 $\varphi_A$ 在 $E$ 内是下半连续(相应地，上半连续)的.

这由 (12.7.2) 立即得到.

**(12.7.5)** 设 $f$, $g$ 是拓扑空间 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的两个映射，它们在点 $x_0\in E$ 处下半连续，则函数 $\sup(f, g)$ 与 $\inf(f, g)$ 在点 $x_0$ 处也下半连续. 如果对一切 $x\in E$，$f(x)+g(x)$ 都有定义，则 $f+g$ 也在点 $x_0$ 处下半连续 (4.1.8)；如果 $f$ 与 $g$ 都非负且对一切 $x\in E$，积 $f(x)g(x)$ 有定义，则 $fg$ 也在点 $x_0$ 处下半连续 (4.1.9).

我们对 $f+g$ 的情形加以证明；其他情形的推理类似. 如果 $f(x_0)$ 或 $g(x_0)$ 等于 $-\infty$，命题显然成立；如若不然，则 $f(x_0)+g(x_0)>-\infty$. 满足 $\alpha<f(x_0)+g(x_0)$ 的任何数 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 可以写为 $\alpha=\beta+\gamma$ 的形式，其中 $\beta<f(x_0)$，$\gamma<g(x_0)$ (只须取这样的 $\gamma$，使得 $\alpha-f(x_0)<\gamma<g(x_0)$). 由假定，存在点 $x_0$ 的邻域 $V$，使对一切 $x\in V$，有 $\beta<f(x)$ 与 $\gamma<g(x)$. 由此推出，对一切 $x\in V$，有 $\alpha=\beta+\gamma<f(x)+g(x)$，这就得到所需的结论.

同样可以证明，若 $f$ 在点 $x_0$ 处下半连续，且在 $E$ 内非负，则 $1/f$ (当 $f(x)=0$ 时令 $1/f(x)=+\infty$) 在点 $x_0$ 处上半连续.

给定集 $E$ 与 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射的任意一个族 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$，$E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $x\to\sup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$ (相应地，$x\to\inf\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$) 称为族 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的**上包络**(相应地，**下包络**)，记作 $\sup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha$ (相应地，$\inf\limits_{\alpha\in I} f_\alpha$). 显见

$$\sup_{\alpha\in I}(-f_\alpha) = -\inf_{\alpha\in I}(f_\alpha).$$

**(12.7.6)** 设 $E$ 是拓扑空间，$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射的一个族.

若每个函数 $f_\alpha$ 在点 $x_0\in E$ 处下半连续，则这个族的上包络

$$f=\sup_{\alpha\in I}f_\alpha$$

在点 $x_0$ 处下半连续.

事实上，对任何 $\lambda<f(x_0)=\sup\limits_{\alpha\in I}f_\alpha(x_0)$，根据假设，总存在指标 $\beta\in I$，使得 $\lambda<f_\beta(x_0)$. 由于 $f_\beta$ 在点 $x_0$ 处下半连续，所以存在点 $x_0$ 的邻域 $V$，使对一切 $x\in V$，有 $\lambda<f_\beta(x)$；因而对一切 $x\in V$，有 $\lambda<f(x)$.

特别有

**(12.7.7)** $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的连续映射的任何一个族的上（相应地，下）包络是下（相应地，上）半连续的.

注意，由无穷多个下半连续函数组成的族的下包络不一定是下半连续的. 例如，对每个有理数 $r$，以 $f_r$ 表示 $\boldsymbol{R}-\{r\}$ 的特征函数，它是下半连续的（12.7.4）. 可数族 $(f_r)_{r\in\boldsymbol{Q}}$ 的下包络 $f$，对于任何有理数都等于 0，对于任何无理数都等于 1（换言之，$f$ 就是“Dirichlet 函数”$1-\varphi_{\boldsymbol{Q}}$；参阅(3.11.6)）. $f$ 在无理点处不是下半连续的.

下面给出(12.7.7)的部分逆命题：

**(12.7.8)** 设 $E$ 是可分和可度量化的局部紧空间，$f$ 是 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的下半连续映射. 假定存在(有限)实值函数 $g$，具有紧支集且在 $E$ 内连续，并有 $f\geqslant g$（这蕴涵在某个紧集的余集内有 $f(x)\geqslant 0$)，则存在具有紧支集且在 $E$ 内连续的（有限）实值函数的递增序列 $(f_n)$，使得 $f=\sup\limits_n f_n$.

需要时用 $f-g$（它处处有定义)代替 $f$，就可以限于考虑 $f$ 非负的情形. 另一方面，只须证明，存在具有紧支集的有限连续函数的可数族，它以 $f$ 为其上包络. 事实上，把这个族排成序列 $(g_n)$，取 $f_n=\sup(g_1,\cdots,g_n)$，则显然序列 $(f_n)$ 就是所提问题的解.

设 $(U_n)$ 是 $E$ 中相对紧开集的递增序列，且 $(U_n)$ 是 $E$ 的覆盖(3.18.3)；设 $g_n$ 是这样的函数，它在 $U_n$ 内等于 $f$，在 $E-U_n$ 内

等于 0. 显然 $f=\sup\limits_n g_n$，且 $g_n$ 下半连续. 若 $g_n$ 是具有紧支集的有限实值连续函数的可数集 $D_n$ 的上包络，则 $f$ 将是 $\bigcup\limits_n D_n$ 的上包络 (2.3.6)，因而又可以限于讨论 $f$ 具有紧支集的情形.

首先假定 $f=\varphi_A$，其中 $A$ 是一个相对紧开集. 令 $f_n(x)=n\cdot\inf(d(x, E-A), 1/n)$，这是在 $E$ 内具有紧支集的非负且连续的有限实值函数 (3.11.8)；此外，对于 $x\in E-A$ 或者对于 $d(x,E-A)\geqslant 1/n$，有 $f_n(x)=f(x)$. 由此即得 $f=\sup\limits_n f_n$ (3.8.9).

当 $f$ 具有紧支集且为非负时，可以限于考虑 $0\leqslant f\leqslant 1$ 的情形. 此时，只须取连续函数 $f_n$，使对一切 $x\in E$，有 $0\leqslant f_n(x)<1$. 事实上，在一般情形下，函数 $h=f/(1+f)$(它在 $f(x)=+\infty$ 的点 $x$ 处取值为 1) 还是下半连续的(参阅 (3.3.2)). 如果我们有 $h=\sup\limits_n(h_n)$，其中 $h_n$ 连续，且对一切 $x\in E$，有 $h_n(x)<1$，则将有 $f=\sup\limits_n(f_n)$，这里 $f_n=h_n/(1-h_n)$，而 $f_n$ 在 $E$ 内是有限的并且是连续的.

于是我们限于考虑 $0\leqslant f\leqslant 1$ 且 $f$ 具有紧支集的情形. 对每个整数 $n\geqslant 1$，考虑开集 $A_{kn}=f^{-1}(]k/n,+\infty])$ (12.7.2) 的递减有限序列(其中 $0\leqslant k\leqslant n-1$)，这些开集都是相对紧的. 函数 $g_n=(1/n)\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varphi_{A_{kn}}$ 下半连续 (12.7.5)，且对一切 $x\in E$ 有 $0\leqslant f(x)-g_n(x)\leqslant 1/n$；因而 $f$ 是序列 $(g_n)$ 的上包络. 另一方面，每个 $\varphi_{A_{kn}}$ 是连续函数序列 $(h_{kmn})_{m\geqslant 1}$ 的上包络，所以 $g_n$ 是序列 $(h_{mn})_{m\geqslant 1}$ 的上包络，其中 $h_{mn}=(1/n)\sum\limits_{k=1}^{n-1}h_{kmn}$ (2.3.11)，且 $h_{mn}$ 连续. 由于 $g_n\leqslant 1-(1/n)$，故 $h_{mn}$ 不会取值 1，而显然 $f$ 是“二重”族 $(h_{mn})(m\geqslant 1, n\geqslant 1)$ 的上包络 (2.3.6).

**(12.7.9)** 设 $E$ 是非空的紧可度量化空间，$f$ 是 $E$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的下半连续映射，则至少存在一个点 $a\in E$，使得 $f(a)=\inf\limits_{x\in E}f(x)$ (换言之，$f$ 取到它在 $E$ 上的下确界).

令 $\mu = \inf\limits_{x \in E} f(x)$. 存在 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的点的递减序列 $(\lambda_n)$，使得 $\lambda_n \in f(E)$ 且 $\inf\limits_n \lambda_n = \mu$. 因而集 $f^{-1}(\mu)$ 是所有非空闭集

$$F_n = f^{-1}([-\infty, \lambda_n])$$

(12.7.2) 的交，而这些闭集形成一个递减序列. 如果这些 $F_n$ 的交是空集，则所有开集 $U_n = E - F_n$ 就是 $E$ 的一个开覆盖. 由于 $E$ 是紧的且族 $(U_n)$ 是递增的，从而就会有某个 $U_n$ 等于 $E$，但这是不可能的.

特别地，若 $f$ 在 $E$ 上不取值 $-\infty$，则 $f$ 在 $E$ 上是下有界的.

对完全实直线 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中的每个序列 $(x_n)$，序列

$$y_n = \inf_{p \geqslant 0} (x_{n+p}) \ (\text{相应地，} z_n = \sup_{p \geqslant 0} (x_{n+p}))$$

是递增的(相应地，递减的)，因而有极限 (4.2.1). 令

**(12.7.10)**
$$\lim_{n \to \infty} \inf x_n = \lim_{n \to \infty} (\inf_{p \geqslant 0} x_{n+p}),$$
$$\lim_{n \to \infty} \sup x_n = \lim_{n \to \infty} (\sup_{p \geqslant 0} x_{n+p}).$$

显然 $\lim\limits_{n \to \infty} \sup x_n = -\lim\limits_{n \to \infty} \inf(-x_n)$，这使我们可以只研究下极限.

**(12.7.11)** 设 $(x_n)$ 是 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中的任一序列，则 $\lim\limits_{n \to \infty} \inf x_n$ (相应地，$\lim\limits_{n \to \infty} \sup x_n$) 是序列 $(x_n)$ 的最小(相应地，最大)触值.

事实上，令 $a = \lim\limits_{n \to \infty} \inf x_n$，先假定 $a$ 有限. 对 $c' < a < c$ 与每个整数 $m$，存在 $n > m$，使得 $c' < \inf\limits_{p \geqslant 0} x_{n+p} < c$，因而存在 $p \geqslant 0$，使得 $c' < x_{n+p} < c$，这表明 $a$ 是序列 $(x_n)$ 的触值 (3.13.11). 如果 $a = +\infty$ (相应地，$a = -\infty$)，则只要用 $a$ 代替 $c$ (相应地，$c'$)，推理相同. 反之，若 $b$ 是 $(x_n)$ 的触值，则它也是每个序列 $(x_{n+p})_{p \geqslant 0}$ 的触值，因而 $b \geqslant \inf\limits_{p \geqslant 0} (x_{n+p})$ (3.13.7)，故 $b \geqslant a$.

这个命题表明，序列 $(x_n)$ 存在极限等价于关系

$$\lim_{n \to \infty} \inf x_n = \lim_{n \to \infty} \sup x_n,$$

其共同的值就是 $(x_n)$ 的极限 (3.16.4).

另一方面，由定义推出，对 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中的点列 $(x_n)$ 的每个子序列 $(x_{n_k})$ 有

(12.7.12) $$\lim_{k\to\infty}\inf x_{n_k} \geqslant \lim_{n\to\infty}\inf x_n.$$

**(12.7.13)** 设 $E$ 是分离拓扑空间，$f$ 是 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射，它在点 $a\in E$ 处下半连续，则对于 $E$ 中使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的每个点列 $(x_n)$，有

(12.7.12.1) $$\lim_{n\to\infty}\inf f(x_n) \geqslant f(a).$$

事实上，对每个 $\alpha<f(a)$，存在 $a$ 在 $E$ 中的邻域 $V$，使对一切 $y\in V$，有 $f(y)\geqslant\alpha$；又存在 $n_0$，使对一切 $n\geqslant n_0$，有 $x_n\in V$。因而当 $n\geqslant n_0$ 时，$f(x_n)\geqslant\alpha$，命题得证。

## 问　　题

1）设 $E$ 是拓扑空间，对积空间 $E\times\bar{\boldsymbol{R}}$ 的每个闭子集 $A$，试证 $\mathrm{pr}_1 A$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $x\to\inf(A(x))$ 是下半连续的．反之，设 $f$：$E\to\bar{\boldsymbol{R}}$ 是下半连续函数，则 $E\times\bar{\boldsymbol{R}}$ 内使得 $f(x)\leqslant y$ 的 $(x,y)$ 所成的子集 $B$ 在 $E\times\bar{\boldsymbol{R}}$ 内是闭的．

2）a）设 $E$，$F$ 是两个可度量化的局部紧空间，$\pi$：$E\to F$ 是连续映射．$\pi$ 称为**正常映射**，如果对 $F$ 的每个紧子集 $K$，$\pi^{-1}(K)$ 总是紧的．试证对每个 $y\in\pi(E)$，集 $\pi^{-1}(y)$ 在 $E$ 内的每个邻域都包含形如 $\pi^{-1}(U)$ 的邻域，其中 $U$ 是 $y$ 在 $F$ 中的邻域．

b）设 $g$ 是 $E$ 上的下半连续实值函数；对每个 $y\in F$，设 $f(y)$ 是 $g$ 在集 $\pi^{-1}(y)$ 上的下确界（若 $\pi^{-1}(y)=\phi$，则令 $f(y)=+\infty$）．试证 $f$ 在 $F$ 内下半连续．

c）设 $g$ 是 $\boldsymbol{R}\times]0,+\infty[$ 上的连续函数 $(x_1,x_2)\to|x_1x_2-1|$；对每个 $x_1\in\boldsymbol{R}$，设 $f(x_1)=\inf\limits_{x_2>0}g(x_1,x_2)$．试证 $f$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上不是下半连续的．

3）对每个点 $t=(t_1,\cdots,t_n)\in\boldsymbol{C}^n$，令 $P_t(X)=X^n+t_1X^{n-1}+\cdots+t_n$．试证存在 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射 $t\to x(t)$ 与 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的下半连续映射 $t\to y(t)$，使对一切 $t\in\boldsymbol{C}^n$，有 $P_t(x(t)+iy(t))=0$（取 $x(t)$ 为 $P_t$ 的根的实部的最大值并利用(9.17.4)）．

4）设 $f$ 是度量空间 $E$ 到度量空间 $F$ 的任一映射；对每个 $x\in E$，设 $\Omega(x)$ 是 $f$ 在 $x$ 处关于 $E$ 的振幅(3.14)，它是非负实数或 $+\infty$．试证 $E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映

射 $x \to \Omega(x)$ 是上半连续的.

5) 设 $E$ 是度量空间, $f$ 是 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的下半连续映射. 设点 $a \in E$, 并设 $f$ 在点 $a$ 处的振幅 $\Omega(a)$ 是有限的. 试证对每个 $\varepsilon > 0$. 存在 $a$ 在 $E$ 中的邻域 $V$, 使得 $\inf\limits_{x \in V} \Omega(x) \leqslant \varepsilon$. (证明在相反的情形下, 就会存在任意邻近 $a$ 的点 $x$, 使得 $f(x)$ 取任意大的值.)

6) 设 $(a_n)_{n \geqslant 1}$ 是区间 $[0, 1[$ 内两两不同的点的一个无穷序列. 对每个正整数 $N$, 以 $b_1, \cdots, b_N$ 表示按递增次序排列集 $\{a_1, \cdots, a_N\}$ 所得的序列, 并称区间 $[0, b_1[$, $[b_1, b_2[$, $\cdots$, $[b_{N-1}, b_N[$, $[b_N, 1[$ 构成 $[0, 1[$ 的对应于序列 $(a_n)$ 的**第 $N$ 次部分**. 以 $u_N$ (相应地, $v_N$) 表示第 $N$ 次部分的各个区间的最小长度(相应地,最大长度). 令 $\lambda = \lim\limits_{N \to \infty} \inf N u_N$, $\mu = \lim\limits_{N \to \infty} \sup N v_N$.

a) 对每个 $\varepsilon > 0$, 设 $n_0$ 是这样的正整数: 对于 $N \geqslant n_0$, 有 $u_N \geqslant (\lambda - \varepsilon)/N$ 与 $v_N \leqslant (\mu + \varepsilon)/N$. 试证, 对于每个 $N \geqslant n_0$ 与每个满足 $0 \leqslant r \leqslant N$ 的整数 $r$, 存在第 $(N + r)$ 次部分的 $2r$ 个区间,其长度对应地大于或等于 $2r$ 个数

$$\frac{\lambda - \varepsilon}{N + 1}, \frac{\lambda - \varepsilon}{N + 1}, \frac{\lambda - \varepsilon}{N + 2}, \frac{\lambda - \varepsilon}{N + 2}, \cdots, \frac{\lambda - \varepsilon}{N + r}, \frac{\lambda - \varepsilon}{N + r},$$

而第 $(N + r)$ 次部分的其余区间是第 $N$ 次部分的区间(对 $r$ 用归纳法).

b) 试证,对于 $N \geqslant n_0$, 可以排列第 $N$ 次部分的区间, 使它们的长度对应地小于或等于 $N + 1$ 个数

$$\frac{\mu + \varepsilon}{N}, \frac{\mu + \varepsilon}{N + 1}, \cdots, \frac{\mu + \varepsilon}{2N}.$$

(对第 $N$ 次部分的每个区间 $I$, 以 $s(I)$ 表示使得 $I$ 还是第 $s(I)$ 次部分的一个区间的 $\leqslant 2N$ 的最大整数; 按 $s(I)$ 递增的次序排列这些区间 $I$.)

c) 由 a) 与 b) 推出

$$\lambda \leqslant \frac{1}{\log 4}, \quad \mu \geqslant \frac{1}{\log 2}$$

(利用当 $N$ 趋于 $+\infty$ 时 $\sum\limits_{r=1}^{N} 1/(N + r)$ 趋于 $\log 2$ 这一事实).

d) 取 $a_n = \log_2(2n - 1) - [\log_2(2n - 1)]$, 试证对于这个序列, 有 $\lambda = 1/\log 4$, $\mu = 1/\log 2$. (注意对 $N = 2^p$, 集 $\{a_1, \cdots, a_N\}$ 与集 $\{c_N, \cdots, c_{2N-1}\}$ 相同,这里 $c_n = \log_2 n - [\log_2 n]$.) (参阅 13.21 问题 15.)

7) 设 $E$ 是可度量化空间. 为使 $E$ 的非空闭子集 $S$ 是 $E$ 上的非负下半连续(相应地,连续)实值函数的支集,必须且只须 $S$ 是其内部的闭包.

8）设 $E$ 是可度量化空间，$f$ 是 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射．$E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的满足 $g \leqslant f$ 的一切连续映射 $g$ 的上包络称为 $f$ 的**下半连续正则化**．

a）对每个 $x \in E$，以 $\lim_{y \to x} \inf f(y)$ 表示对于一切趋于 $x$ 的序列 $(y_n)$，数 $\lim_{n \to \infty} \inf f(y_n)$ 所成的集的下确界．试证函数 $x \to \lim_{y \to x} \inf f(y)$ 是 $f$ 的下半连续正则化．

b）假定 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内的开集．对每个 $x \in E$，以 $\lim_{y \to x, y \geqslant x} \inf f(y)$ 表示对于一切满足 $y_n \geqslant x$ 且趋于 $x$ 的序列 $(y_n)$，数 $\lim_{n \to \infty} \inf f(y_n)$ 所成的集的下确界．试证使得

$$\lim_{y \to x, y \geqslant x} \inf f(y) > \lim_{y \to x} \inf f(y)$$

的点 $x \in E$ 的集至多是可数的．（用类似于 3.9 问题 3 的推理证明，对满足 $p > q$ 的每对有理数 $p, q$，使得

$$\lim_{y \to x, y \geqslant x} \inf f(y) > p > q > \lim_{y \to x} \inf f(y)$$

的点 $x \in E$ 的集至多是可数的.）

9）通项为 $a_n e^{-\lambda_n s}$ 的级数称为 **Dirichlet 级数**，其中 $\lambda_n$ 是递增且趋于 $+\infty$ 的实数序列，$(a_n)$ 是复数序列，$s$ 是复数．

a）试证，若此级数在 $s = s_0$ 处收敛，则它在由点 $s = s_0 + \rho e^{i\theta}$ 所成的角扇形内一致收敛，其中 $\rho \geqslant 0$，$-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$，$\alpha$ 是满足 $0 < \alpha < \pi/2$ 的任一实数．(归结为 $s_0 = 0$ 的情形．先证明，设 $\mathscr{R}s = \sigma$，则对满足 $a < b$ 的实数 $a, b$，有

$$|e^{-as} - e^{-bs}| \leqslant (|s|/\sigma)(e^{-a\sigma} - e^{-b\sigma});$$

为此可考虑积分 $\int_a^b e^{-xs} dx$．对每个非负整数 $m$ 与每个整数 $n \geqslant m$，令

$$S_{m,n} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n,$$

注意可以写

$$\sum_{k=m}^{n} a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=m}^{n-1} S_{m,k}(e^{-\lambda_k s} - e^{-\lambda_{k+1} s}) + S_{m,n} e^{-\lambda_n s}$$

(Abel 部分求和公式).）

b）由 a）推断，只有下面三种情形之一成立：或者级数 $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ 对任意的 $s$ 值都不收敛；或者它对任意的 $s$ 值都收敛；或者存在实数 $\sigma_0$，使得这个级数对 $\mathscr{R}s > \sigma_0$ 收敛，而对 $\mathscr{R}s < \sigma_0$ 不收敛．在第一种情形，令 $\sigma_0 = +\infty$；在第二种情形，令 $\sigma_0 = -\infty$；在所有这些情形，都称 $\sigma_0$ 为该级数的**收敛横坐**

标. 于是对 $\mathscr{R}s>\sigma_0$, 这个级数的和是 $s$ 的解析函数.

c) 试证,若 $\sigma_0\geqslant 0$, 则 $\sigma_0=\lim\limits_{n\to\infty}\sup(\log|S_{0,n}|)/\lambda_n$. (首先证明,如果以 $a_n e^{-\lambda_n s}=b_n$ ($s$ 是正实数)为通项的级数收敛, 写 $a_n=b_n e^{\lambda_n s}$, 则有 $|S_{0,n}|\leqslant Ke^{\lambda_n s}$, 其中 $K$ 是常数. 另一方面,用类似于 a) 中的推理证明,若

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\sup(\log|S_{0,n}|)/\lambda_n,$$

则级数 $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ 对 $s=\gamma+\delta$ 收敛,其中 $\delta$ 是正数.)

d) 设 $\sigma_1$ 是通项为 $|a_n|e^{-\lambda_n s}$ 的 Dirichlet 级数的收敛横坐标,则 $\sigma_1\geqslant\sigma_0$. 试证,若 $\sigma_0<+\infty$, 则

$$\sigma_1-\sigma_0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\log n}{\lambda_n}.$$

(注意对每个 $\varepsilon>0$, 当 $n$ 充分大时有 $|a_n|\leqslant e^{(\sigma_0+\varepsilon)\lambda_n}$.) 考虑 $\lambda_n=n$ 的情形 (参阅 9.1 问题 1). 试证对通项为 $[(-1)^n/\sqrt{n}]e^{-s\log\log n}$ 的级数,有

$$\sigma_0=-\infty,\quad \sigma_1=+\infty.$$

10) 设 $f$ 是定义在区间 $[0,+\infty[$ 上的实值函数,满足下列条件:

1° $f(s+t)\geqslant f(s)+f(t)$;

2° 存在 $M>0$, 使对一切 $t$ 都有 $|f(t)|\leqslant Mt$.

在这些条件下,试证极限

$$\alpha=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t},\quad \beta=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$$

存在且有限,并对一切 $t\geqslant 0$ 有 $\alpha t\leqslant f(t)\leqslant\beta t$.

(为证明 $\alpha$ 的存在性,只须证明,若令

$$\alpha=\lim_{t\to 0}\sup f(t)/t \text{ (问题 8)},$$

则对一切 $t>0$ 有 $\alpha\leqslant f(t)/t$. 取趋于 0 的递减序列 $(t_n)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)/t_n=\alpha$; 设 $k_n$ 是 $t/t_n$ 的整数部分,证明

$$f(t_n)\leqslant\frac{1}{k_n}f(t)+M\left(\frac{t}{k_n}-t_n\right).$$

令 $\beta=\lim\limits_{t\to+\infty}\inf f(t)/t$, 可以同样证明 $f(t)/t$ 当 $t\to+\infty$时存在极限.)

11) 设 $f$ 是 Banach 空间 $E$ 的开子集 $U$ 到 Banach 空间 $F$ 的连续映射. 对每个 $x\in U$, 令

$$D^+f(x)=\lim_{y\to x,\,y\neq x}\sup\|f(y)-f(x)\|/\|y-x\|,$$

$$D^-f(x) = \lim_{y \to x, y \neq x} \cdot \inf \|f(y) - f(x)\| / \|y - x\|,$$

则 $0 \leqslant D^-f(x) \leqslant D^+f(x) \leqslant +\infty$.

a) 若函数 $f$ 在点 $x \in U$ 处可导,则 $D^+f(x) = \|f'(x)\|$. 若 $f'(x)$ 不是 $E$ 到 $F$ 的一个子空间上的线性同胚,则 $D^-f(x) = 0$; 反之,有

$$D^-f(x) = \|(f'(x))^{-1}\|^{-1},$$

其中 $(f'(x))^{-1}$ 表示 $f'(x)$ 的逆同胚.

b) 假定以 $a$, $b$ 为端点的线段包含在 $U$ 内,且对这个线段内的每个点 $x$, 有 $D^+f(x) \leqslant M$, 试证 $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|$ (用类似于证明(8.5.1)时的推理).

c) 取 $U = E = R^2$, $F = R^3$, $f$ 是如下的函数: $f(0,0) = (0, 0, 0)$; 对 $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$,

$$f(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{\xi_1(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \frac{\xi_2(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \xi_2\right)$$

试证 $D^-f$ 在 $U$ 上的下确界大于 0, 但在 $U$ 内不存在点 $(0, 0)$ 的邻域, 使 $f$ 在其上是单射.

d) 在本题中, 以下恒假定存在两个有限数 $m>0$, $M>0$, 使在 $U$ 内有 $D^-f(x) \geqslant m$, $D^+f(x) \leqslant M$, 此外还假定对每个 $x \in U$, 存在 $x$ 在 $U$ 内的开邻域 $V$, 使得 $f|V$ 是 $V$ 到 $F$ 的一个开子集上的同胚;因而 $f(U)$ 在 $F$ 内是开的. 设 $a$ 是 $U$ 的点, 又对每条含有 $f(a)$ 的直线 $D \subset F$, 设 $I_D$ 是点 $f(a)$ 在 $D \cap f(U)$ (它是 $D$ 中的开集)内的连通分支, 则这些集 $I_D$ 的并 $S_a$ 是包含在 $f(U)$ 内且关于 $f(a)$ 为星形的最大开集. 对通过 $f(a)$ 的每条直线 $D \subset F$, 存在 $I_D$ 到 $U$ 的唯一的连续映射 $g_D$, 使得 $g_D(f(a)) = a$, 且对一切 $y \in I_D$, 有 $f(g_D(y)) = y$ (与 10.2 问题 6c) 的推理相同). 对 $I_D$ 的两个点 $y$, $y'$, 有

$$\|g_D(y') - g_D(y)\| \leqslant M^{-1}\|y' - y\|.$$

由此推断, 当 $y$ 趋于 $I_D$ 的端点(如果它存在)时, $g_D(y)$ 有属于 $\mathrm{Fr}(U)$ 的极限.

e) 设 $\gamma: J \to U$ 是 $U$ 内以 $a$ 为起点,以 $b$ 为终点的线路. 试证,若

$$f(\gamma(J)) \subset S_a,$$

则 $b = g_D(f(b))$, 其中 $D$ 是通过 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的直线, 且 $\|f(b) - f(a)\| \geqslant m\|b - a\|$.

f) 由 d) 与 e) 推断, 若 $U = E$, 则必有 $S_a = F$ 且 $f$ 是 $E$ 到 $F$ 上的同胚.

g) 令 $k = M/m$，设 $E_{k,a,b}$ 是满足 $\|x-a\|+\|x-b\|\leqslant k\|a-b\|$ 的点 $x\in E$ 的集，$a$, $b$ 是 $U$ 中使得 $E_{k,a,b}$ 包含在 $U$ 内的两个点. 设 $L$ 是以 $a$, $b$ 为端点的闭线段. 试证 $f(L)\subset S_a$，由此证明 $\|f(b)-f(a)\|\geqslant m\|b-a\|$. (用反证法，考虑使得 $y=f(a+t(b-a))\notin S_a$ 的最小的 $t\in[0,1]$. 设 $D$ 是通过 $f(a)$ 与 $y$ 的直线，则存在 $I_D$ 的端点 $u$，使得 $u$ 属于以 $f(a)$ 与 $y$ 为端点的开线段. 当 $t'<t$ 而趋于 $t$ 时，存在以 $f(a)$ 与 $y'=f(a+t'(b-a))$ 为端点的开线段内的点 $u'$，使得 $u'$ 趋于 $u$. 设 $D'$ 是通过 $f(a)$ 与 $y'$ 的直线，且 $x'=g_{D'}(u')$，利用 e) 证明 $x'\in E_{k,a,b}$. 令 $t'$ 趋于 $t$ 并利用 d) 得出矛盾.)

h) 假定 $E$ 与 $F$ 是两个 Hilbert 空间，$U$ 是球 $\|x\|<1$. 由 g) 推出，若 $B$ 是球

$$\|x\|<1/(1+\sqrt{k^2-1}),$$

则 $f$ 在 $B$ 上的限制是 $B$ 到 $f(B)$ 上的一个同胚；精确地说，对 $B$ 的任意两点 $x$, $x'$，有 $\|f(x')-f(x)\|\geqslant m\|x'-x\|$.

i) 作与 h) 相同的假定，还假定 $k<\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$. 试证此时 $f$ 在 $U$ 内是单射；精确地说，对 $U$ 内任意的 $x$, $x'$，有 $\|f(x')-f(x)\|\geqslant\mu\|x'-x\|$，其中

$$\mu=\frac{m^2-M\sqrt{M^2-m^2}}{m+\sqrt{M^2-m^2}}.$$

(注意对满足 $0<\theta<1$ 的 $\theta$，有

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant\|f(\theta x')-f(\theta x)\|-2M(1-\theta),$$

并注意可以选取 $\theta$，使得 $1-\theta\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}\|x'-x\|$；于是

$$\|f(\theta x')-f(\theta x)\|\geqslant m\theta\|x'-x\|,$$

进而还可选取 $\theta$，使得 $m\theta\|x'-x\|-2M(1-\theta)\geqslant\mu\|x'-x\|$.)

## 8. 拓 扑 群

给定群 $G$，其运算记为(例如)乘法. $G$ 上的一个拓扑称为与群结构**协调**，如果(赋予积拓扑的) $G\times G$ 到 $G$ 的映射 $(x,y)\to xy$ 与 $G$ 到自身的映射 $x\to x^{-1}$ 都是连续的. 赋予与群结构协调的拓扑的群称为**拓扑群**. 这个定义(以及下面的所有结果)可以直接应

用到运算为加法的群的情形.

拓扑群$G$到拓扑群$G'$上的**同构**定义为群$G$到群$G'$上的双方连续的同构;若$G'=G$,就把同构称为**自同构**.

在使用乘法运算的群$G$上,合成律$(x,y)\to yx$在集$G$上定义了一个群结构(如果$G$不是交换的,它就与$G$上原来所给的群结构不同). 以$G^0$表示这样定义的群,且把$G^0$称为群$G$的**反群**. 与$G$的群结构协调的拓扑同样与$G^0$的群结构协调,故在$G^0$上定义了一个拓扑群结构,而$x\to x^{-1}$是拓扑群$G$到拓扑群$G^0$上的同构.

**(12.8.1)** 例. 离散拓扑和平庸拓扑(12.1.1)与任何群结构协调. 赋范空间(特别是$\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$)的拓扑与它的加法群结构协调. 在有理数加法群$\mathbf{Q}$上,由$p$-adic 距离$d$(3.2.6)定义的拓扑与这个群的结构协调,因为根据$p$-adic 距离的定义与(3.2.6.4),有

$$d(x_0+y_0,x+y)\leqslant \max(d(x_0,x),d(y_0,y))$$

及关系

$$d(-x_0,-x)=d(x_0,x).$$

设$E$是(实或复)Banach 空间,$GL(E)$是$E$到自身的线性同胚的集,则$\mathscr{L}(E;E)$的拓扑在$GL(E)$上诱导的拓扑与$GL(E)$的群结构协调((5.7.5)与(8.3.2)).

特别是,$\mathbf{R}$(相应地,$\mathbf{C}$)上的拓扑在不等于0的实数(相应地,复数)的乘法群$\mathbf{R}^*$(相应地,$\mathbf{C}^*$)上诱导的拓扑使$\mathbf{R}^*$(相应地,$\mathbf{C}^*$)成为拓扑群.

设$G$是拓扑群(使用乘法运算),则映射$(x,y)\to xy^{-1}$与$(x,y)\to x^{-1}y$都是$G\times G$到$G$的连续映射(3.11.5). 对每个$a\in G$,左平移$x\to ax$与右平移$x\to xa$是$G$到自身的同胚,因为它们都是连续的双射((3.20.14)与(12.5)),而且逆映射$x\to a^{-1}x$与$x\to xa^{-1}$也连续. 因此,设$a,b$是$G$中任意两个元,则映射$x\to axb$(特别,内自同构$x\to axa^{-1}$)是$G$到自身的同胚(3.11.5). 由于映射$x\to x^{-1}$是双射且等于它的逆映射,因此它也是$G$到自身的同胚.

**(12.8.2)** 设$G$是拓扑群,则

(i) 对$G$的每个开(相应地，闭)子集$A$与每个$x\in G$，集$xA$，$Ax$与$A^{-1}$(即$y^{-1}$所成的集，这里$y\in A$)在$G$内是开(相应地，闭)的。

(ii) 对$G$的每个开子集$A$与$G$的每个子集$B$，集$AB$(即$yz$所成的集，这里$y\in A$，$z\in B$)与$BA$在$G$内都是开的。

由前面的附注立即得到论断(i)；而由于$AB=\bigcup_{z\in B}Az$，再考虑到$(O_1)$，即可由(i)推出(ii)。

**(12.8.2.1)** 注意，如果$A$，$B$在$G$内是闭的，$AB$却不一定是闭的(参阅(12.10.5))。例如，设$\theta$是无理数，考虑$\boldsymbol{R}$的闭子群$\boldsymbol{Z}$与$\theta\boldsymbol{Z}$，则子群$\boldsymbol{Z}+\theta\boldsymbol{Z}$在$\boldsymbol{R}$内不是闭的。为了证明这一点，只须注意这个子群是可数的，因而与$\boldsymbol{R}$不同(2.2.17)。于是就只须证明下述命题：

**(12.8.2.2)** $\boldsymbol{R}$的闭子群只能是$\boldsymbol{R}$或形如$\alpha\boldsymbol{Z}(\alpha\in\boldsymbol{R})$的子群。

事实上，如果证明了这一命题，则由于$\theta$是无理数，就不可能同时有$1=n\alpha$与$\theta=m\alpha$，其中$n$，$m$是整数；由此即得(12.8.2.1)中的论断。

为了证明(12.8.2.2)，我们首先指出，$\boldsymbol{R}$的任一子群$H$或者是离散的，或者是处处稠密的。事实上，若$H$不是离散的，则对每个$\varepsilon>0$，在$H\cap[-\varepsilon,\varepsilon]$内必存在$x\neq 0$。由于$x$的整数倍$nx$属于$H$，故$\boldsymbol{R}$内每个长度大于$\varepsilon$的区间都含有这样的点，因而$H$在$\boldsymbol{R}$内稠密。

为了完成(12.8.2.2)的证明，剩下只须证明：若$H$是离散的，则它一定是$a\boldsymbol{Z}$的形式。可以假定$H\neq\{0\}$。由于$H=-H$，故交$H\cap]0,+\infty[$非空。如果$b>0$属于$H$，则交$H\cap[0,b]$是离散紧集，因而是有限的(3.16.3)。设$a$是这个集内大于0的元中最小的元，并且对每个$x\in H$，设$m=[x/a]$是$x/a$的整数部分，则$x-ma\in H$且$0\leqslant x-ma<a$，由此推出$x-ma=0$，因而$H=a\boldsymbol{Z}$。

**(12.8.3)** 设$G$是拓扑群。

(i) 若$a$是$G$的一个点，则当$V$取遍$G$的幺元$e$的基本邻域

系时，集 $aV$（相应地，$V_a$）形成 $a$ 的基本邻域系.

(ii) 对 $e$ 的每个邻域 $U$，存在 $e$ 的邻域 $V$，使得 $VV^{-1}\subset U$.

(iii) 对 $e$ 的每个邻域 $U$ 与每个 $a\in G$，存在 $e$ 的邻域 $W$，使得 $aWa^{-1}\subset U$.

(iv) 为使 $G$ 是分离的，必须且只须 $\{e\}$ 在 $G$ 内是闭的.

论断 (i) 由平移是同胚得到. 考虑到 $G\times G$ 内开集的定义 (12.5)，即见 (ii) 表述了映射 $(x, y)\to xy^{-1}$ 在点 $(e,e)$ 处的连续性. 论断 (iii) 表述了 $x\to axa^{-1}$ 在点 $e$ 处的连续性. 最后，若 $G$ 是分离的，则显见 $\{e\}$ 是闭的 (12.3.4). 反之，若 $\{e\}$ 是闭的，设 $x, y$ 是 $G$ 的两个不同的点，则存在 $e$ 的邻域 $V$，使得 $e\notin x^{-1}yV$，即 $x\notin yV$. 若 $W$ 是 $e$ 的邻域，使得 $WW^{-1}\subset V$（由 (ii)，这是可能的），则 $xW\cap yW=\phi$，这是因为当 $w'$, $w''$ 在 $W$ 中时，由关系 $xw'=yw''$ 可推出

$$x=yw''w'^{-1}\in yWW^{-1}\subset yV.$$

从而 $G$ 是分离的.

$e$ 的邻域 $V$ 称为**对称邻域**，如果 $V^{-1}=V$. $e$ 的所有对称邻域组成 $e$ 的一个基本邻域系，因为对 $e$ 的每个邻域 $U$，$U^{-1}$ 也是 $e$ 的邻域 (12.8.2)，所以 $U\cap U^{-1}$ 是 $e$ 的对称邻域，且包含在 $U$ 内.

对每个正整数 $n$，就 $n$ 用归纳法对 $G$ 的子集 $V$ 定义集 $V^n=V\cdot V^{n-1}=V^{n-1}\cdot V$（不要与 $x^n$（其中 $x\in V$）所成的集混淆）. 若 $V$ 是 $e$ 的邻域，则对 $n>1$，$V^n\supset V$ 也是 $e$ 的邻域，并且由 (12.8.3, (ii)) 得到，对 $e$ 的每个邻域 $U$ 与每个大于 1 的整数 $n$，存在 $e$ 的对称邻域 $V$，使得 $V^n\subset U$.

**(12.8.4)** 为使拓扑群 $G$ 到拓扑群 $G'$ 的同态 $f$ 连续，必须且只须它在一个点处连续.

事实上，若 $f$ 在点 $a\in G$ 处连续，$V'$ 是 $f(a)$ 的邻域，则

$$f^{-1}(V')=V$$

是 $a$ 的邻域. 对每个 $x\in G$，有

$$f(xa^{-1}V)=f(x)(f(a))^{-1}f(V)\subset f(x)(f(a))^{-1}V'.$$

根据 (12.8.3(i))，$f$ 在点 $x$ 处连续.

显然，如果$H$是拓扑群$G$的子群，则$G$的拓扑在$H$上的诱导拓扑与$H$的群结构协调；当我们把$H$看作拓扑群时，若无相反声明，就意味着它的拓扑是由$G$的拓扑所诱导的.

**(12.8.5)** 拓扑群$G$的子群(相应地，正规子群)$H$的闭包$\overline{H}$是$G$的子群(相应地，正规子群)．若$G$是分离的，$H$是交换的，则$\overline{H}$是交换的.

因为$H\times H$在$G\times G$到$G$的连续映射$(x,y)\to xy^{-1}$下的象包含在$H$内(3.11.4)，所以$\overline{H}\times\overline{H}=\overline{H\times H}$在这个映射下的象包含在$\overline{H}$内，因而$\overline{H}$是子群．同样地，若$H$是正规子群，则$H$在映射$x\to axa^{-1}$($a$是$G$中任一元)下的象包含在$H$内，因而$\overline{H}$在这个映射下的象包含在$\overline{H}$内，所以$\overline{H}$是正规的． 最后，如果$G$是分离的且$H$是交换的，则由恒等式延拓原理((3.15.2)，12.3与12.5)，在$H\times H$上相等的连续函数$xy$与$yx$在$\overline{H}\times\overline{H}$上仍然相等.

**(12.8.6)** (i) 在拓扑群$G$内，闭子群$H$的**正规化子**(即满足

$$xHx^{-1}\subset H$$

的$x\in G$的集)$\mathscr{N}(H)$是闭子群.

(ii) 在分离拓扑群$G$内，$G$的任一子集$M$的**中心化子**(即可与$M$的所有元交换的$x\in G$构成的集)$\mathscr{Z}(M)$是闭子群． 特别地，$G$的中心是闭的.

对每个$z\in H$，使得$xzx^{-1}\in H$的$x\in G$的集是$H$在连续映射$x\to xzx^{-1}$下的逆象，因而是闭的(3.11.4)．$\mathscr{N}(H)$是所有这样的集的交，故也是闭的(3.8.2)．同样地，若$G$是分离的，则对每个$z\in M$，使得$xz=zx$的$x\in G$的集是闭的(12.3.5)，而$\mathscr{Z}(M)$是所有这样的集的交，故也是闭的.

**(12.8.7)** (i) 在拓扑群$G$内，局部闭子群是闭的；具有一个内点的子群是既开又闭的.

(ii) 在分离拓扑群内，离散子群是闭的.

对于(i)，设$H$是$G$的局部闭子群，于是$\overline{H}$是$G$的子群且$H$是$\overline{H}$的开子群(12.2.3)，因而问题归结为证明第二个论断． 注意到

若$H$在$G$内具有一个内点，则通过平移可知$H$的每个点都是它的内点，因而$H$是开的。于是左陪集$xH$在$G$内也是开的，故$\complement H$在$G$内是开的，从而$H$在$G$内是闭的。

至于(ii)，若$G$是分离的，$H$是$G$的离散子群，则存在$e$的对称开邻域$V$，使得$V\cap H=\{e\}$。若$x\in\overline{H}$，则$xV\cap H\neq\phi$。然而，若$y\in xV\cap H$，就有$x\in yV$；由于$G$是分离的，所以$\{y\}$在开集$yV$内是闭的。由于$y\in H$，故$yV\cap H=\{y\}$，于是必有$x=y$，因而$\overline{H}=H$。

**(12.8.8)** 设$G$是连通群，$V$是$e$的对称邻域，则$G$等于$n$取遍正整数时$V^n$的并$V^\infty$ 事实上，显然$V^\infty$是对称的，并且由于

$$V^mV^n=V^{m+n},$$

所以$V^\infty V^\infty\subset V^\infty$，因而$V^\infty$是$G$的子群。由于$e$是$V^\infty$的内点，故这个子群是既开又闭的(12.8.7)，因而等于$G$。

**(12.8.9)** 在拓扑群$G$内，幺元的连通分支(3.19) $K$是闭正规子群(称为$G$的**幺分支**)；对每个$x\in G$，$x$在$G$内的连通分支是$xK=Kx$。

事实上，若$a\in K$，则$a^{-1}K$是连通的且含有$e$，因而$K^{-1}K\subset K$，这表明$K$是$G$的子群。这个子群对拓扑群$G$的任一自同构是不变的，特别对任一内自同构是不变的，因而$K$是正规的；我们也已知道$K$在$G$内是闭的(3.19)。最后的论断由平移是$G$到自身的同胚得到。

**(12.8.10)** 设$G_1$，$G_2$是两个拓扑群，则积群$G=G_1\times G_2$上的积拓扑与它的群结构协调。事实上，使积空间$G\times G$典则等同于$(G_1\times G_2)\times(G_1\times G_2)$ (12.5)，鉴于(3.20.15)与(12.5)，映射

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\to(x_1y_1,x_2y_2)$$

是连续的；同理映射$(x_1,x_2)\to(x_1^{-1},x_2^{-1})$也是连续的。赋予积拓扑的$G_1\times G_2$称为拓扑群$G_1$与$G_2$的**积拓扑群**。

若$G$是交换拓扑群，则$(x,y)\to xy$是$G\times G$到$G$的连续同态。

## 问　　题

1) 设 $G$ 是群，$\mathfrak{B}$ 是由 $G$ 的子集组成的一个集，满足 12.3 节问题 3 的条件 $(V_{\mathrm{I}})$ 与 $(V_{\mathrm{II}})$，还满足下列条件：

$(GV_{\mathrm{I}})$ 对任何 $U \in \mathfrak{B}$，存在 $V \in \mathfrak{B}$，使得 $V \cdot V \subset U$.

$(GV_{\mathrm{II}})$ 对任何 $U \in \mathfrak{B}$，有 $U^{-1} \in \mathfrak{B}$.

$(GV_{\mathrm{III}})$ 对任何 $U \in \mathfrak{B}$ 与 $a \in G$，有 $aUa^{-1} \in \mathfrak{B}$.

试证在 $G$ 上存在唯一的与群 $G$ 的结构协调的拓扑，使得 $\mathfrak{B}$ 成为幺元 $e$ 的邻域集.

2) 与有限群 $G$ 的群结构协调的拓扑可这样得到：取所有包含 $G$ 的某个正规子群 $H$ 的集作为幺元的邻域系.

由此导出非分离拓扑群的例子，其中心不是闭的，并且中心的闭包是非交换子群.

3) 设 $G$ 是连通拓扑群，试证 $G$ 的每个完全不连通正规子群 $D$ 必包含在 $G$ 的中心之内.（对 $a \in D$，考虑 $G$ 到 $D$ 的映射 $x \to xax^{-1}$.）

4) 试证连通拓扑群内的换位子群是连通的（利用 (3.19.3) 与 (3.19.7)）.

5) 设 $G$ 是拓扑群，$H$ 与 $K$ 是 $G$ 的两个子群，满足 $H \supset K$，且 $K$ 包含 $H$ 的换位子群. 试证 $\bar{K}$ 包含 $\bar{H}$ 的换位子群. 由此推断，如果 $G$ 是分离的，则每个可解子群在 $G$ 内的闭包是可解的（对所考虑的子群的导出群序列的长度用归纳法）.

6) 设 $G$ 是拓扑群，$H$ 是 $G$ 的闭正规子群，并且包含 $G$ 的换位子群. 试证，若 $H$ 的幺分支 $K$ 是可解的，则 $G$ 的幺分支 $L$ 也是可解的（借助问题 4，证明 $K$ 包含 $L$ 的换位子群）.

7) 设 $\varphi: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{T}$ 是典则同态，$\theta$ 是无理数. 在拓扑空间 $G = \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{T}^2$ 上，以

$$(x_1, x_2, t_1, t_2)(x'_1, x'_2, t'_1, t'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, t_1 + t'_1 + \varphi(x_2 x'_1), t_2 + t'_2 + \varphi(\theta x_2 x'_1))$$

定义群的运算律，从而在 $G$ 上定义了一个局部紧群（甚至 Lie 群）的结构. 试证 $G$ 的换位子群在 $G$ 内不是闭的.

8) 设 $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是由拓扑群组成的任意族. 试证在积群 $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ 上，这些 $G_\alpha$ 的拓扑的积拓扑（12.5 节，问题 4）与 $G$ 的群结构协调；赋予这个拓扑的 $G$ 称为这些拓扑群 $G_\alpha$ 的积. 设 $H$ 是 $G$ 中满足下述条件的元 $x = (x_\alpha)$

构成的正规子群：除有限个指标外，$x_\alpha$ 都等于 $G_\alpha$ 的幺元．试证 $H$ 在 $G$ 内处处稠密．

## 9. 可度量化群

给定群 $G$，定义在 $G\times G$ 上的函数 $f$ 称为**左**（相应地，**右**）**不变的**，如果对 $G$ 内任意的 $x, y, z$，有 $f(xy, xz)=f(y, z)$（相应地，$f(yx, zx)=f(y, z)$）．当 $G$ 是交换群时，左不变与右不变概念完全相同，此时就称 $f$ 为**平移不变的**．称 $G$ 上的距离 $d$ 为**左**（相应地，**右**）**不变距离**是指左（相应地，右）平移关于 $d$ 是等距的．若 $f$ 是 $G\times G$ 上的左不变函数，则 $(x, y)\to f(x^{-1}, y^{-1})$ 是右不变函数，反之亦然．

例如，设 $E$ 是赋范空间，则 $E$ 上的距离 $\|x-y\|$ 是平移不变的．

**(12.9.1)** 为使拓扑群 $G$ 的拓扑是可度量化的（此时 $G$ 称为**可度量化群**），必须且只须存在幺元 $e$ 的可数基本邻域系，使得这个邻域系的交仅由一点 $e$ 所组成．此时 $G$ 的拓扑可由一个左不变或右不变距离来定义．

只须证明，如果在 $G$ 内存在 $e$ 的可数基本邻域系 $(U_n)$，使得 $\bigcap_n U_n=\{e\}$，则 $G$ 的拓扑可由一个左不变距离来定义．通过归纳法定义 $e$ 在 $G$ 内的对称邻域的序列 $(V_n)$，使得 $V_1\subset U_1$．且对每个 $n\geqslant 1$，有 $V_{n+1}^3\subset V_n\cap U_n$ (12.8.3)，而且 $(V_n)$ 还是 $e$ 的基本邻域系．在 $G\times G$ 上定义实值函数 $g$ 如下：$g(x, x)=0$；若 $x\neq y$，则或者 $x^{-1}y\notin V_1$，这时取 $g(x, y)=1$；或者存在最大整数 $k$，使得 $x^{-1}y\in V_k$（因为 $x^{-1}y\neq e$ 不可能属于一切 $V_n$），这时取 $g(x, y)=2^{-k}$．显然 $g(x, y)=g(y, x)$；对一切元偶 $(x, y)$ 有 $g(x, y)\geqslant 0$；并且对任意的 $x, y, z$ 有 $g(zx, zy)=g(x, y)$．现在令

$$d(x, y)=\inf\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}), \tag{12.9.1.1}$$

这里下确界是对一切满足 $z_0=x$ 与 $z_p=y$ 的有限序列 $(z_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ ($p$ 任意)所成的集取的. 我们证明 $d$ 是左不变距离，并且满足不等式

$$\text{(12.9.1.2)} \qquad \frac{1}{2}g(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant g(x,y).$$

由 $d$ 的定义立即得知 $d$ 是左不变的(因为 $g$ 是左不变的)，满足三角不等式，并且是对称的与正的. 此外，(12.9.1.2) 的第二个不等式是显然的，而这表明对一切 $x\in G$ 有 $d(x,x)=0$；换言之，$d$ 是 $G$ 上的伪距离 (12.4). 为证明 (12.9.1.2) 的第一个不等式，通过对 $p$ 用归纳法证明，对于由 $G$ 的 $p+1$ 个点构成的任何有限序列 $(z_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$，其中 $z_0=x$, $z_p=y$，有

$$\text{(12.9.1.3)} \qquad \sum_{i=0}^{p-1}g(z_i,z_{i+1})\geqslant\frac{1}{2}g(x,y).$$

对 $p=1$，这个不等式显然成立. 令 $\alpha=\sum\limits_{i=0}^{p-1}g(z_i,z_{i+1})$，若 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$，则由于 $g(x,y)\leqslant 1$，故不等式 (12.9.1.3) 成立. 若 $\alpha=0$，就有 $z_i=z_{i+1}$, $0\leqslant i\leqslant p-1$，于是 $x=y$，关系式(12.9.1.3) 当然成立. 因而我们假定 $0<\alpha<\frac{1}{2}$. 设 $h$ 是使得

$$\sum_{i<q}g(z_i,z_{i+1})\leqslant\frac{1}{2}\alpha$$

的最大指标 $q$，于是

$$\sum_{i<h}g(z_i,z_{i+1})\leqslant\frac{1}{2}\alpha,\qquad \sum_{i<h+1}g(z_i,z_{i+1})>\frac{1}{2}\alpha,$$

由此得到 $\sum\limits_{i>h}g(z_i,z_{i+1})\leqslant\frac{1}{2}\alpha$. 根据归纳法假设，有

$$g(x,z_h)\leqslant\alpha,\quad g(z_{h+1},y)\leqslant\alpha.$$

另一方面，显然有 $g(z_h,z_{h+1})\leqslant\alpha$. 设 $k$ 是使得 $2^{-k}\leqslant\alpha$ 的最小正整数，则有 $k\geqslant 2$，且根据 $g$ 的定义，有 $x^{-1}z_h\in V_k$, $z_h^{-1}z_{h+1}\in V_k$, $z_{h+1}^{-1}y\in V_k$，因之 $x^{-1}y\in V_k^3\subset V_{k-1}$，由此推出 $g(x,y)\leqslant 2^{1-k}\leqslant$

$2\alpha$.

不等式 (12.9.1.2) 首先表明 $d$ 是距离. 另一方面，当 $r>0$ 时，对每个满足 $2^{-k}<r$ 的指标 $k$，(关于距离 $d$ 的)球 $B'(e;r)$ 包含 $V_k$；反之，每个 $V_k$ 包含球 $B'(e;2^{-k-1})$. 基于 $d$ 在左平移下的不变性以及 (12.8.3(i)) 与 (12.2.1)，这证明 $d$ 定义了 $G$ 的拓扑.

注意，一般地说，不可能用既是左不变又是右不变的距离来定义 $G$ 的拓扑(问题 1 与 14.3 问题 11).

**(12.9.2)** 设 $G$ 是可度量化群，则为使 $G$ 中的点列 $(x_n)$ 是关于一个左不变距离的 Cauchy 序列，必须且只须对 $e$ 的每个邻域 $V$，存在整数 $n_0$，使对 $m\geqslant n_0$ 与 $n\geqslant n_0$，恒有 $x_n^{-1}x_m\in V$.

事实上，若 $d$ 是左不变距离，则

$$d(x_n,x_m)=d(e,x_n^{-1}x_m),$$

于是所述结论由 $d$ 定义 $G$ 的拓扑得到.

因此，我们看到，序列 $(x_n)$ 关于一个左不变距离是 Cauchy 序列的性质不依赖于距离的选择，而只依赖于 $G$ 的拓扑；因此可简称它为 $G$ 中的**左 Cauchy 序列**. 同样地，在 (12.9.2) 中用 $x_nx_m^{-1}$ 代替 $x_n^{-1}x_m$，便可定义 $G$ 中的**右 Cauchy 序列**. 可以作出不是右 Cauchy 序列的左 Cauchy 序列的例(问题 8)；然而如果 $(x_n)$ 是左 Cauchy 序列，则 $(x_n^{-1})$ 必是右 Cauchy 序列. 因为 $x\to x^{-1}$ 是连续的，由此推出，若在 $G$ 内每个左 Cauchy 序列收敛，则每个右 Cauchy 序列也收敛；此时 $G$ 称为**完备可度量化群**(因而它关于每个左不变或右不变距离都是完备的).

**(12.9.3)** 设 $G$ 与 $G'$ 是两个可度量化群，则 $G$ 到 $G'$ 的每个连续同态 $f$ 关于 $G$ 与 $G'$ 上的左(相应地，右)不变距离是一致连续的.

事实上，设 $d$, $d'$ 分别是 $G$ 与 $G'$ 上的两个这样的距离，$e$, $e'$ 分别是 $G$ 与 $G'$ 的幺元. 由假设，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得关系 $d(e,z)\leqslant\delta$ 蕴涵 $d'(e',f(z))\leqslant\varepsilon$. 由此得到，若

$$d(x,y)=d(e,x^{-1}y)\leqslant\delta,$$

则 $d'(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$；这是因为，由 $f$ 是同态得到

$$d'(f(x),f(y))=d'(e',(f(x))^{-1}f(y))=d'(e',f(x^{-1}y)).$$

**(12.9.4)** 设 $G_1$, $G_2$ 是两个可度量化群，此外还假定 $G_2$ 是完备的. 设 $H_1$（相应地，$H_2$）是 $G_1$（相应地，$G_2$）的处处稠密子群，则 $H_1$ 到 $H_2$ 的每个连续同态 $u$ 可唯一地延拓为 $G_1$ 到 $G_2$ 的连续同态 $\bar{u}$; 如果进而还设 $G_1$ 是完备的，且 $u$ 是 $H_1$ 到 $H_2$ 上的（拓扑群）同构，则 $\bar{u}$ 是 $G_1$ 到 $G_2$ 上的(拓扑群)同构.

赋予 $G_1$ 与 $G_2$ 左不变距离，由 (12.9.3) 与 (3.15.6) 即得连续延拓 $\bar{u}$ 的存在性. 把恒等式延拓原理应用于 $G_1 \times G_2$ 上的两个函数 $(x,y) \to \bar{u}(xy)$ 与 $(x,y) \to \bar{u}(x)\bar{u}(y)$ (考虑到 (3.20.3))，即知 $\bar{u}$ 是群同态. 最后，设 $G_1$ 是完备的，且设 $v$ 是 $u$ 的逆映射，它是 $H_2$ 到 $H_1$ 上的同构. $v$ 可以延拓为 $G_2$ 到 $G_1$ 的连续同态 $\bar{v}$. 由于 $\bar{v}\circ\bar{u}$ 和 $\bar{u}\circ\bar{v}$ 分别与 $H_1$ 和 $H_2$ 上的恒等映射相同，所以根据恒等式延拓原理与 (3.11.5)，它们分别是 $G_1$ 与 $G_2$ 上的恒等映射，由此即得第二个论断.

应当注意，如果只假定 $u$ 是单射（相应地，满射），则 $\bar{u}$ 不一定是单射(相应地，满射)(问题 9).

**(12.9.5)** 若在可度量化群 $G$ 内存在 $e$ 的一个（关于左不变或右不变距离的）完备邻域 $V$，则 $G$ 是完备的；特别地，局部紧可度量化群是完备的.

事实上，设 $d$ 是 $G$ 上的左不变距离，$(x_n)$ 是 $G$ 中的左 Cauchy 序列. 设 $\varepsilon > 0$ 使得闭球 $B'(e;\varepsilon)$ 包含在 $V$ 内. 由假定，存在 $n_0$，使对 $m \geqslant n_0$ 与 $m \geqslant n_0$，有 $d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$，因而序列 $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ 包含在闭球 $B'(x_{n_0};\varepsilon)$ 内. 由于 $B'(x_{n_0};\varepsilon)$ 是由 $V$ 内的闭集(3.14.5) $B'(e;\varepsilon)$ 通过左平移得到的，所以它是完备子空间，因而序列 $(x_n)_{n \geqslant 1}$ 在 $G$ 内收敛. 最后的论断由 (3.16.1) 得到.

**(12.9.6)** 在分离拓扑群 $G$ 内，任何局部紧可度量化子群 $H$ 都是闭的.

事实上，设 $x \in G$ 是 $\bar{H}$ 的点，$V$ 是 $e$ 在 $G$ 内的邻域，使得 $V \cap H$ 是紧的；又设 $W$ 是 $e$ 在 $G$ 内的对称邻域，使得 $W^2 \subset V$. 这时 $xW \cap H$ 是非空的且在 $H$ 内是相对紧的，因为如果 $y_0$ 是 $xW \cap H$ 的点，则对每个 $y \in xW \cap H$，有 $y_0^{-1}y \in W^2 \cap H \subset V \cap H$，从而

$$y \in y_0(V \cap H),$$

而集 $y_0(V \cap H)$ 是紧的. 由 (12.3.6) 得到, $xW \cap H$ 在 $G$ 内的闭包包含在 $H$ 内, 因而 $x \in H$.

**(12.9.7)** 设 $G$ 是分离的交换拓扑群, 采用加法运算, 则 5.2 节中对于级数所叙述的只涉及 $G$ 的拓扑的所有命题, 毫无修改, 仍然成立. 如果 $G$ 是可度量化的, 则以 $d(0, x)$ 代替范数 $\|x\|$, Cauchy 准则 (5.2.1) 也仍然成立, 这里 $d$ 是 $G$ 上的不变距离.

## 问　　题

1) 设 $G = GL(2, \boldsymbol{R})$ 是元素为实数的二阶可逆方阵的乘法群. 对每个正整数 $n$, 设 $V_n$ 是满足下述条件的方阵 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$ 的集:

$$|x - 1| \leqslant 1/n, \quad |y| \leqslant 1/n, \quad |z| \leqslant 1/n, \quad |t - 1| \leqslant 1/n.$$

试证这些 $V_n$ 所成的族是 $G$ 的幺元 $I$ 关于某个拓扑 $\mathcal{T}$ 的基本邻域系, 而这个拓扑与 $G$ 的群结构协调(参阅 12.8 问题 1). $G$ 关于 $\mathcal{T}$ 是局部紧的, 但 $\mathcal{T}$ 不可能由既是左不变又是右不变的距离来定义(参阅 14.3 问题 11). (利用下面的事实: 若可度量化群的拓扑能由既是左不变又是右不变的距离来定义, 则对 $G$ 的幺元 $e$ 的每个邻域 $V$, 存在 $e$ 的邻域 $W \subset V$, 使对一切 $x \in G$, 有 $xWx^{-1} \subset V$.)

2) 设 $S$ 是可度量化群 $G$ 的紧子集, 使当 $x, y$ 属于 $S$ 时, 必有 $xy \in S$. 试证, 对每个 $x \in S$ 有 $xS = S$ (考虑 $S$ 中的序列 $(x^n)_{n \geqslant 1}$ 的一个触值 $y$, 试证 $yS$ 是 $x^nS (n \geqslant 1)$ 的交, 从而推出 $yxS = xS$). 由此推断 $S$ 是 $G$ 的子群.

3) 设 $G$ 是完全不连通的局部紧可度量化群.

a) 试证 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域包含一个在 $G$ 内既开又紧的子群. ($e$ 的每个邻域 $V$ 包含 $e$ 的一个既开又闭的邻域 $U$ (13.9 问题 9). 设 $B = \complement U$. 试证在 $G$ 内存在 $e$ 的对称开邻域 $W$, 使得 $W \subset U$, 且 $UW \cap BW = \varnothing$; 由此推断 $W$ 所生成的子群包含在 $U$ 内.)

b) 假定 $G$ 的拓扑可由既是左不变又是右不变的距离来定义, 试证 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域包含 $G$ 的一个正规子群, 这个正规子群在 $G$ 内既是开的又是紧的 (注意 $e$ 的每个邻域 $V$ 包含一个对称开邻域 $W$, 使对一切 $x \in G$, 有 $xWx^{-1} \subset V$).

4) 设 $p$ 是素数, 考虑赋予离散拓扑的有限群 $\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z} (n \geqslant 1)$ 的族, 并考

虑它们的积群 $G$（12.8 问题 8），$G$ 是紧的与完全不连通的． 对每个 $n$，设 $\varphi_n: \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/p^{n-1}\boldsymbol{Z}$ 是典则同态．

a）试证对一切 $n$ 满足 $\varphi_n(z_n) = z_{n-1}$ 的 $z = (z_n) \in G$ 的集是 $G$ 的闭子群（因而是紧子群），把它记作 $\boldsymbol{Z}_p$． 设 $\psi_n$ 是射影 $\mathrm{pr}_n: G \to \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$ 在 $\boldsymbol{Z}_p$ 上的限制，则 $\psi_n$ 是满射同态．

b）对每个 $z = (z_n) \in \boldsymbol{Z}_p$，如果 $z = 0$，则令 $|z|_p = 0$；如果 $m$ 是使 $z_m \neq 0$ 的最小整数，则令 $|z|_p = p^{1-m}$． 试证 $|z - z'|_p$ 是在平移下不变的距离，并且它定义了 $\boldsymbol{Z}_p$ 的拓扑．

c）对每个 $n \geqslant 1$，设 $f_n$: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$ 是典则同态． 试证 $\boldsymbol{Z}$ 到 $\boldsymbol{Z}_p$ 的同态 $f: z \to (f_n(z))_{n\geq 1}$ 是单射并且 $\boldsymbol{Z}$ 在 $f$ 下的象是 $\boldsymbol{Z}_p$ 的处处稠密子群．此外，如果令 $d(z, z') = |f(z) - f(z')|_p$，试证 $d$ 就是 $\boldsymbol{Z}$ 上的 $p$-adic 距离（3.2.6）． $\boldsymbol{Z}_p$ 的元称为 **$p$-adic 整数**．

5）设 $p$ 是素数．考虑这样的紧群 $G$，它是每个 $G_n$ 都等于群 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的无穷序列 $(G_n)_{n\geq 0}$ 的积． 对每个 $n$，设 $\varphi_n$ 是 $G_n$ 到 $G_{n-1}$ 的同态 $x \to px$． 以 $\boldsymbol{T}_p$ 表示 $G$ 中由 $x = (x_n)$ 构成的紧子群，其中 $x$ 满足：对每个 $n$，有 $\varphi_n(x_n) = x_{n-1}$；$T_p$ 称为 **$p$-adic 螺线**．

a）对每个 $n$，设 $f_n$: $\boldsymbol{T}_p \to G_n = \boldsymbol{T}$ 是 $\mathrm{pr}_n$ 在 $T_p$ 上的限制，试证 $f_n$ 是满射同态且它的核同构于群 $\boldsymbol{Z}_p$（问题 4）．

b）设 $\varphi: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{T}$ 是典则同态． 对每个 $x \in \boldsymbol{R}$，试证点 $\theta(x) = (\varphi(x/p^n))_{n\geq 0}$ 属于 $\boldsymbol{T}_p$；并证明 $\theta$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{T}_p$ 的单射连续同态，并且 $\theta(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{T}_p$ 的处处稠密子群；由此推断 $\boldsymbol{T}_p$ 是连通的．

c）设 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内以 0 为中心且长度小于 1 的开区间． 试证 $\boldsymbol{T}_p$ 内的子空间 $f_0^{-1}(\varphi(I))$ 同胚于积 $I \times \boldsymbol{Z}_p$． 由此推断群 $\boldsymbol{T}_p$ 不是局部连通的．

d）试证 $\boldsymbol{T}_p$ 的异于 $\boldsymbol{T}_p$ 与 $\{0\}$ 的闭子群 $H$ 是完全不连通的且同构于形如 $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ 或 $(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\boldsymbol{Z}_p$ 的群，其中 $n$ 是与 $p$ 互素的整数（考虑群 $f_n(H)$）．

e）试证 $\boldsymbol{T}_p$ 是**不可分解的**连通紧空间，就是说，不存在 $\boldsymbol{T}_p$ 的覆盖，它由异于 $\boldsymbol{T}_p$ 的两个连通紧集 $P$，$Q$ 所构成．（注意存在整数 $n$，使得 $f_n(P) \neq G_n$ 与 $f_n(Q) \neq G_n$， 检验集 $f_{n+1}(P)$ 与 $f_{n+1}(Q)$ 以得出矛盾．）

6）拓扑群 $G$ 称为**没有任意小子群的群**，如果存在 $e$ 的邻域 $V$，使得 $\{e\}$ 是 $G$ 的唯一的包含在 $V$ 内的子群．

设 $G$ 是没有任意小子群的局部紧可度量化群．

a）试证存在 $e$ 的紧邻域 $V$，使对 $V$ 的两个点 $x$，$y$，由关系 $x^2 = y^2$ 可得出 $x = y$．（可以假定 $G$ 是非交换的． 用反证法，如果存在 $G$ 中的两个点列

$(x_n)$, $(y_n)$, 它们都趋于 $e$, 并且 $x_n^2 = y_n^2$ 而 $x_n y_n^{-1} = a_n \neq e$. 设 $U$ 是 $e$ 的对称紧邻域, 它不包含 $G$ 的任何异于 $\{e\}$ 的子群, 且设 $p_n$ 是使得 $a_n^{p_n+1} \notin U$ 的最小正整数. 需要时通过选取子序列, 可以假定 $a = \lim_{n\to\infty} a_n^{p_n}$ 存在, $a$ 不等于 $e$ 且属于 $U$. 证明 $a^{-1} = a$, 从而得出矛盾.)

b) 设 $U$ 是 $e$ 的对称紧邻域, 它不包含任何异于 $\{e\}$ 的子群, $V$ 是 $e$ 的邻域. 试证存在数 $c(V) > 0$, 使对满足 $p \leqslant c(V)q$ 的每对正整数 $p$, $q$ 与每个使得 $x$, $x^2$, $\cdots$, $x^q$ 都属于 $U$ 的元素 $x \in G$, 有 $x^p \in V$. (用反证法, 假定存在两个整数序列 $(p_n)$, $(q_n)$, 使得 $\lim_{n\to\infty}(p_n/q_n) = 0$, 并且对每个 $n$, 存在元素 $a_n \in G$, 使对 $1 \leqslant h \leqslant q_n$, $a_n^h$ 都属于 $U$, 但 $a_n^{p_n} \notin V$. 此外还可假定序列 $(a_n^{p_n})$ 有属于 $U$ 的极限 $a \neq e$. 证明此时对一切正整数 $m$ 有 $a^m \in U$, 由此导出矛盾.)

7) 设 $G$ 是没有任意小子群的局部紧可度量化群, $V$ 是 $e$ 的对称紧邻域, 它不包含 $G$ 的任何异于 $\{e\}$ 的子群, 且对 $V$ 的两个点 $x$, $y$, 由关系 $x^2 = y^2$ 可得出 $x = y$ (问题 6a)).

a) 试证, 对 $V$ 中每个趋于 $e$ 的点列 $(a_n)$, 存在 $(a_n)$ 的子序列 $(b_n)$ 与正整数序列 $(k_n)$, 使得序列 $(b_n^{k_n})$ 收敛于一个不等于 $e$ 的点(考虑使得 $a_n^{k+1} \notin V$ 的最小整数 $k$).

b) 试证, 若 $r$, $s$ 是两个实数, 使得序列 $(b_n^{[rk_n]})$ 与 $(b_n^{[sk_n]})$ 在 $G$ 内分别收敛于 $x$ 与 $y$, 则序列 $(b_n^{[(r+s)k_n]})$ 收敛于 $xy$ (提醒一下, $[t]$ 是实数 $t$ 的整数部分).

c) 利用 a), b) 与平方根的唯一性, 试证对每个满足 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 的二进数 $r$, 序列 $(b_n^{[rk_n]})$ 在 $G$ 内有极限.

d) 设 $W \subset V$ 是 $e$ 在 $G$ 内的一个邻域, 试证对每个满足 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 的实数 $r$, 存在二进数 $s$, 使对一切 $n$, 有 $b_n^{[(r+s)k_n]} \in W$ (利用问题 6b)). 由此推断, 对每个 $r \in [0, 1]$, 序列 $(b_n^{[rk_n]})$ 具有极限 $X(r)$.

e) 对 $-1 \leqslant r \leqslant 0$, 令 $X(r) = (X(-r))^{-1}$. 试证当 $r$, $s$ 与 $r+s$ 都在 $[-1, 1]$ 内时, 有 $X(r+s) = X(r)X(s)$, 并且 $[-1, 1]$ 到 $G$ 的映射 $r \to X(r)$ 是连续的. 由此推断, 可以把这个映射延拓为 $\boldsymbol{R}$ 到 $G$ 的非常值连续同态.

8) 设 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的紧区间 $[0, 1]$, $G$ 是 $I$ 到自身的同胚的群, $G$ 包含在 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ (7.2.1) 内. 试证 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 的拓扑在 $G$ 上的诱导(可度量化)拓扑与 $G$ 的群结构协调, 且 $G$ 中的右 Cauchy 序列与(由 $G$ 的元素组成的)关于 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 上的范数 (7.1) 的 Cauchy 序列是等同的. 给出 $G$ 中的右 Cauchy 序列而不是左 Cauchy 序列的例.

9) a) 设 $G'$ 是完备可度量化群，$G_0$ 是 $G'$ 的异于 $G'$ 的处处稠密子群，$G$ 是赋予 $G_0$ 离散拓扑所得的拓扑群，则恒等映射 $G\to G_0$ 是双射连续同态，但它连续延拓为 $G\to G'$ 的同态(12.9.4)却不是满射.

b) 设 $G$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的处处稠密子群 $\boldsymbol{Q}^2$，$\theta$ 是无理数，$u$ 是 $G$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续同态 $(x,y)\to x+\theta y$，并设 $G'=u(G)$. 把 $u$ 看作 $G$ 到 $G'$ 的同态时，它是双射，但它连续延拓为 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的同态却不是单射.

c) 由 a) 与 b) 给出这样的例子：$G_1$, $G_2$ 是两个完备群，$u$ 是 $G_1$ 的处处稠密子群 $H_1$ 到 $G_2$ 的处处稠密子群 $H_2$ 上的双射连续同态，但 $u$ 连续延拓为 $G_1$ 到 $G_2$ 的同态却既不是单射也不是满射.

10) 设 $f$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的子群 $H$ 到可度量化局部紧群 $G$ 的连续同态，这里 $H$ 不是仅由 0 组成. 试证若 $f$ 不是 $H$ 到 $G$ 的子群 $f(H)$ 上的同构，则 $f(H)$ 在 $G$ 内是相对紧的. (归结为 $H$ 在 $R$ 内是闭的且 $f(H)$ 在 $G$ 内是处处稠密的情形. 首先证明，对幺元 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域 $W$，$f^{-1}(W)$ 都无界，由此推断 $f(H\cap \boldsymbol{R}_+)$ 在 $G$ 内处处稠密. 设 $V$ 是 $e$ 在 $G$ 内的对称紧邻域，试证在 $H$ 内存在有限个正数 $t_i$，使得有限个邻域 $f(t_i)V$ 形成 $V$ 的覆盖. 对每个 $x\in G$，设 $A_x$ 是使得 $f(t)\in xV$ 的 $t\in H$ 的集，试证若 $t\in A_x$，则存在 $t_i$，使得 $t-t_i\in A_x$. 由此推断，若 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内原点 0 的含有一切 $t_i$ 的最大紧区间，则 $I\cap A_x$ 非空；从而推出 $G\subset f(I)\cdot V$ 是紧的.)

11) 设 $G$ 是交换可度量化拓扑群，$d$ 是定义 $G$ 的拓扑的不变距离，$h$ 是 $\mathscr{F}(G)$ 上对应 $d$ 的 Hausdorff 距离(3.16 问题 3). 试证，若 $M$, $N$, $P$, $Q$ 是 $G$ 内的四个有界闭子集，则 $h(MP,NQ)\leqslant h(M,N)+h(P,Q)$.

## 10. 带算子空间与轨道空间

设 $G$ 是一个群，$E$ 是一个集. $G$ 在 $E$ 上的**作用**(或**左作用**，或**运算**)是 $G\times E$ 到 $E$ 的一个映射 $(s,x)\to s\cdot x$，满足下列条件：

1° 设 $e$ 是 $G$ 的幺元，则对一切 $x\in E$，有 $e\cdot x=x$.

2° 对 $G$ 的任一对元 $s$, $t$ 与一切 $x\in E$，有 $s\cdot(t\cdot x)=(st)\cdot x$.

由这些性质推出，对一切 $s\in G$ 与一切 $x\in E$，都有 $s^{-1}\cdot(s\cdot x)=x$；因而对每个 $s\in G$，$x\to s\cdot x$ 是 $E$ 到自身的一个双射，而

$x \to s^{-1} \cdot x$ 是它的逆双射.

对每个 $x \in E$，当 $s$ 取遍 $G$ 时 $s \cdot x$ 的集 $G \cdot x$，称为 $x$（关于给定的 $G$ 在 $E$ 上的作用）的**轨道**；使得 $s \cdot x = x$ 的 $s \in G$ 的集 $S_x$ 是 $G$ 的子群，称为 $x$ 的**稳定化子**. 关系 $s \cdot x = t \cdot x$ 等价于 $t^{-1}s \in S_x$. $G$ 到 $G \cdot x$ 上的映射 $s \to s \cdot x$ 可以按照

(12.10.1) $$G \xrightarrow{p} G/S_x \xrightarrow{\varphi} G \cdot x$$

来分解，其中 $G/S_x$ 是由子群 $S_x$ 所作的左陪集 $sS_x$ 的集，$p$ 是典则映射 $s \to sS_x$，$\varphi$ 是双射 $sS_x \to s \cdot x$. 如果当 $x$ 取遍 $E$ 时稳定化子 $S_x$ 的交仅由 $e$ 组成，则称 $G$ **忠实作用**于 $E$ 上.

如果 $E$ 的每个点的稳定化子仅由 $e$ 组成，换言之，如果对每个 $x \in E$，关系 $s \cdot x = t \cdot x$ 蕴涵 $s = t$，则称 $G$ **自由作用**于 $E$ 上.

关系"$y$ 属于 $x$ 的轨道"是 $E$ 上的一个等价关系，它的等价类就是 $E$ 的元的轨道；我们以 $E/G$ 表示轨道的集（它是 $\mathfrak{P}(E)$ 的一个子集）. 如果这个集仅由一个元组成（换言之，如果对 $E$ 的每对元 $x, y$，存在 $s \in G$，使得 $y = s \cdot x$），则称 $G$ **可迁作用**于 $E$ 上. $E$ 的子集 $A$ 的所有元的轨道的并 $G \cdot A$，称为 $A$ 关于 $G$ 的**饱和集**. 映射 $(s, x) \to s \cdot x$ 在 $G \times (G \cdot A)$ 上的限制是 $G$ 在 $G \cdot A$ 上的作用. 设 $\pi$: $E \to E/G$ 是典则映射，则也可写为 $G \cdot A = \pi^{-1}(\pi(A))$；关系 $G \cdot A = A$ 等价于 $G \cdot A \subset A$.

现在设 $G$ 是拓扑群，$E$ 是拓扑空间. 此时称 $G$（对于运算 $(s, x) \to s \cdot x$）**连续作用**于 $E$ 上，如果积空间 $G \times E$ 到 $E$ 的映射 $(s,x) \to s \cdot x$ 连续.

(12.10.2) 例. 设 $H$ 是拓扑群 $G$ 的子群，则对每个运算 $(s, x) \to sx$，$(s,x) \to sxs^{-1}$，$H$ 连续作用于 $G$ 上. 对于第一个作用，每个点 $x \in G$ 的稳定化子仅由幺元 $e$ 组成，而 $x$ 的轨道是右陪集 $Hx$；对于第二个作用，$x$ 的稳定化子是交 $H \cap \mathfrak{Z}(x)$（其中 $\mathfrak{Z}(x)$ 是 $x$ 在 $G$ 内的中心化子 (12.8.6)），而 $x$ 的轨道是当 $h \in H$ 时 $x$ 的共轭元 $hxh^{-1}$ 所成的集.

设 $H$ 与 $K$ 是 $G$ 的两个子群，则积群 $H \times K$ 由运算 $((s,t),x) \to sxt^{-1}$ 连续作用于 $G$ 上；$x \in G$ 的轨道是集 $HxK$，称为 $x$ 关于 $H$ 与

$K$ 的重陪集.

设 $E$ 是实(相应地,复)拓扑向量空间 (12.13), 则群 $\mathbf{R}^*$ (相应地, $\mathbf{C}^*$) 由运算 $(\lambda, x) \to \lambda x$ 连续作用于 $E$ 上; 相应的轨道是 $\{0\}$ 与 $\{0\}$ 在 $D$ 中的余集,这里 $D$ 是 $E$ 内的直线.

设 $E$ 是 Banach 空间, 则 $E$ 到 $E$ 上的线性同胚的群 $GL(E)$ (12.8.1) 由 $(u, x) \to u(x)$ 连续作用于 $E$ 上 (5.7.4).

设 $G$ 是拓扑群, $E$ 是拓扑空间,则 $G \times E$ 到 $E$ 的映射 $(s, x) \to x$ 是 $G$ 在 $E$ 上的作用(称为**平凡作用**). 对于平凡作用, $G$ 连续作用于 $E$ 上.

设 $G$ 是连续作用于拓扑空间 $E$ 上的拓扑群. 对拓扑群 $G'$ 到 $G$ 的每个连续同态 $\rho$, $G'$ 由 $(s', x) \to \rho(s') \cdot x$ 连续作用于 $E$ 上.

**(12.10.3)** 设 $G$ 是连续作用于拓扑空间 $E$ 上的拓扑群, 则对每个 $s \in G$, 映射 $x \to s \cdot x$ 是 $E$ 到它自身的同胚.

事实上,这个映射是连续双射,并且它的逆双射 $x \to s^{-1} \cdot x$ 也连续.

**(12.10.4)** 设 $G$ 是连续作用于分离拓扑空间 $E$ 上的拓扑群, 则 $E$ 的每个点的稳定化子是 $G$ 的闭子群.

这可由 (12.3.5) 立即得到.

**(12.10.5)** 设 $G$ 是连续作用于可度量化空间 $E$ 上的可度量化群, $A$ 是 $G$ 的紧子集, $B$ 是 $E$ 的闭(相应地, 紧)子集, 则 $A \cdot B$ 在 $E$ 内是闭(相应地,紧)的.

第二个论断由 $A \cdot B$ 是紧集 $A \times B$ (3.20.16(v)) 在连续映射 $(s, x) \to s \cdot x$ 下的象得到 (3.17.9). 为证明第一个论断, 考虑 $A \cdot B$ 中的点列 $(s_n \cdot x_n)$, 它以 $z \in E$ 为极限 (其中 $s_n \in A$, $x_n \in B$). 由假定,存在收敛于点 $a \in A$ 的子序列 $(s_{n_k})$. 由于

$$x_{n_k} = s_{n_k}^{-1} \cdot (s_{n_k} \cdot x_{n_k}),$$

所以序列 $(x_{n_k})$ 收敛于 $a^{-1} \cdot z$. 但由于 $B$ 在 $E$ 内是闭的,故 $a^{-1}z \in B$, 因而 $z = a \cdot (a^{-1} \cdot z) \in A \cdot B$. 基于 (3.13.13), 命题得证.

设 $G$ 是连续作用于拓扑空间 $E$ 上的拓扑群, $E/G$ 是轨道集, $\pi$: $E \to E/G$ 是典则映射, 它使每个 $x \in E$ 对应到 $x$ 的轨道 $G \cdot$

$x$. 设 $\mathfrak{O}$ 是 $E/G$ 的满足下述条件的子集 $U$ 所成的集：$\pi^{-1}(U)$ 是 $E$ 内的开集．由公式 (1.8.5) 与 (1.8.6) 立即得到，$\mathfrak{O}$ 是 $E/G$ 上的一个拓扑．赋予这个拓扑的 $E/G$，称为 $G$ 在 $E$ 上的作用的**轨道空间**；因而映射 $U \to \pi^{-1}(U)$ 是 $E/G$ 的开集的集到 $E$ 的饱和开集的集上的双射．为使 $E/G$ 的子集 $F$ 在 $E/G$ 内是闭的，必须且只须 $\pi^{-1}(F)$ 在 $E$ 内是闭的，这是因为

$$\pi^{-1}((E/G) - F) = E - \pi^{-1}(F).$$

**(12.10.6)** (i) 典则映射 $\pi$: $E \to E/G$ 是连续的.

(ii) $E$ 内每个开集在 $\pi$ 下的象是 $E/G$ 内的开集.

(iii) 为使 $E/G$ 到拓扑空间 $E'$ 的映射 $f$ 连续，必须且只须 $f\circ\pi: E \to E'$ 连续.

第一个论断由 $E/G$ 的拓扑的定义与 (3.11.4 b)) 得到．为证明第二个论断，只须证明，对 $E$ 内的每个开集 $V$，它的饱和集 $G \cdot V = \pi^{-1}(\pi(V))$ 在 $E$ 内是开的．然而我们有 $G \cdot V = \bigcup_{s\in G} s \cdot V$，根据 (12.10.3)，对每个 $s \in G$，$s \cdot V$ 在 $E$ 内是开的．最后，若 $f$: $E/G \to E'$ 连续，则由 (i)，$f\circ\pi$ 也连续；反之，若 $f\circ\pi$ 连续，则对 $E'$ 的每个开集 $U'$，$\pi^{-1}(f^{-1}(U'))$ 在 $E$ 内是开的，因而 $f^{-1}(U')$ 在 $E/G$ 内是开的，这就证明了 (iii).

对每个 $x \in E$，若 $V$ 取遍 $x$ 在 $E'$ 内的一个基本邻域系，则集 $\pi(V)$ 形成点 $\pi(x) \in E/G$ 的一个基本邻域系.

**(12.10.7)** 设 $A$ 是 $E$ 的子集，$A' = G \cdot A = \pi^{-1}(\pi(A))$ 是 $A$ 关于 $G$ 的饱和集，则 $E/G$ 的子空间 $\pi(A)$ 到**轨道**空间 $A'/G$ 上的典则双射 $\varphi$ 是一个同胚(这里 $\varphi$ 是把 $A$ 的点在 $E$ 内的**轨道**对应到同一**轨道**，但把后者看作 $E$ 的子空间 $A'$ 的点的轨道).

事实上，当 $U$ 取遍 $E/G$ 的开集时，$\varphi$ 把 $U\cap\pi(A)$ 对应到 $\pi^{-1}(U)\cap A'$ 在 $A'/G$ 内的典则象．然而 $U\cap\pi(A)$ 取遍 $E/G$ 的子空间 $\pi(A)$ 的开子集，并且 $\varphi(\pi^{-1}(U)\cap A')$ 取遍 $A'/G$ 的开子集：因为若 $V'$ 是 $E$ 的子空间 $A'$ 的饱和开子集，则 $V'$ 形如 $V\cap A'$，其中 $V$ 是 $E$ 内的开集．但我们也有

$$V' = (G \cdot V)\cap A' = \pi^{-1}(\pi(V))\cap A',$$

且由(12.10.6)，$\pi(V)$在$E/G$内是开的.

**(12.10.8)** 设$G$是连续作用于拓扑空间$E$上的拓扑群，则为使$E/G$是分离的，必须且只须在积空间$E\times E$内，属于同一轨道的元偶$(x,y)$的集$R$是闭的. 在这种情形下，每个轨道在$E$内都是闭的.

设$\pi(x)$与$\pi(y)$是$E/G$的两个不同的点. 若$E/G$是分离的，则存在$E$的两个没有公共点的饱和开集$V, W$，使得$x\in V$，$y\in W$. 显然$E\times E$内的开集$V\times W$含有$(x,y)$但不含有$R$的任何点，这表明$R$在$E\times E$内是闭的. 反之，若$R$在$E\times E$内是闭的，则在$E$内存在$x$的开邻域$S$与$y$的开邻域$T$，使得$(S\times T)\cap R=\varnothing$；这时$\pi(S)$与$\pi(T)$分别是$\pi(x)$与$\pi(y)$的邻域(12.10.6)；如果它们有公共点，则存在$s\in S$与$t\in T$，使得$s$，$t$属于同一轨道，即$(s,t)\in R$，但这是不可能的. 因而$E/G$是分离的. 第二个论断由(12.3.4)与$\pi$的连续性得到.

**(12.10.9)** 设$E$是可度量化空间，$G$是连续作用于$E$上的拓扑群，$\pi$: $E\to E/G$是典则映射. 假定$E/G$是可度量化的，我们有

(i) 若$E$是可分的，则$E/G$也是可分的.

(ii) 若$E$是局部紧(相应地，紧)的，则$E/G$也是局部紧(相应地，紧)的.

(iii) 若$E$是局部紧的，则对$E/G$的每个紧子集$K$，存在$E$的紧子集$L$，使得$K=\pi(L)$.

第一个论断是显然的，因为若$D$是在$E$内稠密的可数子集，则$\pi(D)$在$E/G$内稠密(3.11.4, d)). 若$V$是点$x\in E$的紧邻域，则$\pi(V)$是$\pi(x)$在$E/G$内的紧邻域((3.17.9)与(12.10.6)). 最后，对每个$z\in K$，设$V(z)$是$\pi^{-1}(z)$的某个点在$E$内的紧邻域，使得$\pi(V(z))$是$z$的紧邻域，则存在有限个点$z_i\in K$，使得

$$\pi(V(z_i))$$

覆盖$K$. 设$L_1$是$E$内的紧集$\bigcup_i V(z_i)$，则有$K\subset\pi(L_1)$，因而$L=L_1\cap\pi^{-1}(K)$是紧的(因为它在$L_1$内是闭的((3.11.4)与

(3.17.3))) 且有 $\pi(L)=K$.

**(12.10.10)** 设 $E$ 是局部紧可分可度量化空间，$G$ 是连续作用于 $E$ 上的拓扑群，$\pi$: $E\to E/G$ 是典则映射. 假定: 1° $E/G$ 是分离的; 2° 对每个 $x\in E$, 存在 $E$ 的含有 $x$ 的紧子集 $K(x)$, 使得 $\pi$ 在 $K(x)$ 上的限制是单射且 $\pi(K(x))$ 是 $\pi(x)$ 的邻域. 在这些条件下，$E/G$ 是可度量化的(因而 (12.10.9) 是局部紧与可分的).

我们首先指出，存在 $E$ 的紧子集序列 $(K_n)$, 使得 $\pi$ 在 $K_n$ 上的限制是单射，且所有集 $\pi(K_n)$ 的内部形成 $E/G$ 的覆盖. 已知 (3.18.3) 存在 $E$ 的紧子集的递增序列 $(A_n)$, 其并为 $E$. 对每个 $z\in\pi(A_n)$, 设 $x$ 是 $\pi^{-1}(z)$ 的一个点; 考虑具有所述性质的集 $K(x)$, 并令 $V(z)=(\pi(K(x)))^0$. $V(z)$ 是 $z$ 的开邻域，因而 $\pi^{-1}(V(z))$ 是 $\pi^{-1}(z)\cap A_n$ 的开邻域. 由于 $A_n$ 是紧的，故存在有限个点 $z_i\in\pi(A_n)$, 使得 $\pi^{-1}(V(z_i))$ $(1\leqslant i\leqslant p_n)$ 形成 $A_n$ 的覆盖. 设 $K_{in}$ 是对应于 $V(z_i)$ 的集 $K(x)$, 使得所有 $\pi(K_{in})$ 的内部在 $E/G$ 内形成 $\pi(A_n)$ 的开覆盖; 显然 $K_{in}$ $(n\geqslant 1$, 对每个 $n$, $1\leqslant i\leqslant p_n)$ 就是所提问题的解.

于是，因为 $E/G$ 是分离的，所以 $\pi$ 在 $K_n$ 上的限制是 $K_n$ 到 $E/G$ 的子空间 $\pi(K_n)$ 上的同胚 (12.3.6), 因而这个子空间是可度量化的与紧的，于是由 (12.4.7) 即得所需的结论.

**(12.10.11)** 设 $G$ (相应地，$G'$) 是连续作用于拓扑空间 $E$ (相应地，$E'$) 上的拓扑群，则 $G\times G'$ 由 $(s,s')\cdot(x,x')=(s\cdot x,s'\cdot x')$ 连续作用于 $E\times E'$ 上，且把点 $(x,x')$ 的轨道对应到由 $x$ 的轨道与 $x'$ 的轨道组成的元偶的映射 $\omega$ 是 $(E\times E')/(G\times G')$ 到 $(E/G)\times(E'/G')$ 上的一个同胚.

容易验证 $\omega$ 是双射，由 (12.10.6), 它是连续的. 此外，设 $p$: $E\times E'\to(E\times E')/(G\times G')$ 是典则映射，$\pi$ 与 $\pi'$ 分别是 $E\to E/G$ 与 $E'\to E'/G'$ 的典则映射，则 $(E\times E')/(G\times G')$ 内的每个开集是 $E\times E'$ 的开集 $U$ 在映射 $p$ 下的象，且有

$$\omega(p(U))=\pi(\mathrm{Pr}_1(U))\times\pi'(\mathrm{Pr}_2(U)),$$

因而 $\omega(p(U))$ 在 $(E/G)\times(E'/G')$ 内是开的，由此得到所述结

论.

**(12.10.12)** 设 $G$ 是连续作用于拓扑空间 $E$ 上的连通拓扑群. 若空间 $E/G$ 是连通的,则 $E$ 也是连通的.

由于映射 $s \to s \cdot x$ 是连续的，所以每个轨道 $G \cdot x$ 是连通的(3.19.7). 假定存在 $E$ 的两个非空开子集 $U,V$,使得 $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = E$. 对每个 $x \in E$, $U \cap (G \cdot x)$ 与 $V \cap (G \cdot x)$ 在 $G \cdot x$ 内都是开的，它们的并是 $G \cdot x$ ,交是空集，因而其中有一个是空集，也就是 $U$ 与 $V$ 是饱和的. 然而此时 $\pi(U)$ 与 $\pi(V)$ 是 $E/G$ 内的非空开集，其交为空集，其并为 $E/G$, 这与 $E/G$ 的连通性相矛盾.

**(12.10.13)** 附注. 群 $G$ 在集 $E$ 上的**右作用**是 $G \times E$ 到 $E$ 的一个映射 $(s,x) \to x \cdot s$, 满足: 对每个 $x \in E$, 有 $x \cdot e = x$; 对任意的 $x \in E$ 与 $G$ 内任意的 $s, t$, 有 $(x \cdot t) \cdot s = x \cdot (ts)$. 所有上述内容都可直接转移到这个作用上去. 常以 $G \backslash E$ 表示此时的轨道空间. 例如，拓扑群 $G$ 的子群 $H$ 通过运算 $(s, x) \to xs$ 连续右作用于 $G$ 上.

## 问　　题

1) 设 $G$ 是局部紧可度量化群, $E$ 是局部紧可度量化空间,并假定 $G$ 连续作用于 $E$ 上. 对 $E$ 的每对子集 $K, L$, 设 $P(K,L)$ 是使得 $(S \cdot K) \cap L \neq \varnothing$ 的 $s \in G$ 所成的集.

a) 试证,若 $K$ 在 $G$ 内是紧的, $L$ 在 $G$ 内是闭的,则集 $P(K,L)$ 在 $G$ 内是闭的. 称 $G$ **正常作用**于 $E$ 上，如果对 $E$ 的每对紧子集 $K, L$, $P(K,L)$ 是 $G$ 的紧子集(如果 $G$ 是紧的,则这个条件必满足).

b) 试证,若 $G$ 正常作用于 $E$ 上,则对 $G$ 的每个闭子集 $F$ 与 $E$ 的每个紧子集 $K$, $F \cdot \mathrm{K}$ 是 $E$ 的闭子集. 特别地，对每个 $x \in E$, $x$ 的轨道 $G \cdot x$ 在 $E$ 内是闭的.

c) 在同样的假定下,对每个 $x \in E$, $x$ 的稳定化子 $S_x$ 是 $G$ 的紧子群,且典则映射 $G/S_x \to G \cdot x$ 是一个同胚.

d) 在同样的假定下,轨道空间 $E/G$ 是分离的.

2) 对任意实数偶 $(a, t)$ (其中 $a \geqslant 1$), 定义点 $f_a(t) \in R^2$ 如下:

$$f_a(t)=\left(t+\frac{a(a+2)}{a+1},\ -\frac{a}{a+1}\right),\quad \text{当}\ t<-\frac{a}{a+1};$$

$$f_a(t)=(a,t),\qquad\qquad \text{当}\ -\frac{a}{a+1}\leqslant t\leqslant\frac{a}{a+1};$$

$$f_a(t)=\left(-t+\frac{a(a+2)}{a+1},\ \frac{a}{a+1}\right),\quad \text{当}\ t>\frac{a}{a+1}.$$

我们以 $C_a$ 表示当 $t\in\boldsymbol{R}$ 时 $f_a(t)$ 的集；以 $E$ 表示 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间，它是满足 $a\geqslant 1$ 的 $c_a$ 与直线 $D'$，$D''$ 的并，这里 $D'$（相应地，$D''$）是点 $(t,-1)$（相应地，$(t,1)$）的集(其中 $t\in\boldsymbol{R}$)。

加法群 $\boldsymbol{R}$ 由如下定义的运算律 $(s,x)\to s\cdot x$ 作用于局部紧空间 $E$ 上：1° $s\cdot(t,-1)=(s+t,-1)$；2° 当 $a\geqslant 1$ 时，$s\cdot f_a(t)=f_a(s+t)$；3° $s\cdot(t,1)=(t-s,1)$。试证 $\boldsymbol{R}$ 连续且自由作用于 $E$ 上，并且对每个 $x\in E$，$x$ 的轨道 $\boldsymbol{R}\cdot x$ 是闭的而典则映射 $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cdot x$ 是一个同胚，但轨道空间 $E/\boldsymbol{R}$ 不是分离的。

3）群 $\boldsymbol{Z}$ 由运算律

$$n\cdot(x,y)=((-1)^n x,\ y+2n)$$

连续且正常作用于 $\boldsymbol{R}^2$ 上。轨道空间 $M$（Möbius 带）是可度量化的与局部紧的。若 $\pi$：$\boldsymbol{R}^2\to M$ 是典则映射，则 $\pi$ 在 $E-D''$（使用与问题 2 相同的记号）上的限制是单射，且 $\pi(E-D'')=\pi(E)$ 是局部紧的。群 $\boldsymbol{R}$ 通过运算律 $s\cdot\pi(x)=\pi(s\cdot x)$（对一切 $x\in E-D''$）作用于 $\pi(E-D'')$ 上。试证 $\boldsymbol{R}$ 连续且自由作用于 $\pi(E)$ 上，使对每个 $x\in E$，轨道 $\boldsymbol{R}\cdot\pi(t)$ 在 $\pi(E)$ 内是闭的且典则映射 $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cdot\pi(x)$ 是一个同胚，轨道空间 $\pi(E)/\boldsymbol{R}$ 是可分、局部紧与可度量化的，但 $\boldsymbol{R}$ 不正常作用于 $\pi(E)$ 上。

4）在 $\boldsymbol{R}^3$ 内，设 $E$ 是满足 $a\geqslant 1$ 与 $z\geqslant 0$ 的集 $c_a\times\{z\}$（使用问题 2 中的记号），直线 $D'_0$ 与满足 $z>0$ 的直线 $D''_z$ 的并；其中 $D'_0$ 是当 $t\in\boldsymbol{R}$ 时点 $(t,-1,0)$ 所成的集，$D''_z$ 是当 $t\in\boldsymbol{R}$ 时点 $(t,1,z)$ 所成的集。加法群 $\boldsymbol{R}$ 通过如下定义的运算律 $(s,u)\to s\cdot u$ 连续作用于 $E$ 上：1° $s\cdot(t,-1,0)=(s+t,-1,0)$；2° $s\cdot(f_a(t),z)=(f_a(s+t),z)$；3° $s\cdot(t,1,z)=(t-s,1,z)$。试证相应于这个作用的轨道具有问题 2 与 3 所说的同样的性质，且空间 $E/\boldsymbol{R}$ 是分离的，但它不是可度量化的。

5）设 $E$ 是局部紧可度量化空间，$G$ 是连续作用于 $E$ 上的拓扑群，$\pi$：$E\to E/G$ 是典则映射，又假定 $E/G$ 是分离的。

a）设 $K$ 是 $E$ 的紧子集，$U$ 是 $K$ 的开邻域。试证存在 $E$ 到 $[0,1]$ 的连续

映射，在 $\pi^{-1}(\pi(K))$ 内取值 1，在 $\pi^{-1}(\pi(U))$ 的余集内取值 0.

b) 由 a) 推断，存在 $E/G$ 到 $[0, 1]$ 的连续映射，在 $\pi(K)$ 内取值 1，在 $\pi(U)$ 的余集内取值 0.（先证明在 $E$ 内存在 $K$ 的相对紧开邻域 $U_1$，使得 $\bar{U}_1 \subset U$；由此推出，存在 $E$ 到 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 的两个连续映射 $f_1$，$f_2$，使得 $f_1$ 在

$$\pi^{-1}(\pi(K))$$

内取值 $\frac{1}{2}$，在 $E - \pi^{-1}(\pi(U_1))$ 内取值 0，$f_2$ 在 $\pi^{-1}(\pi(\bar{U}_1))$ 内取值 $\frac{1}{2}$，在 $E - \pi^{-1}(\pi(U))$ 内取值 0；考虑函数 $f = f_1 + f_2$. 无限次重复这个"内插过程"并取极限.）

c) 设 $E$ 是可分的，试证存在 $E$ 中的相对紧开集序列 $(U_n)$，使得 $\pi(U_n)$（$n$ 取遍 $\mathbf{N}$）形成 $E/G$ 的拓扑基.

d) 假定 $E$ 是可分的，试证 $E/G$ 是可度量化的.（对每对使得 $\bar{U}_m \subset U_n$ 的指标 $m$，$n$，考虑 $E/G$ 到 $[0, 1]$ 的连续映射 $f_{mn}$，它在 $\pi(U_m)$ 内等于 1，而在 $\pi(U_n)$ 的余集内等于 0；考虑 $E/G$ 到积空间 $R^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ 的连续映射 $x \to (f_{mn}(x))$.）

6) 给定具有幺元 $e$ 的广群 $M$，如 (12.10) 那样定义 $M$ 在集 $E$ 上的作用.

假定 $E$ 是紧度量空间，且对每个 $s \in M$，映射 $x \to s \cdot x$ 连续. $s \cdot x$（其中 $s \in M$）所成的集的闭包 $\overline{M \cdot x}$，称为 $x$ 关于集 $M$ 的**闭轨道**；它在 $M$ 的作用下是稳定集. 试证对每个 $x \in E$，在 $\overline{M \cdot x}$ 内存在最小的闭轨道 $Z$，就是说 $z$ 满足：对每个 $z \in Z$，有 $\overline{M \cdot z} = Z$.（对每个 $y \in \overline{M \cdot x}$，设 $\lambda(y)$ 是点 $t$ 取遍 $\overline{M \cdot y}$ 时，$t$ 到包含在 $\overline{M \cdot t}$ 内的闭轨道的距离的上确界. 用反证法，指出相反的假定导致 $E$ 不是准紧的，以此证明当 $y$ 取遍 $\overline{M \cdot x}$ 时，$\lambda(y)$ 的下确界是 0. 由此推断，存在 $\overline{M \cdot x}$ 中的点列 $(y_n)$，使得 $y_{n+1} \in \overline{M \cdot y_n}$，且序列 $(\lambda(y_n))$ 趋于 0，再利用 $E$ 的紧性得到所需的结论.）

## 11. 齐性空间

设 $G$ 是群，$H$ 是 $G$ 的子群. 读者记得 $G/H$（相应地，$H\backslash G$）表示由 $H$ 确定的左陪集 $xH$（相应地，右陪集 $Hx$）的集. 如果对 $G/H$（相应地，$H\backslash G$）的每个陪集 $\dot{x} = xH$（相应地，$\dot{x} = Hx$）与每个 $s \in G$，令 $s \cdot \dot{x} = (sx)H$（相应地，$\dot{x} \cdot s = H(xs)$），则 $G$ 可迁左（相应地，右）作用于 $G/H$（相应地，$H\backslash G$）上；赋予这个作用的 $G/H$

（相应地，$H\backslash G$），称为由$H$确定的左陪集（相应地，右陪集）的**商空间**.

下面专门研究 $G/H$，显然所做的一切阐述均可转移到 $H\backslash G$ 上. 我们以 $\pi$ 表示$G$到 $G/H$ 上的典则映射 $x\to xH$.

显见 $G/H$ 是 $G$ 的点关于 $H$ 在 $G$ 上的右作用 $(h,x)\to xh$ (12.10.13) 的轨道所成的集. 当 $G$ 是拓扑群时，就可赋予 $G/H$ (12.10) 中定义的拓扑（称为$G$的拓扑对$H$的**商拓扑**）. 若 $x_0\in G$，$\dot{x}_0=x_0H$ 是 $x_0$ 在 $G/H$ 内的象，考虑 $x_0$ 在$G$内的邻域$V$在 $G/H$ 内的典则象（即对每个 $V$，考虑 $x\in V$ 时陪集 $xH$ 的集，它也是 $V$（或 $VH$）在典则映射 $\pi$: $G\to G/H$ 下的象），这就得到 $\dot{x}_0$ 在 $G/H$ 内的一个基本邻域系. 当我们把 $G/H$ 作为拓扑空间时，只要没有相反的声明，总指它的拓扑定义如上.

**(12.11.1)** 群$G$连续作用于 $G/H$ 上.

设 $(s_0,\dot{x}_0)$ 是 $G\times(G/H)$ 的点，$x_0$ 是陪集 $\dot{x}_0$ 中的点. $s_0\cdot\dot{x}_0$ 的每个邻域形如 $\pi(V)$，其中$V$是 $s_0x_0$ 的邻域. 存在 $s_0$ 的邻域$U$与 $x_0$ 的邻域 $W$，使由关系 $s\in U$，$x\in W$ 可得到 $sx\in V$. 于是由关系 $s\in U$，$\dot{x}\in\pi(W)$ 得到 $s\cdot\dot{x}\in\pi(V)$，由此即得所述命题.

**(12.11.2)** 设$G$是拓扑群，$H$是$G$的子群，我们有:

(i) 为使 $G/H$ 是分离的，必须且只须$H$是闭的.

(ii) 为使 $G/H$ 是离散的，必须且只须$H$是开的.

(iii) 若$H$是离散的，则对每个 $x\in G$，存在一个邻域 $V$，使得 $\pi$ 在$V$上的限制是$V$到 $\pi(x)=\dot{x}$ 在 $G/H$ 内的邻域 $\pi(V)$ 上的同胚.

事实上，对于 (i)，若 $G/H$ 是分离的，则 $\{\pi(e)\}$ 在 $G/H$ 内是闭的 (12.3.4)，因而 $H=\pi^{-1}(\pi(e))$ 在$G$内是闭的. 反之，若$H$是闭的，则关于$H$的右作用具有相同轨道的元偶 $(x,y)\in G\times G$ 的集是使得 $x^{-1}y\in H$ 的 $(x,y)$ 所成的集，由于后者是$H$在连续映射 $(x,y)\to x^{-1}y$ 下的逆象，因而是闭的；于是 $G/H$ 是分离的 (12.10.8).

现在来看 (ii). 若 $G/H$ 是离散的，则由于$\{\pi(e)\}$ 是 $G/H$ 内的

开集，故 $H=\pi^{-1}(\pi(e))$是开集．反之，若$H$是开集，则 $xH$ 同样是开集，因而它们的象 $\pi(xH)=\{\pi(x)\}$在 $G/H$ 内是开集(12.10.6)，故 $G/H$ 是离散的．

最后，对于 (iii)，设 $U_0$ 是 $e$ 在$G$内的一个邻域，不含有$H$内除 $e$ 外的其他点；$V_0$ 是 $e$ 的对称开邻域，满足 $V_0^2\subset U_0$ (12.8.3)．这时，对每个 $x\in G$，$\pi$ 在 $V=xV_0$ 上的限制是单射．这是因为，若 $H$内的 $h$，$h'$ 满足 $xzh=xz'h'$，其中 $z$，$z'$ 属于 $V_0$，则可推出

$$h'h^{-1}=z'^{-1}z\in V_0^2\subset U_0,$$

由此得到 $h'=h$，$z'=z$．由于$V$内的每个开集在 $\pi$ 下的象是 $\pi(V)$ 内的开集 (12.10.6) 且 $\pi$ 是连续的，所以 $\pi$ 在$V$上的限制是 $V$ 到 $\pi(V)$ 上的同胚．

**(12.11.3)** 设$G$是可度量化群，$H$是$G$的闭子群，$d$ 是定义$G$的拓扑的右不变距离 (12.9.1)；对 $G/H$ 内任意的两点 $\dot{x}$，$\dot{y}$，令

$$d_0(\dot{x},\dot{y})=d(xH,yH) \tag{3.4}$$

于是$d_0$是定义 $G/H$ 的拓扑的一个距离；若$G$还是完备的(12.9.2)，则 $G/H$ 关于距离 $d_0$ 是完备的．

首先注意，若 $x\in\dot{x}$，$y\in\dot{y}$，则有 $d_0(\dot{x},\dot{y})=d(x,yH)$．事实上，我们有 $d(x,yH)=\inf\limits_{h\in H}d(x,yh)$；因而根据 $d$ 的右不变性，对每个 $h'\in H$，有 $d(xh',yH)=d(x,yH)$．于是由 (3.4.2)，对每个 $z\in G$，有

$$|d_0(\dot{x},\dot{z})-d_0(\dot{y},\dot{z})|=|d(x,zH)-d(y,zH)|\leqslant d(x,y);$$

由于这个不等式对 $\dot{x}$ 内的任意 $x$ 与 $\dot{y}$ 内的任意 $y$ 都成立，故

$$|d_0(\dot{x},\dot{z})-d_0(\dot{y},\dot{z})|\leqslant d_0(\dot{x},\dot{y}),$$

因此 $d_0$ 是 $G/H$ 上的伪距离．关系 $d_0(\dot{x},\dot{y})<r$ 等价于存在 $y\in\dot{y}$，使得 $d(x,y)<r$．由于$H$是闭的，这表明 $d_0$ 是一个距离，并且如果 $B(x;r)$ 是以 $x$ 为中心，以 $r$ 为半径的(关于 $d$ 的)开球，则它在典则映射 $\pi$: $G\to G/H$ 下的象是以 $\pi(x)$ 为中心，以 $r$ 为半径的(关于 $d_0$ 的)开球，因而 $d_0$ 定义了 $G/H$ 的拓扑．

现在假定$G$是完备的，设$(\dot{x}_n)$ 是关于 $d_0$ 的 Cauchy 序列．我

们来证明,必要的话,选取 $(\dot{x}_n)$ 的子序列,可限于考虑在 $G$ 内存在右 Cauchy 序列 $(x_n)$,使得 $\pi(x_n)=\dot{x}_n$ 的情形. 根据假定,序列 $(x_n)$ 收敛,这表明 $(\dot{x}_n)$ 具有触值,因而收敛(3.14.2). 这就得到 $G/H$ 是完备的.

在 $G$ 内存在 $e$ 的可数基本邻域系 $(V_n)$,使对每个 $n$,有 $V_{n+1}^2\subset V_n$(12.9.1 与 12.8.3). 设 $(\varepsilon_n)$ 是正数序列,使由关系 $d(e,z)<\varepsilon_n$ 可得出 $z\in V_n$. 由假定推出,可按归纳法定义 $(\dot{x}_n)$ 的子序列 $(\dot{x}_{n_k})$,使对 $p\geqslant k$ 与 $q\geqslant k$,有 $d_0(\dot{x}_{n_p},\dot{x}_{n_q})<\varepsilon_k$. 用 $(\dot{x}_{n_k})$ 代替 $(\dot{x}_n)$,还可假定 $d_0(\dot{x}_p,\dot{x}_q)<\varepsilon_n$ 对 $p\geqslant n$ 与 $q\geqslant n$ 都成立. 由于 $d$ 是右不变的,所以由定义推出,对每个 $y\in\dot{x}_p$,$\dot{x}_q$ 与邻域 $V_ny$ 的交非空. 这样就可对 $n$ 用归纳法定义 $G$ 中的点列 $(x_n)$,使对一切 $n$,有 $x_n\in\dot{x}_n$,且 $x_{n+1}\in V_nx_n$. 关于 $p$ 用归纳法可得到,对一切 $p>0$,基于 $V_n$ 的选法,有 $x_{n+p}\in V_{n+p-1}V_{n+p-2}\cdots V_{n+1}V_nx_n\subset V_{n-1}x_n$;因而序列 $(x_n)$ 是 $G$ 中的右 Cauchy 序列. 证毕.

设 $G$ 是拓扑群,$E$ 是拓扑空间,$G$ 连续且可迁作用于 $E$ 上. 设 $x$ 是 $E$ 的点,$S_x$ 是它的稳定化子. 按照假定,$G$ 到 $E$ 的连续映射 $h_x$: $s\to s\cdot x$ 是满射,我们已经看到(12.10.1),它可典则地分解为

**(12.11.4)** $$h_x:\ G\xrightarrow{\pi_x}G/S_x\xrightarrow{f_x}E;$$

其中 $\pi_x$ 是 $G$ 到齐性空间 $G/S_x$ 上的典则映射,$f_x$ 是双射 $sS_x\to s\cdot x$.

由(12.10.6),我们断定 $f_x$ 是连续双射;然而 $f_x$ 不一定是同胚(12.12 问题 2).

**(12.11.5)** 使用上面的记号,为使双射 $f_x$: $G/S_x\to E$ 对每个 $x\in E$ 都是同胚,必须且只须对一个点 $x_0\in E$,映射 $hx_0$: $s\to s\cdot x_0$ 把 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域映为 $x_0$ 在 $E$ 内的邻域.

考虑到(12.10.6),只须证明所述条件的充分性.

首先注意,由假定,每个 $x\in E$ 可写为 $x=t\cdot x_0$,$t$ 是属于 $G$ 的某个元. 若 $V$ 是 $e$ 的邻域,由假定得知,$V\cdot x=(Vt)\cdot x_0$ 是 $x$ 的邻域,因为可写 $(Vt)\cdot x_0=t\cdot((t^{-1}Vt)\cdot x_0)$,而 $t^{-1}Vt$ 是 $e$ 在

$G$内的邻域(12.8.3)，且对每个 $s\in G$，$y\to s\cdot y$ 是 $E$ 到自身的同胚(12.10.3)． 由于 $G/S_x$ 内的每个开集是 $G$ 的某个开集在 $\pi_x$ 下的象，所以只须证明，对 $G$ 内的每个开集 $U$ 与每个 $x\in E$，$h_x(U)=f_x(\pi_x(U))=U\cdot x$ 在 $E$ 内是开的．然而，对每个 $t\in U$，$t^{-1}U$ 是 $e$ 的邻域，因而由前所证，$(t^{-1}U)\cdot x$ 是 $x$ 在 $E$ 内的邻域，故

$$t\cdot((t^{-1}U)\cdot x)=U\cdot x$$

是 $t\cdot x$ 的邻域，由此即得所述结论(3.6.4)．

## 12. 商　群

设 $H$ 是群 $G$ 的正规子群，我们知道，此时对每个 $x\in G$，有 $xH=Hx$，即集 $G/H$ 与 $H\backslash G$ 是等同的；赋予 $G/H$ 以 $G$ 对 $H$ 的商群结构，关于这个群结构，典则映射 $\pi$：$G\to G/H$ 是同态．

**(12.12.1)** 设 $G$ 是拓扑群，$H$ 是 $G$ 的正规子群，则 $G$ 的拓扑对 $H$ 的商拓扑与 $G/H$ 的群结构协调．

设 $(\dot{x}_0,\dot{y}_0)$ 是 $(G/H)\times(G/H)$ 的元，$x_0$ 是陪集 $\dot{x}_0$ 中的点，$y_0$ 是陪集 $\dot{y}_0$ 中的点．$\dot{x}_0\dot{y}_0$ 的每个邻域形如 $\pi(U)$，其中 $U$ 是 $x_0y_0$ 的某个邻域．在 $G$ 内存在 $x_0$ 的邻域 $V$ 与 $y_0$ 的邻域 $W$，使由关系 $x\in V$，$y\in W$ 可得出 $xy\in U$；因此由关系 $\dot{x}\in\pi(V)$，$\dot{y}\in\pi(W)$ 可得出 $\dot{x}\dot{y}\in\pi(U)$，这表明映射 $(\dot{x},\dot{y})\to\dot{x}\dot{y}$ 在点 $(\dot{x}_0,\dot{y}_0)$ 处连续． 可以同样地证明映射 $\dot{x}\to\dot{x}^{-1}$ 的连续性．

以后当我们谈到拓扑群的商群时，总是指赋予它商拓扑．

**(12.12.2)** 设 $G$ 是拓扑群，$H$，$K$ 是 $G$ 的两个正规子群，且 $H\subset K$，则典则双射 $\varphi$：$G/K\to(G/H)/(K/H)$ 是拓扑群同构．

我们知道，$\varphi$ 是使图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/K \\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ G/H & \xrightarrow[\pi'']{} & (G/H)/(K/H) \end{array}$$

具有交换性的唯一映射，其中 $\pi$，$\pi'$ 与 $\pi''$ 是典则同态． 商拓扑的定义(12.10)表明，为使 $(G/H)/(K/H)$ 的子集 $U$ 是开的，必须且

只须 $\pi^{-1}(\pi'^{-1}(U))$ 在 $G$ 内是开的，或 $\pi^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ 在 $G$ 内是开的，而这表示 $\varphi^{-1}(U)$ 在 $G/K$ 内是开的，由于 $\varphi$ 是双射，故得所述命题。

**(12.12.3)** 设 $G$ 是拓扑群，$H$ 是 $G$ 的正规子群，$\pi$: $G \to G/H$ 是典则同态，$A$ 是 $G$ 的子群，则 $\pi(A)$ 到商群 $AH/H$ 上的典则双射是一个拓扑群同构。

应用 $H$ 在 $G$ 上的右作用 $(h, x) \to hx$，这个命题就成为(12.10.7)的特殊情形。

我们知道，也存在商群 $A/(A \cap H)$ 到 $G/H$ 的子群 $\pi(A)$ 上的典则双射 $\psi$，它是使图

**(12.12.4)**

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ {\scriptstyle \pi'} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle \pi \circ j} \\ A/(A \cap H) & \xrightarrow[\psi]{} & \pi(A) \end{array}$$

具有交换性的唯一映射，这里 $\pi'$ 是典则映射，而 $j$: $A \to G$ 是典则单射．由(12.10.6)得到，双射 $\psi$ 是连续的，但它不一定是双方连续的(问题 2)．然而有：

**(12.12.5)** 设 $G$ 是可度量化群，$H$ 是 $G$ 的紧子群，则对 $G$ 的每个闭子群 $A$，典则双射

$$\psi: A/(A \cap H) \to \pi(A)$$

是拓扑群同构。

只须证明 $A/(A \cap H)$ 的任一闭子集 $F$ 在 $\psi$ 下的象是 $\pi(A)$ 内的闭集．$\pi'^{-1}(F) = B$ 是 $A$ 的闭子集，从而是 $G$ 的闭子集，且

$$\psi(F) = \pi(j(B)) = \pi(BH).$$

由于 $H$ 是紧的，所以 $BH$ 在 $G$ 内是闭的(12.10.5)与饱和的，从而 $\pi(BH)$ 在 $G/H$ 内是闭的(12.10)，故它在 $\pi(A)$ 内更是闭的。

**(12.12.6)** 设 $G_1$，$G_2$ 是两个拓扑群，$H_1$ 是 $G_1$ 的正规子群，$H_2$ 是 $G_2$ 的正规子群，则典则双射 $\omega$: $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \to (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ 是拓扑群同构。

这从(12.10.11)立即得到。

**(12.12.7)** 设 $G$，$G'$ 是两个拓扑群，$u$: $G \to G'$ 是连续同态，则

$u$ 可典则分解为

$$G \xrightarrow{p} G/N \xrightarrow{v} u(G) \xrightarrow{j} G';$$

其中 $N$ 是 $u$ 的核，$p$ 是典则同态，而 $j$ 是典则单射．我们知道，$v$ 是连续双射（12.10.6，(iii)），但不一定双方连续．当 $v$ 是双方连续时，$u$ 称为 $G$ 到 $G'$ 的**严格态射**．为使 $u$ 是严格态射，必须且只须对 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域 $V$，$u(V)$ 是 $e' = u(e)$ 在 $u(G)$ 内的邻域（12.11.5）．

## 问　　题

1) a) 设 $G$ 是拓扑群，$K$ 是它的幺分支，$H$ 是 $G$ 的子群，且包含在 $K$ 内．试证空间 $G/H$ 的连通分支是 $G$ 的连通分支在典则映射 $\pi$: $G \to G/H$ 下的象．并证明 $K$ 是 $G$ 内使得 $G/L$ 为完全不连通的闭子群 $L$ 中的最小闭子群．

b) 设 $G$ 是 Banach 空间 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(N)$ (7.1.3) 内由满足下述条件的映射 $n \to f(n)$ 所组成的加法子群：对一切 $n \in N$，有 $f(n) \in \mathbf{Q}$，且在 $\mathbf{R}$ 内 $\lim_{n\to\infty} f(n)$ 存在．$\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(N)$ 上的距离在 $G$ 上的诱导距离所定义的拓扑与 $G$ 的群结构协调；$G$ 关于这个拓扑是完全不连通的．设 $H$ 是 $G$ 的子群，它由满足 $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ 的 $f \in G$ 所组成，试证 $H$ 在 $G$ 内是闭的，且 $G/H$ 同构于 $\mathbf{R}$，因而是连通的．

c) 设 $G$ 是局部紧可度量化群，$H$ 是 $G$ 的闭子群，$\pi$: $G \to G/H$ 是典则映射．试证 $G/H$ 的连通分支是 $G$ 的连通分支在 $\pi$ 下的象的闭包（归结为 $G$ 是完全不连通的情形，并利用 12.9 问题 3)．

2) 在加法群 $\mathbf{R}$ 内，设 $H$ 是子群 $\mathbf{Z}$，$A$ 是子群 $\theta\mathbf{Z}$，这里 $\theta$ 是无理数．试证典则双射 $A/(A \cap H) \to (A+H)/H$ 不是拓扑群同构．

3) 设 $p$ 是素数，$(G_n)$ 是拓扑群的无限序列，它的每一项都等同于离散群 $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$，设 $H_n$ 是 $G_n$ 的子群 $p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$．设 $G$ 是积群 $\prod_n G_n$ 的子群，它由满足下述条件的 $x = (x_n)$ 所组成：除有限个 $n$ 外，有 $x_n \in H_n$．设 $\mathfrak{B}$ 是积群

$$\prod_n H_n = H \subset G$$

的幺元 0 的邻域的集，试证 $\mathfrak{B}$ 是 0 关于 $G$ 上的某个拓扑的基本邻域系，而该拓扑与 $G$ 的群结构协调．关于这个拓扑，$G$ 是可度量化的与局部紧的；而 $G/H$ 是离散的．试证 $G$ 到自身的同态 $u$: $x \to px$ 不是 $G$ 到自身的严格态射，并且 $u(G)$ 在 $G$ 内不是闭的．

4）设$G$是可度量化群，$K$是$G$的闭正规子群．试证，若$K$与$G/K$是完备的，则$G$是完备的．

5）a）设$G$是拓扑群，$K$是$G$的正规子群．试证，若$K$与$G/K$都没有任意小子群（12.9，问题 6），则$G$同样没有任意小子群．

b）由 a）推断，若$H_1$，$H_2$是拓扑群$G$的两个正规子群，使得$G_1/H_1$与$G_2/H_2$都没有任意小子群，则$G/(H_1\cap H_2)$没有任意小子群．

6）设$G$是连通的、局部紧的可度量化群，$K$是$G$的正规紧子群，$N$是$K$的正规闭子群，使得$K/N$没有任意小子群（12.9，问题 6），试证此时$N$是$G$的正规子群．（注意到由关于$K/N$的假定可推出存在$e$在$G$内的邻域$U$，使对每个$x\in U$，有$xNx^{-1}\subset N$.）

7）设$G$是连通的可度量化群，$H$是$G$的紧交换正规子群，且没有任意小子群．试证$H$包含在$G$的中心之内．（注意：对$G$内邻近$e$的$s$，$H$在映射$x\to sxs^{-1}x^{-1}$下的象任意邻近$e$.）

8）设$G$是局部紧可度量化群，$H$是$G$的正规闭子群，使得$G/H$不是离散的且没有任意小子群．试证存在连续同态$f$：$\boldsymbol{R}\to G$，使得合成同态

$$\boldsymbol{R}\xrightarrow{f}G\to G/H$$

不是平凡的（参阅 12.9，问题 7）．

## 13. 拓扑向量空间

我们保留（5.1）的约定，就是说，对于所考虑的向量空间，相应的纯量域总是$\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$.

给定$\boldsymbol{R}$（相应地，$\boldsymbol{C}$）上的向量空间$E$，称$E$上的一个拓扑与它的向量空间结构**协调**，如果$E\times E$到$E$的映射$(x,y)\to x+y$与$\boldsymbol{R}\times E$（相应地，$\boldsymbol{C}\times E$）到$E$的映射$(\lambda,x)\to\lambda x$连续．赋予与其向量空间结构协调的拓扑的向量空间，称为**拓扑向量空间**．由于$-x=(-1)x$，故上述条件导致所给拓扑必与$E$的加法群结构协调；从而特别地，上节对拓扑群所建立的概念与性质（当然要用加法运算来表达）都适用于拓扑向量空间．

拓扑向量空间$E$到拓扑向量空间$F$上的**同构**是指$E$到$F$上的一个线性双射，它并且还是一个同胚，

设 $\|x\|$ 是向量空间 $E$ 上的范数，则 $E$ 上由距离 $\|x-y\|$ 定义的拓扑与 $E$ 的向量空间结构协调 (5.1.5)，从而使 $E$ 成为拓扑向量空间；两个等价范数 (5.6) 定义相同的拓扑.

在拓扑向量空间 $E$ 上，平移 $x \to x+a$ 与位似 $x \to \lambda x (\lambda \neq 0)$ 是 $E$ 到自身的同胚，它们的逆映射分别是平移 $x \to x-a$ 与位似 $x \to \lambda^{-1}x$.

在 $\boldsymbol{R}$ (相应地，$\boldsymbol{C}$) 上的向量空间 $E$ 内，集 $M$ 称为**均衡集**，如果对每个 $x \in M$ 与每个满足 $|\lambda| \leqslant 1$ 的纯量 $\lambda$，有 $\lambda x \in M$ (换言之，$\lambda M \subset M$). $M$ 称为**吸收集**，如果对每个 $x \in E$，存在正数 $\alpha$，使当 $|\lambda| \leqslant \alpha$ 时，有 $\lambda x \in M$. $E$ 的一个吸收子集生成向量空间 $E$. 为使 $E$ 的均衡子集 $M$ 是吸收的，只须对每个 $x \in E$，存在纯量 $\lambda \neq 0$，使得 $\lambda x \in M$.

**(12.13.1)** 在拓扑向量空间 $E$ 内，0 的所有均衡吸收邻域形成它的一个基本邻域系.

对每个 $x_0 \in E$，按照假定，纯量域到 $E$ 的映射 $\lambda \to \lambda x_0$ 在点 0 处连续，因而对 0 在 $E$ 内的每个邻域 $V$，存在 $\alpha > 0$，使由关系 $|\lambda| \leqslant \alpha$ 可推出 $\lambda x_0 \in V$，这表明 0 的邻域是吸收的. 另一方面，由映射 $(\lambda, x) \to \lambda x$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性推出，对 0 在 $E$ 内的每个邻域 $V$，存在 $\alpha > 0$ 与 0 的邻域 $W$，使得关系 $|\lambda| \leqslant \alpha$ 与 $x \in W$ 蕴涵 $\lambda x \in V$；显见当 $\lambda$ 取遍满足 $|\lambda| \leqslant \alpha$ 的纯量集时，集 $\lambda W$ 的并 $U$ 是 0 在 $E$ 内的一个均衡邻域，且有 $U \subset V$，由此命题得证.

对拓扑向量空间 $E$ 的任一向量子空间 $F$，$E$ 的拓扑在 $F$ 上的诱导拓扑与 $F$ 的向量空间结构协调：当我们把 $F$ 作为拓扑向量空间考虑时，如果没有相反的声明，总是指它的拓扑是由 $E$ 上的拓扑所诱导的. 不加修改地应用 (5.4.1) 的证明，可证得 $\bar{F}$ 是 $E$ 的向量子空间. $E$ 的**全子集**的定义与 (5.4) 相同.

在商向量空间 $E/F$ 上，商拓扑 (12.11) 与它的向量空间结构协调. 事实上，设 $\pi: E \to E/F$ 是典则映射，$(\lambda_0, \dot{x}_0)$ 是 $\boldsymbol{R} \times (E/F)$ (相应地，$\boldsymbol{C} \times (E/F)$) 的点，$x_0$ 是 $\dot{x}_0$ 中的一个点，则 $\lambda_0 \dot{x}_0$ 的

每个邻域包含一个形如 $\pi(V)$ 的邻域，其中 $V$ 是 $\lambda_0 x_0$ 的某个邻域. 存在 $\lambda_0$ 在 $\boldsymbol{R}$（相应地，$\boldsymbol{C}$）内的邻域 $U$ 与 $x_0$ 在 $E$ 内的邻域 $W$，使由关系 $\lambda \in U$，$x \in W$ 可推出 $\lambda x \in V$；于是由关系 $\lambda \in U$，$\dot{x} \in \pi(W)$ 即可推出 $\lambda \dot{x} \in \pi(V)$，由此得到我们的论断.

当我们把 $E/F$ 看作拓扑向量空间时，如果没有相反的声明，总是对它赋予 $E$ 对于 $F$ 的商拓扑.

显然，由积空间上的连续性准则((3.20.15) 与 (12.5))，若 $E_1$，$E_2$ 是两个拓扑向量空间，则 $E_1 \times E_2$ 上的积拓扑与 $E_1 \times E_2$ 的向量空间结构协调；赋予这个拓扑的 $E_1 \times E_2$，称为 $E_1$ 与 $E_2$ 的**积拓扑向量空间**. 对于任意的拓扑向量空间，命题 (5.4.2) 与两个子空间的拓扑直和的定义无须修改，仍然有效.

设 $E$ 是两个子空间 $F_1$，$F_2$ 的直和，$p_1$: $E \to F_1$ 是相应的射影，则 $p_1$ 的核是 $F_2$，且 $p_1$ 可典则分解为 $E \to E/F_2 \xrightarrow{j_1} F_1$，其中 $j_1$ 是一个双射. 说 $E$ 是 $F_1$ 与 $F_2$ 的拓扑直和意味着 $j_1$ 是连续的 (12.10.6)；或它的逆双射，即典则映射 $\pi_2$: $E \to E/F_2$（它总是连续的）在 $F_1$ 上的限制是双方连续的.

**(12.13.2)** (i) 设 $E$ 是拓扑向量空间. 为使 $E$ 的具有方程 $f(x) = 0$ 的超平面 $H$ 在 $E$ 内是闭的，必须且只须线性形式 $f$ 在 $E$ 内是连续的.

(ii) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$（相应地，$\boldsymbol{C}$）上的 $n$ 维分离拓扑向量空间，$(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 $E$ 的一个基，则 $\boldsymbol{R}^n$（相应地，$\boldsymbol{C}^n$）到 $E$ 上的映射

$$u: (\xi_1, \cdots, \xi_n) \to \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$$

是拓扑向量空间同构.

(iii) 设 $E$ 是拓扑向量空间，$M$ 是 $E$ 的闭向量子空间，$F$ 是 $E$ 的有限维向量子空间，则 $M + F$ 在 $E$ 内是闭的. 特别地，若 $E$ 是分离的，则 $E$ 的有限维向量子空间在 $E$ 内总是闭的.

(iv) 设 $E$ 是拓扑向量空间，$M$ 是 $E$ 的余维数为有限的闭向量子空间，则 $M$ 在 $E$ 内的代数补空间 $N$ 也是它的拓扑补空间.

首先证明 (ii). 由于 $u$ 是连续的且是双射，所以全部问题归结

为证明 $u$ 是双方连续的,或与之等价地(考虑 $E$ 内的开集在 $u$ 下的逆象),证明若 $\mathfrak{O}$ 是与 $\boldsymbol{R}^n$(相应地,$\boldsymbol{C}^n$)的向量空间结构协调且粗于积拓扑 $\mathfrak{O}_0$ 的分离拓扑,则它必与 $\mathfrak{O}_0$ 恒等. 对 $\boldsymbol{R}^n$(相应地,$\boldsymbol{C}^n$)内的点 $x=(\xi_i)$,令 $\|x\|=\sup_i|\xi_i|$,对这个范数考虑球 $B:\|x\|<r$. 具有同一半径的球面 $S$: $\|x\|=r$ 在 $\boldsymbol{R}^n$(相应地,$\boldsymbol{C}^n$)内关于积拓扑 $\mathfrak{O}_0$ 是紧的(3.17.6, 3.20.16 与 3.17.3). 对每个 $z\in S$,存在 $z$ 关于拓扑 $\mathfrak{O}$ 的邻域 $V(z)$ 与 0 关于拓扑 $\mathfrak{O}$ 的邻域 $W(z)$,它们互不相交. 由于 $V(z)$ 也是 $z$ 关于拓扑 $\mathfrak{O}_0$ 的邻域,故存在有限个点 $z_i\in S$,使得相应的 $V(z_i)$ 的并包含 $S$. 设 $U$ 是 0 关于拓扑 $\mathfrak{O}$ 的一个均衡邻域(12.13.1),它包含在对应上述这些 $z_i$ 的 $W(z_i)$ 的交之内,则不可能有点 $x\in U$,使得 $\|x\|\geqslant r$. 因为否则点 $rx/\|x\|$ 就会既属于 $S$,又属于 $U$,而这是不可能的. 因此 $U\subset B$,从而建立了我们的论断(12.2.1).

论断(iv)可直接从(ii)推出. 事实上,集 $\{0\}=M\cap N$ 在 $N$ 内是闭的,从而 $N$ 是分离的(12.8.3). 由于 $E/M$ 也是分离的(12.11.2),而 $N$ 到 $E/M$ 上的典则映射是线性的且是双射,且因 $N$ 与 $E/M$ 又是有限维的,故由(ii),这个典则映射是双方连续的.

(i)中条件的充分性是显然的,它的必要性可由(iv)得到.因为若 $f(a)=1$,则直线 $D=\boldsymbol{R}a$(相应地,$D=\boldsymbol{C}a$)是 $H$ 的代数补空间,从而是拓扑补空间,因此映射 $x\to f(x)a$ 连续,于是由(ii)就导出 $f$ 的连续性.

最后,为证明当 $M=\{0\}$ 时(iii)成立,只须注意根据(ii),$F$ 是局部紧可度量化的子群,再应用(12.9.6)即可. 考虑 $E/M$ 并应用 $E/M$ 内闭集的特征(12.10),即可过渡到一般情形.

论断(ii)还可表述如下: 在($\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上的)有限维向量空间 $E$ 上,只存在唯一的与向量空间结构协调的分离拓扑(向量空间 $\boldsymbol{R}^n$(相应地,$\boldsymbol{C}^n$)的自同态对于积拓扑必是连续的). 这个拓扑称为**典则拓扑**.

**(12.13.3)** 设 $E_1$, $E_2$ 是两个可度量化拓扑向量空间,并且假定 $E_2$ 是完备的;设 $F_1$(相应地,$F_2$)是 $E_1$(相应地,$E_2$)的处处稠密

的向量子空间. 这时 $F_1$ 到 $F_2$ 的每个连续线性映射 $u$ 可唯一地延拓为 $E_1$ 到 $E_2$ 的连续线性映射 $\bar{u}$; 进而若 $E_1$ 也是完备的且 $u$ 是 $F_1$ 到 $F_2$ 上的(拓扑向量空间)同构,则 $\bar{u}$ 是 $E_1$ 到 $E_2$ 上的(拓扑向量空间)同构.

鉴于(12.9.4),问题归结为证明 $\bar{u}$ 是线性的,即对每个 $x \in E_1$ 与每个纯量 $\lambda$, 有 $\bar{u}(\lambda x) = \lambda \bar{u}(x)$; 而这是**恒等式延拓原理**(3.15.1)的推论.

## 14. 局部凸空间

设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间. $E$ 上的**半范数**是 $E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的满足(5.1)的条件(I),(III)与(IV)的映射 $p$. 于是范数就是满足下述条件的半范数 $p$: 对 $E$ 中的 $x \neq 0$, 有 $p(x) \neq 0$. 如果 $p$ 是 $E$ 上的半范数,则 $d(x, y) = p(x - y)$ 就是 $E$ 上的伪距离,它是平移不变的,且对每个纯量 $\lambda$, 有 $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

**(12.14.1)** 设 $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是向量空间 $E$ 上的半范数族,且它的上包络 $p = \sup\limits_{\alpha} p_\alpha$ 在 $E$ 上有限,则 $p$ 是 $E$ 上的半范数.

事实上,显然有 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, 且对一切 $\alpha \in I$, 有

$$p_\alpha(x + y) \leqslant p_\alpha(x) + p_\alpha(y) \leqslant p(x) + p(y),$$

从而 $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

**(12.14.2)** 设 $p$ 是拓扑向量空间 $E$ 上的半范数,则下列条件等价:

a) $p$ 是连续的.

b) 存在 0 的邻域 $V$, 使得 $p$ 在 $V$ 内有界.

显见 a) 蕴涵 b). 反之,若当 $x \in V$ 时有 $p(x) \leqslant a$, 则对每个 $x_0 \in E$, $|p(x) - p(x_0)| \leqslant p(x - x_0) \leqslant a\varepsilon$ 对一切 $x \in x_0 + \varepsilon V$ 成立,从而 $p$ 在 $E$ 内连续.

**(12.14.3)** 设 $E$ 是向量空间, $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 $E$ 上的任一半范数族,则由伪距离 $d_\alpha(x, y) = p_\alpha(x - y)$ $(\alpha \in I)$ 所定义的拓扑(12.4)与 $E$ 的向量空间结构协调.

根据定义，本命题的证明与(4.1.1)、(5.1.5)中的证明相同。

我们也把由伪距离族 $(d_\alpha)_{\alpha\in I}$ 所定义的拓扑称为**由半范数族 $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ 所定义的拓扑**. 如果 $E$ 上的两个半范数族定义相同的拓扑,就称这两个族**等价**(参阅(12.14.12)). 一个拓扑向量空间，如果它的拓扑可由一个半范数族来定义，就称为**局部凸的**. 若 $(p_\alpha)$ 是定义局部凸空间 $E$ 的拓扑的半范数族,则考虑集

(12.14.3.1) $W((\alpha_i);r)=\{x\in E\,|\,p_{\alpha_i}(x)<r,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$,

其中 $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 取遍指标 $I$ 的有限族的集,而 $r$ 取遍正数集,就得到 $E$ 中 0 的一个基本邻域系.

**(12.14.4)** 设 $E$ 是向量空间，$(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $E$ 上的半范数族. 则为使族 $(p_\alpha)$ 所定义的拓扑是分离的，必须且只须对 $E$ 内每个 $x\neq 0$，存在 $\alpha\in I$，使得 $p_\alpha(x)\neq 0$.

这是(12.4.4)的推论.

这样,向量空间 $E$ 上的半范数 $p$ 是范数,等价于只由这个半范数所定义的拓扑是分离的.

**(12.14.5)** 一个分离局部凸空间，如果它的拓扑可由半范数的一个可数族定义,则它是可度量化的.

这是(12.4.6)的推论.

一个分离局部凸空间，如果它的拓扑可由半范数的一个可数族定义,并且它对 $E$ 上任一平移不变距离(12.9.2)是完备的,就称为 **Fréchet 空间**. 因而 Banach 空间(5.1)是 Fréchet 空间.

**(12.14.6)** 例. 设 $X$ 是可分的局部紧的可度量化空间，$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 是 $X$ 到 $\mathbf{C}$ 的连续映射的集,显然它是 $\mathbf{C}$ 上的一个向量空间. 设 $(U_n)$ 是 $X$ 内的相对紧开集的一个序列,满足(3.18.3)的条件. 对每个连续函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 与每个整数 $n$，令

$$p_n(f)=\sup_{x\in U_n}|f(x)|. \tag{12.14.6.1}$$

显见 $p_n$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 上的半范数(然而,如果 $X$ 不是紧的，它就不是范数);此外,对 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 内的每个非零函数 $f$，存在 $x\in X$，使得 $f(x)\neq 0$，且存在 $n$，使得 $x\in U_n$，从而 $p_n(f)\neq 0$. 因此这样

定义的局部凸空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 是可度量化的. 进而，$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 中的序列 $(f_k)$ 是 Cauchy 序列是指(基于 (12.9.2))，对每个整数 $n$，相应的限制 $f_k|\overline{U}_n$ 所成的序列是 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\overline{U}_n)$ 中的 Cauchy 序列 (7.2.1)；即它在 $\overline{U}_n$ 内一致收敛于 $\overline{U}_n$ 到 $\mathbf{C}$ 的一个连续映射 $g_n$. 显然 $g_{n+1}|\overline{U}_n = g_n$，故存在连续函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$，使得它在每个 $U_n$ 上的限制等于 $g_n$ 在 $U_n$ 上的限制. 易见对一切 $n$，有

$$\lim_{m\to\infty} p_n(f-f_m)=0,$$

从而 $f$ 是 Cauchy 序列 $(f_m)$ 的极限，这样我们证明了 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 是 Fréchet 空间. 当 $X$ 为紧空间时，又得到 (7.2) 中定义的 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$. 此外，命题 (7.4.4) 可推广为

**(12.14.6.2)** Fréchet 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 是可分的. 明确地说，在 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 内存在处处稠密的可数子集，它由具紧支集的连续函数组成.

事实上，采用前面的记号，基于 (7.4.4)，对每个整数 $n$，在 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\overline{U}_n)$ 中存在处处稠密的序列 $(h_{mn})_{m\geqslant 1}$. 把 Tietze-Урысон 定理 (4.5.1) 用于 $X$ 内的闭集 $\overline{U}_n\cup \complement U_{n+1}$，可知存在 $X$ 到 $\mathbf{C}$ 的连续映射 $g_{mn}$，它的支集包含在 $\overline{U}_{n+1}$ 内(因而是紧的)，并且在 $\overline{U}_n$ 上与 $h_{mn}$ 相等. 于是对每个 $\varepsilon>0$、每个函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 与每个整数 $n$，存在整数 $m$，使得 $p_n(f-g_{mn})\leqslant\varepsilon$. 由于半范数序列 $(p_n)$ 是递增的，鉴于 (12.14.3.1) 与 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 上拓扑的定义，就证明了本命题.

**(12.14.6.3)** 附注. 上述推理还表明，若 $\operatorname{Supp}(f)\subset U_n$，则 $f$ 是函数序列 $(g_{mn})$ ($g_{mn}$ 的支集都包含在 $U_{n+1}$ 内)的极限.

**(12.14.7)** 设 $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是向量空间 $E$ 上的一个半范数族，则对 $I$ 的每个有限子集 $H$，$p_H=\sup\limits_{\alpha\in H} p_\alpha$ 还是 $E$ 上的半范数 (12.14.1). 由于 (12.14.3.1) 中所定义的集 $W((\alpha_i);r)$ 是使得 $p_H(x)<r$ (这里 $H$ 是 $\alpha_i$ 的集)的 $x\in E$ 的集，故当 $H$ 取遍 $I$ 的有限子集的族时，半范数族 $(p_H)$ 等价于族 $(p_\alpha)$. $E$ 上半范数的一个集 $\Gamma$ 称为**有向集**，如果对属于 $\Gamma$ 的两个半范数 $p'$, $p''$，存在属于 $\Gamma$ 的半范数 $p$，使得

$$p \geqslant \sup(p', p'').$$

于是我们看到，局部凸空间的拓扑总可以由半范数的有向集来定义.

设 $E$ 是局部凸空间，其拓扑由半范数集 $\Gamma$ 定义. 对每个向量子空间 $F$，显然 $E$ 的拓扑在 $F$ 上的诱导拓扑由属于 $\Gamma$ 的半范数在 $F$ 上的限制所成的集定义. 另一方面，我们有:

**(12.14.8)** 设 $E$ 是向量空间，$F$ 是 $E$ 的向量子空间，$\pi$: $E \to E/F$ 是典则同态，于是

(i) 设 $p$ 是 $E$ 上的半范数，若对每个 $\dot{x} \in E/F$，令

**(12.14.8.1)** $$\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{\pi(z)=\dot{x}} p(z),$$

则 $\dot{p}$ 是 $E/F$ 上的半范数.

(ii) 设 $\Gamma$ 是半范数的一个有向集，且赋予 $E$ 以 $\Gamma$ 所定义的拓扑，则 $E/F$ 上的商拓扑 (12.11) 由半范数 $\dot{p}$ 所定义，其中 $p$ 取遍 $\Gamma$.

事实上，对于 (i)，显然有

$$\dot{p}(\lambda\dot{x}) = \inf_{\pi(z)=\dot{x}} p(\lambda z) = |\lambda| \inf_{\pi(z)=\dot{x}} p(z) = |\lambda| \dot{p}(\dot{x}),$$

因而问题归结为证明三角不等式. 设 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 是 $E/F$ 的两个元，对 $u \in \dot{x}$，$v \in \dot{y}$，我们有 $p(u+v) \leqslant p(u) + p(v)$；由于 $u + v \in \dot{x} + \dot{y}$，因而得到 $\dot{p}(\dot{x}+\dot{y}) \leqslant p(u) + p(v)$. 又由 (2.3.11)，有

$$\inf_{u\in\dot{x}, v\in\dot{y}} (p(u) + p(v)) = \dot{p}(\dot{x}) + \dot{p}(\dot{y}),$$

这就完成了 (i) 的证明.

对于 (ii)，设 $r > 0$，$U$ 是使得 $p(x) < r$ 的 $x \in E$ 的集. 由定义 (12.14.8.1) 立即得到，$\pi(U)$ 是使得 $\dot{p}(\dot{x}) < r$ 的 $\dot{x} \in E/F$ 的集. 因为 $\Gamma$ 是有向集，所以当 $p$ 取遍 $\Gamma$，$r$ 取遍正数集时，集 $U$ 形成 $E$ 中 0 的基本邻域系. 这样 (ii) 的结论就由 $E/F$ 中邻域的定义 (12.11)得到.

当我们把 $E/F$ 看作局部凸空间时，如果没有相反的声明，总是赋予它 $E$ 对于 $F$ 的商拓扑.

**(12.14.9)** Fréchet 空间的闭向量子空间是 Fréchet 空间. Fréchet

空间对于它的闭向量子空间的商空间是 Fréchet 空间。

第一个论断由 (12.14.8) 之前的论断与 (3.14.5) 得到；第二个论断由 (12.14.8) 与 (12.11.3) 得到。

**(12.14.10)** 附注．设 $E$ 是赋范空间，$F$ 是 $E$ 的闭向量子空间，则由 (12.14.4)，(12.14.8) 与 (12.11.2) 得知，

**(12.14.10.1)** $$\|\dot{x}\| = \inf_{z \in \dot{x}} \|z\| = d(0, \dot{x})$$

是 $E/F$ 上定义商拓扑的范数(在上面的 $d(0, \dot{x})$ 中，把 $\dot{x}$ 看作向量空间 $E$ 中方向为 $F$ 的线性簇)。 当我们把 $E/F$ 看作赋范空间时，如果没有相反的声明，它的范数总如上述。

更特别地，假定 $E$ 是 Hilbert 空间． 若 $F$ 是 $E$ 的闭子空间，$F' = P_F^{-1}(0)$ 是正交于 $F$ 的子空间 (6.3.1)，则 $\pi$: $E \to E/F$ 在 $F'$ 上的限制(它是 $F' \to E/F$ 的线性双射)是一个等距，因为根据 Pythagoras 定理，对一切 $z \in F$ 与一切 $x' \in F'$，有

$$\|x' + z\|^2 = \|x'\|^2 + \|z\|^2,$$

从而 $\|x'\|$ 是 $x' + F$ 的元的范数的下确界．因此，在这种情形下，可以使 $E/F$ 等同于 Hilbert 空间 $F'$。

**(12.14.11)** 设 $E$, $E'$ 是两个局部凸空间，$\Gamma$ 是定义 $E$ 的拓扑的半范数有向集，$\Gamma'$ 是定义 $E'$ 的拓扑的半范数集，$u$ 是 $E$ 到 $E'$ 的线性映射，则下列陈述是等价的：

a) $u$ 连续；

b) 对每个半范数 $p' \in \Gamma'$，存在 0 在 $E$ 内的邻域，使在其中函数 $x \to p'(u(x))$ 有界(或者等价地 (12.14.2)，$E$ 上的半范数 $p' \circ u$ 连续)；

c) 对每个半范数 $p' \in \Gamma'$，存在半范数 $p \in \Gamma$ 与正数 $c$，使对一切 $x \in E$，有

**(12.14.11.1)** $$p'(u(x)) \leqslant c \cdot p(x).$$

基于 $E$ 与 $E'$ 中 0 的邻域的定义，条件 (c) 蕴涵 $u$ 在点 0 处连续，从而 $u$ 处处连续 (12.8.4)，即 c) 蕴涵 a)． 条件 a) 蕴涵实值函数 $p' \circ u$ ($p'$ 在 $E'$ 内是连续的)在 $E$ 内连续，从而蕴涵 b)．最后，

假定 b) 满足，于是由假设，存在两个正数 $r$，$a$ 与半范数 $p \in \Gamma$，使由关系 $p(x) \leqslant r$ 可推出 $p'(u(x)) \leqslant a$. 设 $x$ 是 $E$ 中任一点，$\lambda$ 是正数，使得 $p(\lambda x) = \lambda p(x) \leqslant r$；由此得到 $p'(u(\lambda x)) \leqslant a$，从而 $p'(u(x)) \leqslant a/\lambda$. 若 $p(x) = 0$，则 $\lambda$ 可以取得任意大，因此

$$p'(u(x)) = 0;$$

若 $p(x) > 0$，则可取 $\lambda = r/p(x)$，从而有 $p'(u(x)) \leqslant (a/r) \cdot p(x)$；在所有情形下，关系 (12.14.11.1) 对 $c = a/r$ 成立. 证毕.

**(12.14.11.2)** 对于局部凸空间的积 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 到局部凸空间 $E'$ 的多重线性映射 $u$，$u$ 的连续性同样蕴涵如下事实：对每个半范数 $p' \in \Gamma'$，在 $E_j$ 中存在 0 的邻域 $V_j (1 \leqslant j \leqslant n)$，使得

$$(x_1, \cdots, x_n) \to p'(u(x_1, \cdots, x_n))$$

在集 $V_1 \times \cdots \times V_n$ 内有界. 设 $\Gamma_j$ 是定义 $E_j$ 的拓扑的半范数有向集$(1 \leqslant j \leqslant n)$，则由后一条件可推出，存在正数 $a$，$r_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 与半范数 $p_j \in \Gamma_j (1 \leqslant j \leqslant n)$，使由关系 $p_j(z_j) \leqslant r_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 可得到 $p'(u(z_1, \cdots, z_n)) \leqslant a$. 设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 中任一点，且对每个 $j$，设正数 $\lambda_j$ 使得 $p_j(\lambda_j x_j) = \lambda_j p_j(x_j) \leqslant r_j$，则由此推出

$$p'(u(x_1, \cdots, x_n)) \leqslant a/\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

从而，若对某个 $j$ 有 $p_j(x_j) = 0$，则 $\lambda_j$ 可以取得任意大，故 $p'(u(x_1, \cdots, x_n)) = 0$. 不是这种情形时，可取 $\lambda_j = r_j/p_j(x_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$，若令 $c = a/r_1 r_2 \cdots r_n$，即得对一切点 $(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$，有

**(12.14.11.3)** $\quad p'(u(x_1, \cdots, x_n)) \leqslant c \cdot p_1(x_1) \cdots p_n(x_n).$

反之，若对每个半范数 $p' \in \Gamma'$，存在半范数 $p_j \in \Gamma_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 与正数 $c$，使得关系 (12.14.11.3) 在 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 内成立，则显然 $u$ 在点 $(0, \cdots, 0)$ 处连续. 写

$$u(x_1, \cdots, x_n) - u(b_1, \cdots, b_n) = \sum_H u(y_1, \cdots, y_n),$$

这里 $H$ 取遍 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $2^n - 1$ 个异于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集所成的集，且对每个 $H$，若 $j \in H$，则令 $y_j = b_j$，若 $j \notin H$，则令

$y_i = x_i - b_i$；由此即知 $u$ 在点 $(b_1, \cdots, b_n)$ 处连续，从而在整个 $E_1 \times \cdots \times E_n$ 内连续.

**(12.14.12)** 设 $\Gamma, \Gamma'$ 是向量空间 $E$ 上的两个半范数集，则为使 $\Gamma$ 所定义的拓扑精于 $\Gamma'$ 所定义的拓扑，必须且只须对每个半范数 $p' \in \Gamma'$，存在属于 $\Gamma$ 的半范数的有限族 $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 与数 $c > 0$，使对一切 $x \in E$，有 $p'(x) \leqslant c \cdot \sup_i p_i(x)$.

对 $u = 1_E$ 应用 (12.14.11) 即得本命题 (12.2.17).

**(12.14.13)** 最后我们指出，在拓扑向量空间 $E$ 内，可以如同赋范空间那样定义**级数**与**收敛级数**的概念(5.2)；性质 (5.2.2),(5.2.3),(5.2.4)与收敛级数的通项趋于 0 等毫无改变，仍然成立. 设 $E$ 是局部凸空间，它的拓扑由半范数族 $(p_\lambda)$ 定义，则以 $x_n$ 为通项的级数在 $E$ 内收敛的必要条件是，对每个 $\varepsilon > 0$ 与数 $\lambda$，存在整数 $n_0$，使对 $n \geqslant n_0$，$q > 0$，有 $p_\lambda(x_{n+1} + \cdots + x_{n+q}) \leqslant \varepsilon$. 当 $E$ 是 Fréchet 空间时，由 Cauchy 准则 (12.9) 得知，所述条件也是充分的.

## 问　　题

1) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ (相应地，$\boldsymbol{C}$) 上的向量空间，$\mathfrak{B}$ 是 $E$ 的子集的一个集，满足 12.3 问题 3 的条件 $(V_{\text{I}})$ 与 $(V_{\text{II}})$，还满足下列条件：

$(EV_{\text{I}})$ 每个集 $V \in \mathfrak{B}$ 是均衡的与吸收的.

$(EV_{\text{II}})$ 对任何 $V \in \mathfrak{B}$ 与 $\boldsymbol{R}$ (相应地，$\boldsymbol{C}$) 内的 $\lambda \neq 0$，有 $\lambda V \in \mathfrak{B}$.

$(EV_{\text{III}})$ 对每个 $V \in \mathfrak{B}$，存在 $W \in \mathfrak{B}$，使得 $W + W \subset V$.

试证，在 $E$ 上存在唯一的拓扑，它与 $E$ 的向量空间结构协调，而且对于这个拓扑，$\mathfrak{B}$ 是 0 的基本邻域系.

2) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，具有可数无限基 $(e_n)$，$\mathfrak{T}$ 是 $E$ 中所有均衡吸收集构成的集. 试证 $\mathfrak{T}$ 不满足问题 1 中的公理 $(EV_{\text{III}})$. (对每个正整数 $n$，设 $A_n$ 是点 $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ 的集，其中 $t_i$ 满足：对 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $|t_i| \leqslant 1/n$. 设 $A$ 是这些 $A_n$ 的并，证明不存在集 $M \in \mathfrak{T}$，使得 $M + M \subset A$.)

3) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的连续映射的向量空间 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})$，对每个满足对一切 $t \in \boldsymbol{R}$，有 $m(t) > 0$ 的连续函数 $m$，以 $V_m$ 表示使得 $|f(t)| \leqslant m(t)$ 对于一切 $t \in \boldsymbol{R}$ 成立的函数 $f \in E$ 的集.

a) 试证 $V_m$ 的集是 0 关于 $E$ 上的某个拓扑 $\mathscr{T}_0$ 的基本邻域系，这个拓扑与 $E$ 的加法群结构协调，但与 $E$ 的向量空间结构不协调.

b) 设 $D$ 是 $E$ 的向量子空间，它由具有紧支集 (12.6) 的函数所组成. 试证 $\mathscr{T}_0$ 在 $D$ 上的诱导拓扑 $\mathscr{T}$ 与 $D$ 的向量空间结构协调，但不是可度量化的.

4) 设 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是拓扑向量空间的任一族，则在积向量空间 $E=\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ 上，$E_\alpha(\alpha\in I)$ 的拓扑的积拓扑 (12.5) 与 $E$ 的向量空间结构协调. 如果每个 $E_\alpha$ 是局部凸的，且 $E_\alpha$ 的拓扑由半范数族 $(p_{\alpha\lambda})_{\lambda\in L_\alpha}$ 所定义，则 $E$ 的拓扑是局部凸的，且由半范数族 $(p_{\alpha\lambda}\circ \mathrm{pr}_\alpha)$ $(\alpha\in I$, 且对每个 $\alpha$, $\lambda\in L_\alpha)$ 定义. 特别是，至多可数个 Fréchet 空间的积是 Fréchet 空间.

5) 设 $p$ 是(实或复)向量空间 $E$ 上的半范数，试证使得 $p(x)=0$ 的 $x$ 的集 $N$ 是 $E$ 的向量子空间；在 $E/N$ 上按 (12.14.8.1) 定义的半范数 $\dot{p}$ 是范数.

设 $E$ 是分离局部凸空间，其拓扑由半范数族 $(p_\alpha)$ 定义. 对每个 $\alpha$，设 $N_\alpha$ 是使得 $p_\alpha(x)=0$ 的 $x$ 所成的子空间. 试证 $E$ 同构于赋范空间族 $(E/N_\alpha)$ 的积的某个子空间，这里在 $E/N_\alpha$ 上取范数 $\dot{p}_\alpha$. 特别是，每个 Fréchet 空间同构于可数个赋范空间的积的某个闭子空间.

6) 在 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间 $E$ 中，称子集 $A$ **吸收**子集 $B$，如果存在 $\alpha>0$，使当 $|\lambda|\leqslant\alpha$ 时，有 $\lambda B\subset A$. 设 $E$ 是拓扑向量空间，集 $B\subset E$ 称为(关于 $E$ 的拓扑向量空间结构的)**有界集**，如果 0 的每个邻域都吸收 $B$.

a) 有界集的闭包是有界的. 有限集是有界的. 若 $A$, $B$ 是两个有界集，则 $A\cup B$ 与 $A+B$ 也都是有界的. 若 $E$ 是可度量化的，则 $E$ 内的准紧集是有界的.

b) 假定 $E$ 是分离的. 为使 $E$ 的子集 $B$ 有界，必须且只须对 $B$ 中的每个点列 $(x_n)$ 与每个趋于 0 的实数列 $(\lambda_n)$，序列 $(\lambda_n x_n)$ 在 $E$ 内趋于 0.

c) 设 $(E_\alpha)$ 是拓扑向量空间族，$E=\prod_\alpha E_\alpha$ 是它的积(问题 4). 为使 $E$ 的子集 $B$ 有界，必须且只须对每个 $\alpha$, $\mathrm{pr}_\alpha(B)$ 在 $E_\alpha$ 内有界.

d) 设 $E$, $F$ 是两个拓扑空间，$f$: $E\to F$ 是连续线性映射，则对 $E$ 的每个有界子集 $B$, $f(B)$ 在 $F$ 内必有界.

7) a) 设 $E$ 是(实或复的)分离拓扑向量空间. 试证，如果在 $E$ 内存在 0 的有界邻域 $V$ (问题 6)，则 $(1/n)V$ ($n$ 取遍正整数) 的集是 0 在 $E$ 内的基本邻域系，从而 $E$ 是可度量化的. 如果 $E$ 还是局部凸的，则它的拓扑可由单个范数定义.

b) 设 $E$ 是可度量化的局部凸空间，其拓扑由半范数的递增序列 $(p_n)$ 所

定义．为使 $E$ 的拓扑可由单个范数定义，必须且只须存在正整数 $N$，使对每个 $n \geqslant N$，存在正数 $k_n$，满足 $p_n \leqslant k_n p_N$．

c）设 $E$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $I=[0,1]$ 上任意次可导的实值函数构成的实向量空间．对每个非负整数 $n$ 与 $f \in E$，令

$$p_n(f)=\sup_{0 \leqslant k \leqslant n}\left(\sup_{t \in I}\left|D^k f(t)\right|\right)$$

（约定 $D^0 f=f$）；试证 $p_n$ 是 $E$ 上的范数，而由范数序列 $(p_n)$ 所定义的拓扑不能由单个范数来定义（参阅（17.1））．

d）设 $E$ 是分离局部凸空间，它的拓扑由一个半范数序列所定义，但不能由单个范数定义．若 $d$ 是定义 $E$ 的拓扑的平移不变距离（12 *.2），试证关于 $E$ 的拓扑向量空间结构为有界的集关于距离 $d$ 也有界；然而存在对于 $d$ 为有界的集，它关于 $E$ 的拓扑向量空间结构却不是有界的．

8）设 $E$ 是可度量化的拓扑向量空间．

a）试证，如果 $E$ 的均衡子集吸收所有收敛于 0 的序列，则它必是 0 在 $E$ 内的一个邻域．由此推断，若 $u$ 是 $E$ 到拓扑向量空间 $F$ 的线性映射，且它把 $E$ 中收敛于 0 的序列映射为 $F$ 中的有界序列，则 $u$ 连续．

b）设 $(B_n)$ 是 $E$ 内的任一有界集序列，试证存在由不等于 0 的纯量构成的序列 $(\lambda_n)$，使得集 $\lambda_n B_n$ 的并是有界的．

9）在拓扑向量空间 $E$ 中，$E$ 的有界子集的一个集 $\mathfrak{B}$ 称为**有界子集基本系**，如果 $E$ 的每个有界子集包含在属于 $\mathfrak{B}$ 的某个有界子集内．试证，如果 $E$ 是可度量化的局部凸空间，它的拓扑不能由单个范数定义，则它不存在可数的有界子集基本系（利用问题 8）．

10）设 $(E_n)_{n \geqslant 1}$ 是赋范空间序列，$E_1$ 不是可分的．设 $F$ 是

$$E=\prod_n E_n$$

的向量子空间，且对每个 $n$，有 $\mathrm{pr}_n(F)=E_n$．试证存在正数 $\delta$ 与 $F$ 中的有界序列 $(x_m)_{m \geqslant 1}$，使在 $E_1$ 上，对每对不同的指标 $i, j$，有 $\|\mathrm{pr}_1 x_i-\mathrm{pr}_1 x_j\| \geqslant \delta$．（注意对每个指标 $n$ 与 $F$ 的每个不可数子集 $A$，存在 $A$ 的不可数子集 $B$，使得 $\mathrm{pr}_n(B)$ 在 $E_n$ 内有界．）

由此推断，如果一个 Fréchet 空间的任何有界子集都是相对紧的，则该空间必是可分的．

11）读者记得，在 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间 $E$ 内，子集 $A$ 称为**凸的**，如果对 $A$ 的每对点 $x, y$ 与 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，恒有 $\lambda x+(1-\lambda) y \in A$（8.5 问题 9）．这时，对

于 $A$ 的点的每个有限序列 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 与每个由满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 的 $n$ 个非负实数组成的序列 $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in A$.

a) 设 $E$，$F$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的两个向量空间，$f$ 是 $E$ 到 $F$ 的仿射线性映射，则 $E$ 的凸子集在 $f$ 下的象是凸集，$F$ 的凸子集在 $f$ 下的逆象也是凸集. 特别是，对 $E$ 上的每个非零线性形式 $g$，由关系 $g(x)>\alpha$，$g(x)\geqslant\alpha$（$\alpha$ 是任何实数）所确定的半空间是凸集.

b) 在 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间 $E$ 内，凸集族的交是凸集. 若 $A$，$B$ 是 $E$ 的两个凸子集，$\alpha$，$\beta$ 是任意的两个实数，则 $\alpha A+\beta B$ 是凸的.

c) 设 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间族，$E=\prod_\alpha E_\alpha$ 是它的积. 对每个 $\alpha\in I$，设 $A_\alpha$ 是 $E_\alpha$ 的非空子集，则为使 $A=\prod_\alpha A_\alpha$ 是凸的，必须且只须每个 $A_\alpha$ 是凸的.

d) 在拓扑向量空间 $E$ 内，凸集 $A$ 的闭包 $\bar{A}$ 与内部 $\mathring{A}$ 是凸的. 如果 $\mathring{A}$ 还是非空的，则 $\bar{A}$ 是 $\mathring{A}$ 的闭包而 $\mathring{A}$ 是 $\bar{A}$ 的内部.

e) 在拓扑向量空间 $E$ 内，为使方程 $g(x)\geqslant\alpha$（这里 $g$ 是 $E$ 上的非零线性形式）所确定的半空间是闭的或具有内点，必须且只须 $g$ 连续. 这时超平面 $g(x)=\alpha$ 是此半平面的边界.

12) a) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，$p$ 是 $E$ 上的半范数. 试证使得 $p(x)<1$（相应地，$p(x)\leqslant1$）的 $x\in E$ 的集是吸收且对称的凸集. 反之，设 $A$ 是 $E$ 内吸收且对称的凸集；对每个 $x\in E$，令 $p(x)=\inf\limits_{\rho>0,\,x\in\rho A}\rho$. 试证 $p$ 是 $E$ 上的半范数，且 $A$ 包含使得 $p(x)<1$ 的点 $x\in E$ 的集而包含在使得 $p(x)\leqslant1$ 的点 $x\in E$ 的集之内.

b) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的拓扑向量空间，$p$ 是 $E$ 上的半范数，则为使满足

$$p(x)\leqslant1$$

的 $x\in E$ 的集 $A$ 是闭的，必须且只须半范数 $p$ 在 $E$ 内下半连续；为使 $A$ 含有内点，必须且只须 $p$ 在点 0 处连续，此时 $p$ 在 $E$ 内连续.

c) 由 b) 推断，为使拓扑向量空间 $E$ 是局部凸的，必须且只须在 $E$ 内存在 $0$ 的凸邻域基本系. 可度量化局部凸空间的拓扑可由至多可数个半范数族来定义.

13) 设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，对 $E$ 的每个子集 $A$，包含 $A$ 的最小凸集称为 $A$ 的**凸包**. 设 $E$ 是拓扑向量空间，则包含 $A$ 的最小闭凸集称为 $A$ 的**闭凸包**；

它也是$A$的凸包的闭包.

a）试证$A$的凸包是形如$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}x_{\alpha}$的点所成的集，这里$(x_{\alpha})$取遍$A$的点的有限族的集，而$\lambda_{\alpha}$是使得$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}=1$的非负数.

b）假定$E$是可度量化的局部凸空间．试证$E$内的准紧集的凸包是准紧集．设$E$是 Fréchet 空间，则紧集的闭凸包是紧集（参阅 13.4 问题 13）.

14）设$E$是$\boldsymbol{R}$上的向量空间，它由满足下述条件的函数$f$所组成：$f$是$I=[0,1]$上的简单函数，在每个满足$t<1$的点$t$处右连续，且$f(1)=0$.对每个正整数$n$，设$V_n$是使得

$$\int_0^1|f(t)|^{1/2}dt\leqslant 1/n$$

的$f\in E$的集．试证这些集$V_n$形成0关于某个可度量化拓扑的基本邻域系，该拓扑与$E$的向量空间结构协调，且对于这个拓扑，这些$V_n$都是有界的，但每个$V_n$的凸包是整个空间$E$.（注意每个函数$f\in E$可写为$f=\frac{1}{2}(g+h)$，其中$g$，$h$属于$E$，且

$$\int_0^1|g(t)|^{1/2}dt=\int_0^1|h(t)|^{1/2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1|f(t)|^{1/2}dt.）$$

由此推断，$E$上的连续半范数必恒等于零；特别是，$E$上的连续线性形式必恒等于零.

15）a）设$E$是$\boldsymbol{R}$上的拓扑向量空间，$H$是$E$中的非空凸开集，$f$是定义在$H$上的凸函数（8.5，问题 8）．试证，为使$f$在$H$内连续，必须且只须存在非空开集$U\subset H$，使得$f$在$U$内是上有界的．特别是，每个在$H$内上半连续的凸函数在$H$内是连续的.

b）给出定义在凸紧集$K\subset\boldsymbol{R}^2$上的凸函数$p$的例子，使得$p$在$K$内下半连续且有界，但在$K$的某个边界点处是不连续的（取$K$为闭圆盘，使得0是它的边界点，并应用问题 12a）中的定义）．由此导出紧凸集$A\supset K$的例，使得$p$可延拓为$A$内的下半连续凸函数，但它在$A$内却是无界的.

16）设$E$是分离局部凸空间，$X$是局部紧的可分度量空间，$d$是$X$上的距离，$A$是$X$的闭子集，$f$是$A$到$E$的连续映射.

a）试证，存在$X-A$的可数覆盖$(U_n)$，它由开集$U_n\subset X-A$所组成且是局部有限的，并且对每个点$a\in\mathrm{Fr}(A)$与$a$在$X$内的每个邻域$V$，存在$a$的邻域$V'\subset V$，使对每个满足$U_n\cap V'\neq\varnothing$的$n$，有$U_n\subset V$.（对每个$x\in X-A$，考虑以

$x$ 为中心,以 $d(x,A)/2$ 为半径的开球并利用(12.6.1).)

b) 设 $(h_n)$ 是 $X-A$ 上从属于覆盖 $(U_n)$ 的单位连续分解(12.6.3). 另一方面,对每个整数 $n$, 设 $b_n$ 是 $U_n$ 的一个点, $a_n$ 是 $A$ 的一个点,满足

$$d(b_n,a_n)\leqslant 2d(b_n,A).$$

若 $x\in A$, 令 $g(x)=f(x)$; 若 $x\in X-A$, 令

$$g(x)=\sum_n h_n(x)f(a_n).$$

试证 $g$ 是 $X$ 到 $E$ 的连续映射, 且是 $f$ 的延拓, 并使得 $g(X)$ 包含在 $f(A)$ 的凸包(问题 13)中.

17) 设 $E,F$ 是两个局部凸空间, $f$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射, $L$ 是 $F$ 的子集, 并且对于 $F$ 的拓扑在 $L$ 上的诱导拓扑而言, $L$ 是可分与可度量化的局部紧子空间,此外,还使得 $f(E)\cap L$ 在 $L$ 内稠密. 试证,对每个在 $F$ 内连续的半范数 $p$ 与每个 $\varepsilon>0$, 存在 $L$ 到 $E$ 的连续映射 $s$, 使对一切 $z\in L$, 有

$$p(z-f(s(z)))\leqslant\varepsilon.$$

(考虑 $L$ 的局部有限可数开覆盖 $(U_n)$, 使对同一个 $U_n$ 内任意两点 $x,x'$, 有 $p(x'-x)\leqslant\varepsilon/2$; 再考虑从属于 $(U_n)$ 的单位连续分解 $(h_n)$; 并对每个 $n$, 考虑 $U_n\cap f(E)$ 内的点 $a_n$. 设 $b_n$ 是 $f^{-1}(a_n)$ 中的点,证明由

$$s(z)=\sum_n b_nh_n(z)$$

所定义的函数是本题的解.)

## 15. 弱拓扑

**(12.15.1)** 设 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是局部凸空间族, 且对每个 $\alpha$, 设 $(p_{\alpha\lambda})_{\lambda\in L_\alpha}$ 是定义 $E_\alpha$ 拓扑的半范数族. 设 $E=\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是积向量空间;对每个 $\alpha\in I$ 与 $\lambda\in L_\alpha$ 以及每个 $x\in E$, 令

**(12.15.1.1)** $$p'_{\alpha\lambda}(x)=p_{\alpha\lambda}(\mathrm{pr}_\alpha x);$$

则 $p'_{\alpha\lambda}$ 是 $E$ 上的半范数,且 $p'_{\alpha\lambda}(\alpha\in I,\lambda\in L_\alpha)$在 $E$ 上定义了 $E_\alpha(\alpha\in I)$ 的拓扑的积拓扑(12.5).

易于直接验证 $p'_{\alpha\lambda}$ 是半范数, 从而第二个论断由可一致化空间的积的定义 (12.5) 得到.

特别是, 当每个 $E_\alpha$ 等于同样的局部凸空间 $F$ 时, $I$ 到 $F$ 的一

切映射所形成的向量空间 $F^I$ 上的积拓扑由半范数

$$f \to p(f(\alpha))$$

组成的族定义，这里 $\alpha \in I$，$p$ 属于定义 $F$ 的拓扑的半范数集 $\Gamma$。这个拓扑称为向量空间 $F^I$ 或它的任一向量子空间上的**简单收敛拓扑**(参阅(12.5))。对于这个拓扑，映射 $f \to f(\alpha)(\alpha \in I)$ 是 $F^I$ 上的连续线性映射，它把 $F^I$ 中的开集映为 $F$ 中的开集 (12.5.2)。如果 $F$ 是分离的，则简单收敛拓扑是分离的 (12.5.7)。因而，拓扑空间 $T$ 到 $F^I$ 的映射 $t \to f_t$ 关于简单收敛拓扑连续等价于(12.5.5)，对每个 $\alpha \in I$，$T$ 到 $F$ 的映射 $t \to f_t(\alpha)$ 都连续。当 $F$ 是 $K$($K$ 是域 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$) 上的 Banach 空间而 $T$ 是 $K^n$ 的开子集时，称 $T$ 到 $F^I$ 的映射 $t \to f_t$ 关于简单收敛拓扑是 **$p$ 次可微的**(相应地，**任意次可微的**，**解析的**)，如果对任何 $\alpha \in I$，$T$ 到 $F$ 的映射 $t \to f_t(\alpha)$ 具有相应的性质。

我们将特别考虑 $F$ 是纯量域 $K$，并取 $I$ 为 $K$ 上的向量空间 $E$ 的情形。我们研究 $K^E$ 的子空间，其元是 $E$ 上的线性形式；对这样的空间 $V$ 上的简单收敛拓扑，我们采用**弱拓扑**这一名称，它由半范数

(**12.15.2**) $$f \to |f(x)|$$

的族所定义，其中 $x$ 取遍 $E$。对每个 $x \in E$，映射 $f \to f(x)$ 是 $V$ 上的线性形式，它关于弱拓扑连续。$V$ 的元的序列 $(f_n)$ 关于弱拓扑收敛于 $f \in V$(就是说对每个 $x \in E$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) 也称为**弱收敛**。说到 $V$ 的子集(在 $V$ 内)为**弱闭**，**弱紧**等时，意义也是如此。$K^E$ 的子集 $B$ 称为**弱有界的**，如果所有形如 (12.15.2) 的半范数在 $B$ 内有界，换言之，如果对每个 $x \in E$，有 $\sup_{f \in B} |f(x)| < +\infty$。同样，我们将把"关于简单收敛拓扑连续(相应地，可微，解析)"，称为**弱连续**(相应地，**弱可微**，**弱解析**)或**纯量连续**(相应地，**纯量可微**，**纯量解析**)。

给定 $K$ (等于 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$) 上的局部凸空间 $E$，$E$ 上的连续线性形式所成的向量空间称为 $E$ 的**对偶空间**，常以 $E'$ 表示。对连续线性形式 $x' \in E'$，代替 $x'(x)$，常用表达式 $\langle x, x' \rangle$ 或 $\langle x', x \rangle$ 表示 $x'$

在点 $x\in E$ 处所取的值. 由于 $E'$ 是 $K^E$ 的向量子空间，所以赋予它半范数 $x'\to|\langle x, x'\rangle|$ 的族定义的弱拓扑；而对每个 $x\in E$，$x'\to\langle x, x'\rangle$ 是 $E'$ 上的弱连续线性形式.

设 $E$ 是 Fréchet 空间，$E_0$ 是在 $E$ 内处处稠密的向量子空间，由(12.9.4)与恒等式延拓原理(3.15.2)得知，映射 $x'\to x'|E_0$ 是 $E$ 的对偶 $E'$ 到 $E_0$ 的对偶 $E_0'$ 上的(代数)同构.

**(12.15.3)** 设 $E$, $F$ 是两个局部凸空间，$E'$, $F'$ 分别是它们的对偶，$u$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射，则 $y'\to y'\circ u$ 是 $F'$ 到 $E'$ 的线性映射，它关于弱拓扑是连续的.

事实上，设 $y'$ 是 $F$ 上的连续线性形式，则 $y'\circ u$ 是 $E$ 上的连续线性形式. 此外，在 $E$ 内给定任何 $x_0$，存在 $y_0\in F$，使对一切 $y'\in F'$，有 $\langle x_0, y'\circ u\rangle=\langle y_0, y'\rangle$，即 $y_0=u(x_0)$. 这样 $y'\to y'\circ u$ 的连续性是(12.14.11)与确定弱拓扑的半范数族的定义(12.15.2)的直接推论.

令 $y'\circ u={}^tu(y')$，并把线性映射 ${}^tu: F'\to E'$ 称为连续线性映射 $u$ 的**转置**；从而，对任何 $x\in E$ 与 $y'\in F'$，成立关系式

**(12.15.4)** $$\langle u(x), y'\rangle=\langle x, {}^tu(y')\rangle.$$

显然，对 $E$ 到 $F$ 的每对连续线性映射 $u_1$, $u_2$ 与一切纯量 $\lambda$，有

**(12.15.5)** $${}^t(u_1+u_2)={}^tu_1+{}^tu_2,\ {}^t(\lambda u)=\lambda\cdot{}^tu.$$

如果 $v$ 是 $F$ 到局部凸空间 $G$ 的连续线性映射，则有

**(12.15.6)** $${}^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv.$$

在局部凸空间的对偶上，弱拓扑一般不是可度量化的(问题2). 但我们有下面的命题:

**(12.15.7)** 设 $E$ 是可分可度量化局部凸空间，则对 $E$ 的对偶 $E'$ 的每个等度连续子集 $H$(7.5)，$H$ 在 $E'$ 内的弱闭包关于弱拓扑是紧可度量化空间.

首先证明下面的引理:

**(12.15.7.1)** 设 $E$ 是可度量化的向量空间，$F$ 是赋范空间. 为使 $E$ 到 $F$ 的线性映射的一个集 $H$ 是等度连续的，必须且只须在 $E$ 中存在 0 的邻域 $V$ 与正数 $c$，使对一切 $x\in V$ 与 $u\in H$，有 $\|u(x)\|\leqslant$

$c$.

（当 $E$ 是赋范空间时，这个条件还等价于 $\sup\limits_{u\in H}\|u\| < +\infty$ (5.7.1).）

所述条件表明$H$在点0处是等度连续的；于是，对每个点 $x_0\in E$ 与每个 $x\in x_0+\varepsilon V$，

$$\|u(x)-u(x_0)\| = \|u(x-x_0)\| \leqslant \varepsilon c$$

对一切 $u\in H$ 成立，从而$H$在点 $x_0$ 处等度连续。

为证明(12.15.7)，首先限于$H$在 $E'$ 内为弱闭的情形。因为若 $\bar{H}$ 是$H$在 $E'$ 内的弱闭包，则由映射 $x'\to\langle x, x'\rangle$ 在 $E'$ 内的连续性推出，如果对一切 $x\in V$ 与 $x'\in H$ 有 $|\langle x, x'\rangle|\leqslant c$，则此不等式对一切 $x\in V$ 与 $x'\in\bar{H}$ 也成立(3.15.4)，由此由(12.15.7.1)即得结论。

现在，设 $(a_n)$ 是在$E$内处处稠密的序列。我们来证明$H$上的弱拓扑由伪距离

$$d_n(x', y') = |\langle a_n, x'-y'\rangle|$$

组成的族所定义。

事实上，由这些伪距离定义的拓扑显然粗于弱拓扑；因而只须证明它还精于弱拓扑。而由定义，点 $x_0'\in H$ 的每个关于弱拓扑的邻域包含$H$的一个子集 $W$，它由满足有限个不等式

**(12.15.7.2)** $\qquad |\langle x_i, x'-x_0'\rangle| < r \quad (1\leqslant i\leqslant m)$

的 $x'\in H$ 所组成，其中 $x_i\in E$ 且 $r>0$。假定$H$满足(12.15.7.1)的条件，取 $\varepsilon>0$，使得 $2\varepsilon c<r/2$。对每个指标 $i$，存在 $a_{n(i)}$，使得 $x_i-a_{n(i)}\in\varepsilon V$。由于(12.15.7.1)，所以对一切 $x'\in H$，有

$$|\langle x_i-a_{n(i)}, x'-x_0'\rangle| \leqslant 2\varepsilon c < r/2,$$

从而由关系 $|\langle a_{n(i)}, x'-x_0'\rangle|<r/2$ 即可推出关系(12.15.7.2)。由于弱拓扑是分离的，故我们已证明了$H$是可度量化的(12.4.6)。更明确地说，上面证明了$H$到积空间 $K^{\mathbf{N}}$（这里 $K=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$）的映射 $x'\to(\langle\ _n, x'\rangle)_{n\geqslant0}$ 是$H$到 $K^{\mathbf{N}}$ 的某个子空间$L$上的同胚。于是问题归结为证明$L$是紧的。

首先，$I$ 的射影是 $K$ 的有界（从而相对紧((3.17.6)与

(3.20.16)) 子集．事实上，对每个指标 $n$，存在 $\lambda_n > 0$，使得 $\lambda_n a_n \in V$，因而对一切 $x' \in H$，有 $|\langle a_n, x'\rangle| \leqslant c/\lambda_n$。由于(12.5.9)，(12.5.4) 与 (3.17.3)，剩下只须证明 $L$ 在 $K^N$ 内是闭的．如果 $(x'_m)$ 是 $H$ 中的点列，使对每个 $n$，序列 $(\langle a_n, x'_m\rangle)_{m\geqslant 1}$ 在 $K$ 中收敛，则由 (7.5.5) 得知，序列 $(x'_m)$ 在 $V$ 内简单收敛．由于对每个 $z \in E$，存在纯量 $\gamma$，使得 $\gamma z \in V$（由此 $\langle z, x'_m\rangle = \gamma^{-1}\langle \gamma z, x'_m\rangle$），所以序列 $(x'_m)$ 在 $E$ 中简单收敛．由于恒等式延拓原理，上述序列的极限 $y'$ 是线性的；根据 (7.5.5)，$y'$ 是连续的，因而是 $H$ 的一个点．证毕．

读者记得，如果 $E$ 是赋范空间，则它的对偶 $E' = \mathscr{L}(E;K)$ 关于范数 $\|x'\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x, x'\rangle|$ 是 Banach 空间 (5.7.3)．由于

$$|\langle x, x'\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|x'\|,$$

所以由这个范数定义的拓扑（有时称它为 $E'$ 上的**强拓扑**）精于 $E'$ 上的弱拓扑．

**(12.15.8)** 设 $E$ 是赋范空间，则 $E'$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $x' \to \|x'\|$ 关于弱拓扑是下半连续的．

事实上，这是弱连续映射 $x' \to |\langle x, x'\rangle|$ 的上包络，其中 $x$ 取遍 $E$ 中的球 $\|x\| \leqslant 1$．于是只须应用 (12.7.7) 即得结论．

设 $(x'_n)$ 是 $E'$ 中弱收敛于 $a'$ 的序列，于是根据 (12.7.13)，有

**(12.15.8.1)** $$\lim_{n\to\infty} \inf \|x'_n\| \geqslant \|a'\|.$$

**(12.15.9)** 设 $E$ 是可分赋范空间，则在 $E'$ 内，任一闭球 $B'$：$\|x'\| \leqslant r$ 关于弱拓扑是紧可度量化空间．

事实上，根据 (12.15.7) 与 (12.15.7.1)，本命题的正确性归结为证明 $B'$ 是弱闭的，而这一点由函数 $x' \to \|x'\|$ 在 $E'$ 内为下半连续得到 (12.7.2)．

现在考虑 Hilbert 空间 $E$ (6.2)．如果对每个 $x \in E$，以 $j(x)$ 表示 $E$ 上的连续线性形式 $y \to (y|x)$，则由 (6.3.2) 得知，$x \to j(x)$ 是 $E$ 到它的对偶 $E'$ 上的半**线性等距**（即有 $j(x_1 + x_2) = j(x_1) + j(x_2)$；且对一切纯量 $\lambda$，有 $j(\lambda x) = \bar{\lambda} j(x)$）．由半范数 $x \to |(a|x)|$（其中 $a$ 取遍 $E$）所定义的拓扑称为 $E$ 上的**弱拓扑**，这样

我们就把 $E'$ 上的弱拓扑"转移"到 $E$ 上；于是这个拓扑粗于由 $E$ 上的范数定义的拓扑（后者称为 Hilbert 空间 $E$ 的**强拓扑**）。由 (12.15.9) 导出：

**(12.15.10)** 在可分 Hilbert 空间中，每个闭球关于弱拓扑是紧可度量化空间。

若 $u$ 是 Hilbert 空间 $E$ (关于强拓扑)的连续自同态，则根据上面的定义与 (12.15.4)、(11.5.1)，对 $E$ 中任何 $x, y$，有

$$(u(x)|y) = \langle u(x), j(y)\rangle = \langle x, {}^t u(j(y))\rangle$$
$$= (x|j^{-1}({}^t u(j(y)))) = (x|u^*(y)),$$

因而 (6.3.2) 有

**(12.15.11)**
$$u^* = j^{-1}\circ{}^t u\circ j.$$

由这个关系式立即得到 (11.5.2)，${}^t u$ 是强连续的且有 $\|{}^t u\| = \|u^*\| = \|u\|$。在 (12.15.11) 中用 $u^*$ 代替 $u$，即见 $E$ 的强连续自同态也是弱连续的(参阅 (12.16.7))。

**(12.15.12)** 在 Hilbert 空间 $E$ 中，为使序列 $(x_n)$ 强收敛于点 $a$，必须且只须它弱收敛于 $a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|a\|$。

所述条件显然是必要的。为证明它的充分性，注意到

$$\|x_n - a\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathscr{R}(x_n|a) + \|a\|^2.$$

由假定，序列 $((x_n|a))$ 收敛于 $(a|a) = \|a\|^2$，所以 $\|x_n - a\|$ 趋于 0。

## 问　　题

1) 设 $E$ 是 $K$ ($K = \mathbf{R}$ 或 $K = \mathbf{C}$) 上的向量空间，$F\subset K^E$ 是向量子空间，其元是 $E$ 上的线性形式。对 $x\in E$，$x'\in F$，我们把 $x'(x)$ 写为 $\langle x, x'\rangle$。给定 $F$ 的元的有限序列 $(x_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$，试证为使这个序列是自由的(附录 4.1)，必须且只须存在 $E$ 的 $n$ 个向量 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 $\langle x_i, x_j'\rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker 符号)。这时 $E$ 是子空间 $V$ 与 $W$ 的直和，其中 $V$ 是由这些 $x_i$ 所生成的 $n$ 维子空间，而 $W$ 是使得 $\langle x, x_i'\rangle = 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的 $x\in E$ 所成的子空间。为使线性形式 $x'\in F$ 满足对一切 $x\in W$，有 $\langle x, x'\rangle = 0$，必须且只须 $x'$ 是这些 $x_i'$ 的线性组合(对 $n$ 用归纳法，同时证明这些论断)。

2) 符号、假定与问题 1 相同，此外还假设，在 $E$ 内不存在向量 $x\neq 0$，使

得 $\langle x,x'\rangle=0$ 对一切 $x'\in F$ 成立.

a) 试证,为使 $F$ 上的弱拓扑是可度量化的,必须且只须 $E$ 具有至多为可数的基(附录 4.1). (注意,如果 $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ 与 $(z_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是由 $E$ 的向量组成的两个有限序列,满足: 在 $F$ 内,关系 $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\langle y_i,x'\rangle|\leqslant 1$ 蕴涵关系

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n}|\langle z_j,x'\rangle|\leqslant 1,$$

则 $z_j$ 是 $y_i$ 的线性组合; 注意,若当 $1\leqslant i\leqslant m$ 时有 $\langle y_i,x'\rangle=0$, 则对 $1\leqslant j\leqslant n$ 也必有 $\langle z_j,x'\rangle=0$, 再在问题 1 中使 $E$ 恒等于 $F$ 上的线性形式 $x'\to\langle x,x'\rangle$ 组成的集,并应用该题的结果.)

b) 由 a) 推断, 在无穷维可分 Hilbert 空间上, 弱拓扑不是可度量化的(参阅 5.9 问题 2).

c) 试证 $F$ 上关于弱拓扑为连续的线性形式均可写为 $x'\to\langle x,x'\rangle$, 其中 $x\in E$ 是唯一确定的(推理过程类似于 a)).

3) a) 设 $A$ 是 Hilbert 空间 $E$ 内的闭凸集 (12.14, 问题 11), $a$ 是 $E$ 的一个点. 试证在 $A$ 内有且仅有一个点 $b$, 使得 $d(a,A)=d(a,b)$ ($a$ 在 $A$ 上的投影); 此外, 对一切 $z\in A$, 有 $(z-b|b-a)\geqslant 0$ (推理过程类似于(6.3.1)).

b) 由 a) 推断, $E$ 内任一闭凸集 $A$ 是如下的闭半空间的交: 这些闭半空间的边界是 $A$ 的支撑超平面 (5.8 问题 3). 由此推断, $A$ 是弱闭的, 并且对 $E$ 内任何凸子集 $C$, $C$ 关于强拓扑的闭包与关于弱拓扑的闭包是相同的. $E$ 内有界且闭的凸子集必是弱紧的.

c) 试证,在 $E$ 内,球面 $S:\|x\|=1$ 关于弱拓扑的闭包是球 $\|x\|\leqslant 1$. 为使 $S$ 的子集关于弱拓扑是紧的,必须且只须它关于强拓扑是紧的(利用(12.15.12)).

d) 设 $U$ 是 $E$ 内的非空开凸集,试证对 $U$ 的每个边界点 $a$, 存在 $U$ 的闭支撑超平面,它通过点 $a$. (这是关于 Hilbert 空间的 **Hahn-Banach 定理**. 考虑由 $U$ 的外点组成的趋于 $a$ 的序列 $(a_n)$, 且对每个 $n$, 考虑 a) 中定义的 $a_n$ 在 $\bar{U}$ 上的投影 $b_n$. 令

$$u_n=(b_n-a_n)/\|b_n-a_n\|,$$

利用 $U$ 有内点 $c$ 这个事实, 并由此推出对一切 $n$ 成立的形如 $(c-b_n|u_n)\geqslant r>0$ 的关系, 证明从序列 $(u_n)$ 中可以选出弱收敛于点 $u\neq 0$ 的子序列。)

e) 假定 $E$ 是可分的,以 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 表示 $E$ 的 Hilbert 基 (6.5.2). 设 $A$ 是点 $\pm e_n/n$ 所成的集的闭凸包(12.14 问题 13). 试证 $A$ 是紧的且其内部为空集; 虽然存在通过 0 的直线 $D$, 使得 $D\cap A=\{0\}$, 但不存在 $A$ 的闭支撑超平

面，使此超平面含有(边界)点 0 .

4) 设 $E$ 是可分实 Fréchet 空间，$p$ 是 $E$ 上的连续半范数.

a) 设 $(a_n)_{n\geq 0}$ 是 $E$ 内的全自由序列 (12.13)；以 $E_n$ 表示由指标 $k\leq n$ 的 $a_k$ 生成的 $n+1$ 维子空间. 就 $n$ 用归纳法证明，对每个 $n$，存在 $E_n$ 上的线性形式 $f_n$，使得 $f_n$ 是 $f_{n+1}$ 在 $E_n$ 上的限制，$f_0(a_0)=p(a_0)$，且对一切 $x\in E_n$ 有 $f_n(x)\leqslant p(x)$. (可以用几何论证法，在 $E_n$ 内考虑 $E_{n-1}$ 的方程为 $f_{n-1}(x)=f_{n-1}(a_0)$ 的超平面 $H$；作 $E_n$ 对 $E_{n-1}$ 的方程为 $f_{n-1}(x)=0$ 的超平面 $H_0$ 的商，对这样得到的平面利用问题 3d).)

b) 由 a) 推断，存在 $E$ 上的连续线性形式 $f$，使得 $f(a_0)=p(a_0)$，且对一切 $x\in E$ 有 $|f(x)|\leqslant p(x)$ (关于可分 Fréchet 空间的 **Hahn–Banach 定理**).

特别地，设 $E$ 是可分 Banach 空间，则对一切 $x\in E$，有

$$\|x\|=\sup_{\|y'\|\leqslant 1}|\langle x,y'\rangle|$$

(在 (5.7.3) 中所定义的对偶 $E'$ 上的范数). 由此推断，设 $E$，$F$ 是两个可分 Banach 空间，$E'$，$F'$ 分别是它们的对偶，$u$: $E\to F$ 是连续线性映射，则

$$\|{}^tu\|=\|u\|.$$

c) 由 b) 推出 Hahn–Banach 定理的几何形式：对 $E$ 内的每个非空开凸集 $A$ 与每个点 $x_0\notin A$，存在方程为 $g(x)-\alpha=0$ 的闭超平面，使在 $A$ 内

$$g(x)-\alpha>0$$

而 $g(x_0)\leqslant\alpha$. (归结为 $0\in A$ 且 $x_0$ 是 $A$ 的边界点的情形. 这时还可假定 $A$ 对于 0 是对称的，从而它是使得 $p(x)<1$ 的 $x$ 的集，这里 $p$ 是某个连续半范数.)

d) 设 $A$，$B$ 是 $E$ 内两个没有公共点的闭凸集，且设其中之一(例如 $A$) 是紧的. 试证存在方程为 $g(x)-\alpha=0$ 的闭超平面 $H$，它严格隔离 $A$ 与 $B$，就是说，在 $A$ 内有 $g(x)>\alpha$，而在 $B$ 内有 $g(x)<\alpha$. (考虑闭集 $A+(-B)$ (12.10.5)，归结为 $A$ 是单点集 $\{0\}$ 的情形；这时在 $E$ 内存在 0 的开凸邻域 $V$，使得 $0\notin B+V$，于是可应用 c).)

e) 由 d) 推断，$E$ 内的闭凸集是一些闭半空间的交；闭线性簇是一些闭超平面的交.

f) 由 e) 推断，为使 $E$ 的向量子空间 $F$ 满足 $\overline{F}\neq E$ (换言之，$F$ 不处处稠密)，必须且只须存在 $E$ 上的连续非零线性形式 $f$，使对一切 $x\in F$，有 $f(x)=0$.

5) 设 $A$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个向量空间中的凸集. 点 $a\in A$ 称为 $A$ 的**端点**，如果不存在这样的线段：它不是单点集且包含在 $A$ 内，并以 $a$ 为它的内点；换言

之，如果关系 $b\in A$，$c\in A$，$a=\lambda b+(1-\lambda)c$，$0<\lambda<1$ 蕴涵 $b=c=a$。

a) 设 $E$ 是 Hilbert 空间，$A$ 是 $E$ 内的有界闭凸集，$\delta>0$ 是它的直径，$a$，$b$ 是 $A$ 的两个点，使得 $\|b-a\|\geqslant(\sqrt{15}/4)\delta$. 试证，存在 $A$ 的支撑超平面 $H$，它与向量 $b-a$ 正交，且 $H\cap A$ 的直径 $\leqslant\delta/2$.

b) 由 a) 推断，$A$ 至少具有一个端点(用归纳法证明).

c) 试证 $A$ 是它的端点集的闭凸包.（关于 Hilbert 空间的 **Krein-Milman** 定理. 首先由 b) 推断，$A$ 的每个闭支撑超平面至少含有一个端点. 然后用反证法，假定 $A$ 的端点集的闭凸包 $B$ 与 $A$ 不同，利用问题 4c) 证明，此时就会存在 $A$ 的支撑超平面，它与 $B$ 不相交.)(参阅 13.10 问题 8.)

d) 给定 $E$ 内的凸集 $C$，称 $C$ 与一个闭(相应地，开)半空间的交为 $C$ 内的一个闭帽(相应地，开帽). 试证，若 $a\in A$ 是端点，则 $A$ 的所有含有 $a$ 的开帽在 $A$ 中形成 $a$ 的基本邻域系.（注意 $A$ 中两个闭帽的并的凸包是弱紧的，且如果这两个闭帽都不含有点 $a$，则这个凸包不含有点 $a$；然后利用问题 4c)与 12.3 问题 6c).)

e) 假定存在弱紧集 $K\subset A$ 且其闭凸包为 $A$，试证 $A$ 的每个端点属于 $K$（利用 d)).

f) 在 Banach 空间 $(c_0)$（5.3 问题 5）中，试证闭球 $\|x\|\leqslant1$ 没有端点.

6) 设 $E$，$F$ 是两个局部凸空间，$(p_\alpha)$ 是定义 $F$ 的拓扑的半范数族，$\mathfrak{S}$ 是 $E$ 的有界子集（12.14 问题 6）的一个集. 对 $E$ 到 $F$ 的每个连续线性映射 $u$ 与每个 $B\in\mathfrak{S}$，令 $p_{\alpha,B}(u)=\sup\limits_{x\in B}p_\alpha(u(x))$. 试证 $p_{\alpha,B}$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射组成的向量空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 上的半范数. 若属于 $\mathfrak{S}$ 的集的位似象的集是 $E$ 的覆盖，则 $\mathscr{L}(E;F)$ 上由这些半范数 $p_{\alpha,B}$ 所定义的拓扑是分离的. 若 $E$ 与 $F$ 是赋范空间，且若取 $\mathfrak{S}$ 为仅含 $E$ 中的球 $\|x\|\leqslant1$ 的单元素，则 $\mathscr{L}(E;F)$ 的上述拓扑就是由范数(5.7.1)所定义的拓扑.

7) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，试证，对于 $\mathscr{L}(E;E)$ 上由范数(5.7.1)定义的拓扑（称为范数拓扑），由满足范数 $\|U\|\leqslant1$ 的算子 $U$（$E$ 的“收缩”)组成的单位球 $\mathscr{C}$ 不是可分的.（注意，如果 $(e_n)_{n\geqslant0}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基，且如果对 Banach 空间 $l^\infty$(5.7问题 1)的每个点 $z=(\zeta_n)_{n\geqslant0}$，使之对应到元 $U_z\in\mathscr{L}(E;E)$，满足：对一切 $n$，有 $U_z\cdot e_n=\zeta_ne_n$，则我们定义了 $l^\infty$ 到 $\mathscr{L}(E;E)$ 的某个子空间上的一个等距线性映射；最后，利用 5.10 的问题.)

8) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间. 在问题 6 的做法中，取 $\mathfrak{S}$ 为 $E$ 的有限子集所成的集，由此得到的拓扑称为 $\mathscr{L}(E;E)$ 上的强拓扑，因而这个拓扑由 $x$ 取遍 $E$ 时范数 $p_x(U)=\|U\cdot x\|$ 组成的族所定义. 它粗于范数拓

扑.

a) 试证这个拓扑不是可度量化的. (注意 $\mathscr{L}(E;E)$ 包含这样的向量子空间: 如果赋予这些子空间强拓扑的诱导拓扑,则它们与赋予弱拓扑的 $E$ 同构.)

b) 赋予强拓扑的 $\mathscr{L}(E;E)$ 中的单位球 $\mathscr{B}$ 是可度量化的与可分的(证法类似于(12.5.7), 把 $\mathscr{B}$ 嵌入到 $E^N$ 内).

c) 试证关于强拓扑,映射 $(U,V)\to UV$ 在 $\mathscr{B}\times\mathscr{L}(E;E)$ 内是连续的, 但在 $\mathscr{L}(E;E)\times\mathscr{B}$ 内不连续.

d) 试证 $\mathscr{B}$ 到自身的映射 $U\to U^*$ 关于强拓扑不是连续的. (设 $(e_n)_{n\geq 0}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基; 考虑算子序列 $(U_k)$, $U_k$ 满足: 若 $n<k$, 则 $U_k\cdot e_n=0$; 若 $n\geq k$, 则 $U_k\cdot e_n=e_{n-k}$.)

e) 试证,在由 $E$ 到自身的线性等距所组成的**酉群** $U(E)\subset\mathscr{B}$ 上, 强拓扑所诱导的拓扑与群的结构协调. 在这个群中给出右 Cauchy 序列而不是左 Cauchy 序列的例子,并证明 $U(E)$ 在 $\mathscr{B}$ 内是闭的.

9) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间. 在问题 6 的做法中, 取 $\mathfrak{S}$ 为 $E$ 的有限子集的集, 赋予 $E$ 弱拓扑, 由此得到的拓扑称为 $\mathscr{L}(E;E)$ 上的**弱拓扑**, 因而这个拓扑由半范数 $p_{x,y}(U)=|(U\cdot x|y)|$ ($x$, $y$ 取遍 $E$) 组成的族所定义. 它粗于强拓扑.

a) 试证这个拓扑不是可度量化的(与问题 8a) 的方法相同).

b) 赋予弱拓扑的 $\mathscr{L}(E;E)$ 的单位球 $\mathscr{B}$ 是可度量化且紧的(用(12.5.7)中的方法).

c) $\mathscr{L}(E;E)$ 内关于弱拓扑与关于范数拓扑的有界集是相同的.

d) $\mathscr{L}(E;E)$ 到自身的映射 $U\to U^*$ 关于弱拓扑是连续的.

e) 试证, $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的映射 $(U,V)\to UV$ 关于弱拓扑不是连续的 (设 $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $E$ 的以 $\mathbf{Z}$ 为指标集的 Hilbert 基, 考虑"移置"算子 $U$ 以及它的幂 $U^n$ 与 $U^{-n}$, $U$ 的定义是: 对每个 $n\in\mathbf{Z}$, 有 $U\cdot e_n=e_{n+1}$). 弱拓扑在酉群 $U(E)$ 上的诱导拓扑与强拓扑在其上的诱导拓扑是相同的, 因而它与群的结构协调; $U(E)$ 在 $\mathscr{B}$ 内关于弱拓扑不是闭的.

f) 试证, 对每个 $U_0\in\mathscr{L}(E;E)$, 线性映射 $V\to U_0V$ 与 $V\to VU_0$ 在 $\mathscr{L}(E;E)$ 内关于弱拓扑是连续的.

g) 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的子广群(即对于为乘法为稳定的集), 试证 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{L}(E;E)$ 上的弱拓扑的闭包是紧广群, 且当 $\mathscr{A}$ 为交换时它也是交换的.

10) 保持问题 9 的记号.

a）设 $U \in \mathscr{C}$，试证关系式 $U \cdot x = x$，$(x|U \cdot x) = (x|x)$ 与 $U^* \cdot x = x$ 是等价的。

b）由此推断 $\mathscr{C}$ 中的幂等算子是正交投影算子（6.3 与 11.5）。

11）设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$\mathscr{M}$ 是含有单位元 $1_E$ 的子广群，且在 $\mathscr{C}$（问题 8 的记号）内为弱闭（从而弱紧）。对每个 $x \in E$，也把 $U$ 取遍 $\mathscr{M}$ 时 $U \cdot x$ 所成的集 $\mathscr{M} \cdot x$ 称为 $x$ 关于 $\mathscr{M}$ 的**轨道**；这是 $E$ 内的弱紧集. $x$ 称为关于 $\mathscr{M}$ 的**消失向量**，如果 $0 \in \mathscr{M} \cdot x$；$x$ 称为关于 $\mathscr{M}$ 的**可逆向量**，如果对每个 $U \in \mathscr{M}$，存在 $V \in \mathscr{M}$，使得 $VU \cdot x = x$。以 $F(\mathscr{M})$（相应地，$R(\mathscr{M})$）表示关于 $\mathscr{M}$ 的消失向量（相应地，可逆向量）的集。若 $x$ 是可逆的，则对一切 $U \in \mathscr{M}$，有 $\|U \cdot x\| = \|x\|$.

a）每个轨道 $\mathscr{M} \cdot x$ 包含一个极小轨道 $N$（12.10 问题 6）；每个 $y \in N$ 关于 $\mathscr{M}$ 是可逆的. 设 $U \in \mathscr{M}$ 满足 $U \cdot x = y \in N$，且设 $\mathscr{A}$ 是由 $1_E$ 与 $U$ 生成的弱闭子广群，则它是交换的. 设 $P \subset \mathscr{A} \cdot y \subset N$ 是关于 $\mathscr{A}$ 的极小轨道，且设 $V \in \mathscr{A}$ 满足 $V \cdot y = z \in P$ 试证存在 $W \in \mathscr{A}$，使得 $VUW \cdot z = z$. 由此推断 $x - W \cdot z$ 是消失向量，从而 $E$ 的每个向量是一个消失向量与一个属于 $\mathscr{M} \cdot x$ 的可逆向量之和.

b）试证，若 $x \in E$ 关于 $\mathscr{M}$ 是可逆的，则它关于任何弱闭子广群 $\mathscr{N}$ 也是可逆的.（把 $x$ 分解为属于 $\mathscr{N} \cdot x$ 的向量 $y \in R(\mathscr{N})$ 与向量 $z \in F(\mathscr{N})$ 的和；利用下述事实：若 $a$，$b$ 是 $E$ 中的两个范数相等的不同向量，则有

$$\left\|\frac{1}{2}(a+b)\right\| < \|a\| = \|b\|,$$

从而推出 $y = x$.）由此推断，若 $x \in R(\mathscr{M})$，则对每个 $U \in \mathscr{M}$，在 $\mathscr{M}$ 的由 $1_E$ 与 $U$ 生成的弱闭子广群内存在 $V$，使得 $VU \cdot x = x$.

c）设 $\mathscr{M}^*$ 是 $U \in \mathscr{M}$ 的伴随算子 $U^*$ 组成的闭广群，则它是弱紧的（问题 9d)），试证 $R(\mathscr{M})$ 与 $F(\mathscr{M}^*)$ 是 $E$ 内的正交互补向量子空间（利用 $b$），归结为 $\mathscr{M}$ 是交换的情形）；由此推断 $F(\mathscr{M})$ 关于 $\mathscr{M}$ 是稳定的.

d）设 $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 $E$ 的向量的一个有限集，且对每个 $i$，设 $x_i = y_i + z_i$，其中 $y_i \in R(\mathscr{M})$，$z_i \in F(\mathscr{M})$. 利用 c）证明，存在 $U \in \mathscr{M}$，使对 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $U \cdot z_i = 0$；然后证明，存在 $V \in \mathscr{M}$，使对 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $VU \cdot y_i = y_i$.（考虑空间 $E^n$ 与 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{L}(E^n; E^n)$ 内的象 $\mu'$，$\mu'$ 由算子 $(t_1, \cdots, t_n) \to (T \cdot t_1, \cdots, T \cdot t_n)$ 组成，这里 $T \in \mathscr{M}$，并利用 $R(\mathscr{M}')$ 是向量子空间这一事实.）由此推断，满足 $W \cdot x_i = W \cdot y_i = y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的 $W \in \mathscr{M}$ 组成的集 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是非空的，因此一切这样的集（这里 $(x_i)$ 取遍 $E$ 的向量的有限序列组成的集）的交是非空的（12.3 问题 6c)）. 最后推断，对应于 $E$ 分解为直和 $R(\mathscr{M}) \oplus F(\mathscr{M})$ 的投影算

于 $P: E \to R(\mathscr{M})$属于 $\mathscr{M}$，从而属于 $\mathscr{C}$；利用问题 10 证明 $R(\mathscr{M})$与 $F(\mathscr{M})$是正交互补向量子空间（**Jacobi 定理**）.

e）试证，对每个 $U \in \mathscr{M}$，存在 $V \in \mathscr{M}$，使对一切 $y \in R(\mathscr{M})$，有 $VU \cdot y = y$（方法与 d）中所用的相同）；换言之，$\mathscr{M}$在映射 $U \to U|R(\mathscr{M})$下的象 $\mathscr{G}$ 是酉群 $U(R(\mathscr{M}))$ 的子群．并证明这个子群的轨道在 $R(\mathscr{M})$ 内是强紧的（参阅问题 3c)），由此推断 $\mathscr{G}$ 在 $\mathscr{L}(R(\mathscr{M}); R(\mathscr{M}))$ 内是强紧的.

f）设 $(e_n)_{n \in Z}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基，$\mathscr{M}$是 $\mathscr{C}$ 的弱紧子广群，它由满足 $U \cdot e_n = e_{n+1}$（对一切 $n \in \boldsymbol{Z}$）的酉算子 $U$ 所生成．试证 $F(\mathscr{M}) = E$，$R(\mathscr{M}) = \{0\}$.

12）记号同问题 9，设$\mathscr{M}$是 $\mathscr{C}$ 的任一含有 $1_E$ 的子广群．对每个 $x \in E$，设 $\Gamma(\mathscr{M} \cdot x)$是 $x$ 关于$\mathscr{M}$的轨道的闭凸包.

a）试证 $\Gamma(\mu \cdot x)$含有在 $\mu$ 作用下为不变的点（参阅问题 3a)）．由此推断，若 $\Phi(\mathscr{M})$是在$\mathscr{M}$作用下不变的向量所成的集，$\Omega(\mathscr{M})$是使得 $0 \in \Gamma(\mathscr{M} \cdot x)$的 $x \in E$ 的集，则 $E$ 的每个向量可写成 $\Phi(\mathscr{M})$中一个向量与 $\Omega(\mathscr{M})$ 中一个向量之和.

b）试证 $\Phi(\mathscr{M})$与 $\Omega(\mathscr{M}^*)$是 $E$ 内的正交互补向量子空间；借助问题 10 推出 $\Phi(\mathscr{M})$与 $\Omega(\mathscr{M})$是 $E$ 内的正交互补向量子空间．由此推断，$\Gamma(\mathscr{M} \cdot x)$只含有一个在$\mathscr{M}$作用下不变的点.

c）由 b）推断，对每个收缩 $U \in \mathscr{C}$ 与每个 $x \in E$，极限

$$\lim_{n \to \infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n-1} U^k \cdot x$$

存在，且它在 $U$ 作用下是不变的（**von Neumann 遍历定理**）.

13）a）设 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间，$V$ 是 $E$ 上的线性形式组成的向量空间，并赋予弱拓扑，$A$ 是 $V$ 内的不含有 0 的弱闭凸集．试证在 $V$ 内存在通过点 0 的弱闭超平面 $H$，$H$ 是满足下述条件的 $f \in V$ 所成的集：对 $E$ 内的某个 $x_0 \neq 0$，有 $f(x_0) = 0$，且对一切 $g \in A$，有 $g(x_0) \geqslant 0$．（利用问题 1，注意到存在 0 的邻域，它包含 $V$ 内的有限余维闭子空间 $W$，且 $A$ 在 $W$ 在 $V$ 内的补空间 $L$ 上的投影与 0 在 $L$ 内的某个邻域不相交，由此归结为 $V$ 是有限维的情形．然后应用问题 3a）的结果．）

b）由此推断，若 $A$ 是 $V$ 内的弱闭凸集，$B$ 是 $V$ 内的弱紧凸集，且 $A$，$B$ 没有公共点，则存在弱闭超平面 $H$，它是满足下述条件的 $f \in V$ 所成的集：存在 $E$ 内的元 $x_0 \neq 0$，使得 $f(x_0) = \alpha$；而对一切 $g \in A$，有 $g(x_0) \geqslant \alpha$，且对一切 $h \in B$，有 $h(x_0) \leqslant \alpha$（考虑凸集 $A + (-B)$）.

c）由 b）推断，为使 $V$ 的向量子空间 $F$ 满足 $\bar{F} \neq V$（即 $F$ 关于弱拓扑不是

处处稠密的)，必须且只须在 $E$ 内存在 $x_0\neq 0$，使对一切 $f\in F$，有 $f(x_0)=0$.

14) 设 $(x_n)$ 是 Hilbert 空间 $E$ 中弱收敛于点 $a$ 的序列. 试证，对每个点 $b\neq a$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-b\|>\liminf_{n\to\infty}\|x_n-a\|.$$

(展开 $\|x_n-b\|^2=\|(x_n-a)+(a-b)\|^2$.)

## 16. Baire 定理及其推论

**(12.16.1) (Baire 定理).** 设 $E$ 是拓扑空间，它的每个点都有一个同胚于某完备度量空间的邻域. 如果 $(U_n)$ 是 $E$ 内的处处稠密开集的一个序列，则这些 $U_n$ 的交在 $E$ 内处处稠密.

只须证明，对每个 $x\in E$ 与 $x$ 的每个邻域 $V$，$V$ 与 $U_n$ 的交非空；因而可以限于 $E$ 自身是完备度量空间的情形，并且(根据(3.14.5))只须证明这些 $U_n$ 的交 $G$ 非空.

设 $d$ 是定义 $E$ 的拓扑的距离，$E$ 关于该距离是完备的. 以下面的方式对 $n$ 用归纳法来构造 $E$ 中的点列 $(x_n)$ 与正数序列 $(r_n)$: $x_1\in U_1$; 对 $n>1$，有 $r_n<1/n$，且闭球 $B'(x_n;r_n)$ 包含在 $U_n\cap B'(x_{n-1};r_{n-1})$ 内. 这是可能的，因为 $U_n$ 处处稠密，所以 $U_n\cap B(x_{n-1},r_{n-1})$ 是 $E$ 内的非空开集. 显见对每个 $n\geqslant 1$ 与 $p>0$，$d(x_n,x_{n+p})\leqslant r_n<1/n$，故 $(x_n)$ 是 $E$ 中的 Cauchy 序列. 由假定，它收敛于某个点 $a$，由于对一切 $p>0$ 有 $x_{n+p}\in B'(x_n;r_n)$，且因 $B'(x_n;r_n)$ 是 $E$ 中的闭集，故对一切 $n$，有 $a\in B'(x_n;r_n)\subset U_n$，从而点 $a$ 属于 $G$. 证毕.

我们将主要对 $E$ 是完备度量空间的开子空间或局部紧可度量化空间的开子空间情形(基于(3.16.1))应用 Buire 定理.

拓扑空间 $E$ 中的集 $A$ 称为**疏的**，如果开集 $E-\overline{A}$ 处处稠密(或等价地，如果 $\overline{A}$ 不包含任何非空开集，或其内部为空集). 例如，在分离空间 $E$ 内，如果单点集 $\{a\}$ 不是开集，即 $a$ 不是 $E$ 的孤立点(3.10.10)，则 $\{a\}$ 是疏的.

在拓扑群 $G$ 内，任何非开的闭子群 $H$ 都是疏的(12.8.7).

拓扑空间 $E$ 中的集 $B$ 称为**瘦的**，如果它是至多可数个疏集的并．由于疏集的闭包按定义也是疏集，故 Baire 定理还可叙述为：在满足 (12.16.1) 的条件的空间 $E$ 中，瘦集的余集是处处稠密的．

例如，在 Fréchet 空间 $E$ 中，异于 $E$ 的闭线性簇，即形如 $a_n+V_n$（这里 $V_n \neq E$ 是 $E$ 的闭向量子空间）的集的可数并具有处处稠密的余集．事实上，由 (12.13.1)，拓扑向量空间 $E$ 的向量子空间，如果它不等于 $E$，就不可能是开的．特别地，Fréchet 空间内的可数集是瘦的，但要注意，这样的集（当空间是可分时）可以是处处稠密的．

**(12.16.2)** 设 $E$ 是拓扑空间，它的每个点都有一个同胚于某完备度量空间的邻域；$u$ 是 $E$ 上的下半连续函数．如果对每个 $x \in E$，有 $u(x) < +\infty$，则在 $E$ 的每个非空开集 $U$ 内，存在非空开集 $V$，使得 $\sup_{x \in V} u(x) < +\infty$．

显然可以限于 $U=E$ 的情形．对每个正整数 $n$，设 $F_n$ 是使得 $u(x) \leqslant n$ 的 $x \in E$ 的集，由假定，它是闭的 (12.7.2)，并且 $E$ 是这些 $F_n$ 的并，从而至少有一个 $F_n$ 不是疏的 (12.16.1)，即 $F_n$ 包含一个非空开集．证毕．

注意，在 (12.16.2) 的假定下，可以有 $\sup_{x \in E} u(x) = +\infty$．例如定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的如下实值函数：当 $x=0$ 时它等于 0，当 $x \neq 0$ 时它等于 $1/x^2$．

特别有：

**(12.16.3)** 在 Fréchet 空间 $E$ 上，任何下半连续半范数是连续的．

事实上，由定义，$E$ 上的半范数 $p$ 在 $E$ 的每个点处取有限值．如果它下半连续，则由 (12.16.2)，存在点 $x_0 \in E$，0 在 $E$ 内的邻域 $V$ 与正数 $c$，使对 $x \in x_0+V$，有 $p(x) \leqslant c$．于是对一切 $z \in V$，有

$$p(z) \leqslant p(x_0) + p(x_0+z) \leqslant c + p(x_0).$$

命题得证 (12.14.2)．

**(12.16.4)** **(Banach-Steinhaus 定理).** 设 $E$ 是 Fréchet 空间，$F$ 是赋范空间，$H$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射组成的一个集。假定对一切 $x \in E$ 有 $\sup_{u \in H} \|u(x)\| < +\infty$，则 $H$ 是等度连续的.

事实上，对一切 $x \in E$ 取有限值的函数 $p(x) = \sup_{u \in H} \|u(x)\|$ 是 $E$ 上的半范数 (12.14.1)，且由于每个函数 $x \to \|u(x)\|$ 在 $E$ 内连续，所以 $p$ 是下半连续的 (12.7.7)，从而所述结论由(12.16.3)与(12.15.7.1) 得到。

由此特别有下面的推论：

**(12.16.5)** (i) 在 (12.16.4)的假定下，设 $(u_n)$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射组成的一个序列，它在 $E$ 内简单收敛于 $E$ 到 $F$ 的映射 $u$，则 $u$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射.

(ii) 更一般地，设 $Z$ 是度量空间，$A$ 是 $Z$ 的子集，$z \to u_z$ 是 $A$ 到 $\mathscr{L}(E;\ F)$ ($E$ 到 $F$ 的连续线性映射所成的空间)的映射. 设 $z_0 \in Z$ 是 $A$ 的触点，且假定对每个 $x \in E$，在 $F$ 内存在极限

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in A} u_z(x) = v(x),$$

则 $v$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射.

我们来证明 (i). 由假定，对一切 $x \in E$，$\sup_n \|u_n(x)\| < +\infty$. 于是由 Banach-Steinshaus 定理，序列 $(u_n)$ 等度连续，因而由 (7.5.5) 得到 $u$ 的连续性. $u$ 是线性的这一事实是恒等式延拓原理的直接推论.

至于 (ii)，由于点 $z_0$ 是 $A$ 中的点列 $(z_n)$ 的极限 (3.13.13)，从而对每个 $x \in E$，$v(x) = \lim_{n \to \infty} u_{z_n}(x)$，现在只须应用(i) 即可得到所需的结论.

**(12.16.6)** 设 $E$ 是 Fréchet 空间，$F$ 是 Banach 空间，$I$ 是 $R$ 内的开区间。设 $\mathscr{L}(E;\ F)$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射空间，赋予简单收敛拓扑 (12.15). 若 $I$ 到 $\mathscr{L}(E;\ F)$ 的映射 $t \to f_t$ 关于简单收敛拓扑是可导的 (12.15)，则存在 $I$ 到 $\mathscr{L}(E;\ F)$ 的映射 $t \to f'_t$，使对一切 $x \in E$，有 $f'_t(x) = D(f_t(x))$.

事实上，$D(f_t(x))$ 是映射 $h \to (f_{t+h} - f_t)/h$ 当 $h \neq 0$ 而趋于 0 时的极限，因而我们的论断由 (12.16.5) 得到。

$f'_{t_0}$ 称为映射 $t \to f_t$ 在点 $t_0$ 处(关于简单收敛拓扑)的**导数**；当 $F$ 是纯量域(从而 $\mathscr{L}(E; F) = E'$)时，也称为**弱导数**.

**(12.16.6.1)** 附注. 设 $A$ 是 $\mathbf{C}$ 的开子集，$z \to f_z$ 是 $A$ 到复 Fréchet 空间 $E$ 的对偶 $E'$ 的弱解析 (12.15) 映射. 作与 (12.16.6) 中同样的推理，即知存在 $z \to f_z$ 的弱导数 $z \to f'_z$，使对一切 $x \in E$，有 $f'_z(x) = D(f_z(x))$，且此弱导数是弱解析的. 此外，对每个 $a \in A$ 与每个包含在 $A - \{a\}$ 内的回路 $\gamma$，有 Cauchy 公式

**(12.16.6.2)** $$j(a; \gamma)f_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_z(x)dz}{z-a}.$$

反之，设 $\gamma$ 是 $\mathbf{C}$ 内定义在 $\mathbf{R}$ 的区间 $I = [b, c]$ 上的路径，$z \to g_z$ 是 $\gamma(I)$ 到 $E'$ 的弱连续映射，则对 $z \notin \gamma(I)$，

**(12.16.6.3)** $$x \to \int_\gamma \frac{g_\zeta(x)d\zeta}{\zeta - z}$$

是 $E$ 上的属于$E'$ 的线性形式 $f_z$. 事实上，对每个 $x \in E$，(12.16.6.3) 的右端是序列 $\dfrac{c-b}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{g_{\zeta_k}(x)\eta_k}{\zeta_k - z}$ 的极限，其中

$$\zeta_k = \gamma\left(b + k\frac{c-b}{n}\right), \quad \eta_k = \gamma'\left(b + k\frac{c-b}{n}\right)$$

((3.16.5) 与 (8.7.8))；于是由 Banach-Steinshaus 定理即得所述结论. 根据 (9.9.2) $f_z$ 在 $\mathbf{C} - \gamma(I)$ 内是弱解析的，并且对 $a \notin \gamma(I)$，我们可写

**(12.16.6.4)** $$f_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)(z-a)^n;$$

右边的级数在每个以 $a$ 为中心，与 $\gamma(I)$ 不相交的圆盘内收敛，而 $c_n \in E'$ 由 $c_n(x) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g_\zeta(x)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$ 给出.

把这个结果应用于 $\gamma$ 是 $A - \{a\}$ 内的回路 $t \to a + re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的情形，对每个在 $A$ 内弱解析的函数 $z \to f_z$，我们得到 **Taylor 公式**

(**12.16.6.5**)
$$f_z(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_a^{(n)}(x)(z-a)^n;$$
右边的级数在圆盘 $|z-a|<r$（不依赖于 $x\in E$）内收敛，在这个圆盘内，其导数由

(**12.16.6.6**)
$$f_a^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_z(x)dz}{(z-a)^{n+1}}$$
给出.

更一般地，假定在 $A-\{a\}$ 内有

(**12.16.6.7**)
$$f_z=\sum_{k=1}^{m}\frac{x_k^*}{(z-a)^k}+g_z,$$
其中 $x_k^*$ 是 $E$ 上的线性形式(事先不必假定它连续)，$z\to g_z$ 是在 $A-\{a\}$ 内弱解析的函数且在 $a$ 的一个邻域内弱有界. 此时由(9.15)得知，对每个 $x\in E$，函数 $z\to g_z(x)$ 都可连续延拓到点 $a$，延拓所得的函数在 $A$ 内解析；因而存在 $A$ 内的弱解析函数 $z\to h_z$，它在 $A-\{a\}$ 上的限制是 $z\to g_z$. 此外，$x_k^*$ 是 $E$ 上的连续线性形式(即 $E'$ 的元). 事实上，对每个 $x\in E$，我们有
$$\langle x_k^*,x\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(z-a)^{k-1}f_z(x)dx,$$
这里 $\gamma$ 是回路 $t\to a+re^{it}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$r$ 充分小且不依赖于 $x$(9.14)；于是我们的论断由上面已经证明的论断(12.16.6.3)得到.

最后注意，由定义立即得到，解析延拓原理(9.4.2)对弱解析函数仍然成立.

(**12.16.7**) 设 $E$ 是 Hilbert 空间，$u$ 是向量空间 $E$(不考虑拓扑结构)的自同态，则下面三个陈述是等价的：

a) $u$ 是连续的；

b) $u$ 是弱连续的；

c) $u$ 具有伴随算子(11.5).

我们已经看到(12.15.11)，a)蕴涵 b). 若 $u$ 弱连续，则对每个 $y\in E$，线性形式 $x\to(u(x)|y)$ 弱连续，而由于强拓扑精于弱拓扑，所以这个线性形式对于强拓扑连续. 因而由(6.3.2)，对每

个 $y\in E$,存在唯一的 $u^*(y)$, 使对一切 $x\in E$, 有

$$(u(x)|y)=(x|u^*(y));$$

这就表明 $u$ 具有伴随算子 (11.5),这样, b) 蕴涵 c). 最后,若 $u$ 具有伴随算子,则有

$$\|u^*(y)\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(x|u^*(y))|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(u(x)|y)|,$$

且每个线性形式 $y\to(y|u(x))=(u(x)|y)$连续,从而 $y\to\|u^*(y)\|$ 是在 $E$ 上下半连续的半范数,故它关于强拓扑连续 (12.16.3). 但这等价于 $u^*$ (强)连续,因而 $u=u^{**}$ 也连续 (11.5.2).

应当注意, 空间 $E$ 完备对 (12.16.4), (12.16.5), (12.16.6) 与 (12.16.7) 的成立起着本质的作用(参阅问题 21 与 22).

**(12.16.8)** **(Banach 定理)**. 设 $E$, $F$ 是两个 Fréchet 空间, $u$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射, 则或者 $u(E)$ 在 $F$ 内是瘦的, 或者 $u(E)=F$. 在第二种情形,若 $N$ 是 $u$ 的核, $E\to E/N\xrightarrow{v}F$ 是 $u$ 的典则分解, 则 $v$ 是 Fréchet 空间 $E/N$ (12.14.9) 到 $F$ 上的同构(换言之 (12.12.7), $u$ 是 $E$ 到 $F$ 上的严格态射).

假定 $u(E)$ 在 $F$ 内不是瘦的; 基于 (12.13.1) 与 (12.12.7), 如果能证明, 对 $E$ 中 0 的每个邻域 $V$, $u(V)$ 是 $F$ 中 0 的邻域, 定理就将得证. 我们分两步进行.

**(12.16.8.1)** 设 $E$, $F$ 是两个拓扑向量空间, $u$ 是 $E$ 到 $F$ 的线性映射, 使得 $u(E)$ 在 $F$ 内不是瘦的, 则对 $E$ 中 0 的每个邻域 $V$, 闭包 $\overline{u(V)}$ 是 $F$ 中 0 的邻域.

事实上, 设 $W$ 是 $E$ 中 0 的均衡邻域, 使得 $W+W\subset V$ ((12.13.1) 与 (12.8.3)); 于是对每个 $x\in E$, 存在整数 $n\geqslant 1$, 使得 $x\in nW$. 因此 $u(E)$ 是集 $u(nW)=n\cdot u(W)$ ($n\geqslant 1$) 的并. 由于 $u(E)$ 不是瘦的,所以集 $n\cdot\overline{u(W)}$ 中至少有一个具有内点, 从而 $\overline{u(W)}$ 同样具有内点. 然而由于 $-u(W)=u(W)$, 故

$$-\overline{u(W)}=\overline{u(W)}.$$

若 $y_0$ 是 $\overline{u(W)}$ 的内点,则 $-y_0$ 也是 $\overline{u(W)}$ 的内点, 从而 $0=y_0+(-y_0)$ 是 $\overline{u(W)}+\overline{u(W)}$ 的内点 (12.8.2). 但 $\overline{u(W)}+\overline{u(W)}$ 包

含在 $u(W)+u(W)=u(W+W)\subset u(V)$ 的闭包内，这就证明了(12.16.8.1)。

现在对 $E$, $E'$ 分别赋予与它们的拓扑协调且平移不变的距离 $d$, $d'$ (12.9.1)。根据(12.6.8.1)，$u(E)$ 在 $F$ 内非瘦的假定导致对每个 $r>0$，存在 $\rho=\rho(r)>0$，使得 $B'(0;\rho)\subset\overline{u(B'(0;r))}$。通过平移可以断言，对每个 $x\in E$，有 $B'(u(x);\rho)\subset\overline{u(B'(x;r))}$。于是只须建立下面的引理：

**(12.16.8.2)** 设 $E$ 是完备度量空间，$F$ 是距离空间，$u$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射，具有下述性质：对每个 $r>0$，存在 $\rho=\rho(r)>0$，使对一切 $x\in E$，有

$$B'(u(x);\rho)\subset\overline{u(B'(x;r))},$$

则对一切 $x\in E$，有 $B'(u(x);\rho)\subset u(B'(x;2r))$。

对每个整数 $n\geqslant 1$，由假定，存在数 $\rho_n>0$，使对一切 $x\in E$，有 $B'(u(x);\rho_n)\subset\overline{u(B'(x;2^{-n+1}r))}$。我们可以取 $\rho_1=\rho$，且(必要时用 $\inf(\rho_n,2^{-n})$ 代替 $\rho_n$)可假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$。设 $x_0$ 是 $E$ 的任一点，$y\in B'(u(x_0);\rho)$，我们来证明 $y\in u(B'(x_0;2r))$。

为此，用归纳法定义 $E$ 中的点列 $(x_n)_{n\geqslant1}$，使对每个 $n\geqslant 1$，有 $x_n\in B'(x_{n-1};2^{-n+1}r)$ 与 $u(x_n)\in B'(y;\rho_{n+1})$。事实上，假定对于指标 $i\leqslant n-1$ 已确定满足这些条件的 $x_i$，从而 $y\in B'(u(x_{n-1});\rho_n)$。由于 $B'(u(x_{n-1});\rho_n)\subset\overline{u(B'(x_{n-1};2^{-n+1}r))}$，所以存在点 $x_n\in B'(x_{n-1};2^{-n+1}r)$，使得 $u(x_n)\in B'(y;\rho_{n+1})$。这表明归纳构造可以继续下去。

序列 $(x_n)$ 是 $E$ 中的 Cauchy 序列，因为对 $n\geqslant 0$，对一切 $p>0$，有

$$d(x_n,x_{n+p})\leqslant 2^{-n}r+2^{-n-1}r+\cdots+2^{-n-p+1}r\leqslant 2^{-n+1}r.$$

由于 $E$ 完备，故这个序列在 $E$ 内收敛于点 $x$，且 $d(x_0,x)\leqslant 2r$。由于 $u$ 连续，故

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u(x_n).$$

又由于 $d'(u(x_n),y)\leqslant\rho_{n+1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=y$。证毕。

这条定理有下面的推论：

**(12.16.9)** 设 $E, F$ 是两个 Fréchet 空间，则 $E$ 到 $F$ 上的连续线性双射是同构.

在这个陈述中，假定 $E$ 与 $F$ 都完备具有本质的意义. 例如，取 $E = L^2_{\mathbf{R}}$ (6.5)，$F$ 是 $E$ 在恒等映射 $E \to \mathscr{B}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{N})$ (7.1) 下的典则象，并赋予 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{N})$ 的拓扑在其上的诱导拓扑. 由于

$$\sum_n \xi_n^2 \geqslant \sup_n \xi_n^2$$

(5.5.1)，所以这个映射是连续的；但 $F$ 到 $E$ 上的逆映射不是连续的；否则，$F$ 就会是完备的，因而在 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{N})$ 内是闭的 (3.14.4)，但这不可能，因为它在 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{N})$ 内的闭包是满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = 0$ 的序列 $(\xi_n)$ 所成的集.

**(12.16.10)** 设 $E, F$ 是两个 Banach 空间，$u$ 是 $E$ 到 $F$ 上的连续线性满射，则存在正数 $m$，使对每个 $x \in E$，有 $x' \in E$，它满足 $u(x) = u(x')$，$\|u(x)\| \geqslant m \cdot \|x'\|$.

事实上，根据 (12.14.8) 与 (5.5.1)，所述条件表明由 $u$ 导出的双射 $E/u^{-1}(0) \to F$ 的逆双射 $F \to E/u^{-1}(0)$ 在 $F$ 内是连续的.

**(12.16.11)(闭图象定理).** 设 $E, F$ 是两个 Fréchet 空间. 为使 $E$ 到 $F$ 的线性映射 $u$ 是连续的，必须且只须它的图象 (1.4) 在积空间 $E \times F$ 内是闭的.

一般地，若 $f$ 是拓扑空间 $X$ 到分离拓扑空间 $Y$ 的连续映射，则它的图象在 $X \times Y$ 内是闭的，因为这个图象是满足关系

$$\mathrm{pr}_2 z = f(\mathrm{pr}_1 z)$$

的 $z \in X \times Y$ 的集，从而我们的论断由 (12.3.5) 得到. 为证明所述条件的充分性，注意由这个条件可以推出，$u$ 的图象 $G$ 作为 Fréchet 空间 $E \times F$ 的闭向量子空间 (3.20.16 (iv))，是一个 Fréchet 空间 (3.14.5). 故 $G$ 到 $E$ 上的射影 $z \to \mathrm{pr}_1 z$ 是连续线性双射，因而是同构 (12.16.9). 由于它的逆映射是 $v: x \to (x, u(x))$，由此得到 $x \to u(x) = \mathrm{pr}_2(v(x))$ 在 $E$ 内连续.

(12.16.11)的条件还可叙述为，若 $E \times F$ 中的序列 $(x_n, u(x_n))$

趋于点 $(x, y)$，则有 $y = u(x)$. 用 $x_n - x$ 代替 $x_n$，利用 $u$ 的线性性质，又得到一个等价的叙述：若 $E$ 中的序列 $(x_n)$ 趋于 0 而序列 $(u(x_n))$ 趋于极限 $y$，则 $y = 0$. 这就是为检验 $u$ 的连续性而实际应用的准则.

最后注意到，Baire 定理的下述推论使我们得以利用准则 (12.11.5).

**(12.16.12)** 设 $G$ 是可分的局部紧可度量化群，连续且可迁地作用于分离拓扑空间 $E$ 上，并且 $E$ 的每个点都有同胚于某完备度量空间的邻域，对每个 $x \in E$，设 $S_x$ 是 $x$ 的稳定化子；于是典则双射 $f_x$: $G/S_x \to E$ 是一个同胚.

设 $x_0 \in E$，问题在于证明，对 $e$ 在 $G$ 内的每个邻域 $V$，$V \cdot x_0$ 是 $x_0$ 在 $E$ 内的邻域 (12.11.5). 设 $W$ 是 $e$ 在 $G$ 内的对称紧邻域，使得 $W^2 \subset V$，$(s_n)$ 是 $G$ 中的处处稠密序列，使得 $(s_n W)$ 是 $G$ 的覆盖. 由于 $s \to s \cdot x_0$ 连续，所以每个集 $s_n W \cdot x_0$ 在 $E$ 内是闭的 (12.3.6)，且 $E$ 是闭集 $s_n W \cdot x_0$ 的序列的并. 基于 Baire 定理 (12.16.1)，存在指标 $n$，使得 $s_n W \cdot x_0$ 具有内点 $s_n s \cdot x_0$ (其中 $s \in W$). 由此得到 (12.10.3)，$x_0$ 是 $s^{-1} s_n^{-1} \cdot (s_n W \cdot x_0) = s^{-1} W \cdot x_0 \subset V \cdot x_0$ 的内点，也即 $V \cdot x_0$ 是 $x_0$ 的邻域. 证毕.

**(12.16.13)** 设 $G$ 是可分的局部紧可度量化群，$G'$ 是可度量化群，$f$: $G \to G'$ 是连续满同态，则 $f$ 是严格态射 (12.12.7) (换言之，若 $H$ 是 $f$ 的核，则典则双射 $g$: $G/H \to G'$ 是拓扑群同构).

事实上，可以把 $G'$ 看作一个空间，而 $G$ 通过运算律 $(s, t') \to f(s)t'$ 连续且可迁地作用于 $G'$ 上. $G'$ 的么元 $e'$ 的稳定化子是 $H$，于是只须应用 (12.16.12) 即得所需的结论.

## 问　　题

1) 设 $E$, $F$ 是两个度量空间，$A$ 是 $E$ 的处处稠密的子空间，$f$ 是 $A$ 到 $F$ 的连续映射. 试证，若 $F$ 是完备度量空间，则 $E$ 中满足下述条件的点所成的集在 $E$ 内是瘦的：$f$ 在这些点处没有相对于 $A$ 的极限 (3.13). (对每个 $n$，考虑满足下述条件的点 $x \in E$ 组成的集：$f$ 在这些点处关于 $A$ 的振幅

(3.14)大于 $1/n$.)

2) 设 $E$, $F$ 是两个完备度量空间, $f$ 是 $E$ 的处处稠密子空间 $A$ 到 $F$ 的处处稠密子空间 $B$ 上的同胚,试证存在 $E$ 的子空间 $C\supset A$(相应地, $F$ 的子空间 $D\supset B$), 使它是可数个开集的交,且存在 $f$ 到 $C$ 上的延拓 $g$, 使得 $g$ 是 $C$ 到 $D$ 上的同胚(对 $f$ 及其逆同胚应用问题 1).

3) 设 $E$ 是完备度量空间, $F$ 是度量空间, $(f_n)$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续映射的一个序列, 它在 $E$ 内简单收敛于映射 $f$. 试证使得 $f$ 在点 $x$ 处不连续的 $x\in E$ 的集在 $E$ 内是瘦的. (设 $G_{p,n}$ 是满足下述条件的 $x\in E$ 的集: 对一切 $q\geqslant p$, $f_p(x)$ 与 $f_q(x)$ 之间的距离 $\leqslant 1/2n$; 利用 Baire 定理证明, $G_{p,n}$ 的内部(对 $p\geqslant 1$)的交是处处稠密的开集;由此推断,使得 $f$ 的振幅 $\leqslant 1/n$ 的点的集包含一个处处稠密的开集.)

推广到只作如下假定的情形: 对每个 $n$, $f_n$ 在瘦集 $M_n$(依赖于 $n$)的余集上的限制是连续的.

4) 设 $E$ 是可分可度量化空间;对 $E$ 的每个子集 $A$, 以 $D(A)$ 表示满足下述条件的 $x\in E$ 的集: 对 $x$ 的每个邻域 $V$, 集 $V\cap A$ 不是瘦的. 我们有 $D(A)\subset\bar{A}$. 为使 $D(A)=\phi$, 必须且只须 $A$ 是瘦的. 试证 $D(A)$ 是闭的且 $A\cap(E-D(A))$ 是瘦的, 且 $D(A)$ 是它的内部的闭包(设 $D'(A)$ 是 $D(A)$ 的内部的闭包,证明 $A\cap(E-D'(A))$ 是瘦的).

5) 设 $G$ 是可分的可度量化群. 试证, 若 $H$ 是 $G$ 的非瘦子群, 则 $\bar{H}$ 是 $G$ 的开子群(采用问题 4 的记号,证明 $D(H)$ 的内部非空).

6) 试证,如果一个完备的可度量化群是可数的,则它必是离散的.

7) 设 $G$ 是可分的局部紧可度量化群, $H$ 是 $G$ 的正规闭子群, $A$ 是 $G$ 的闭子群. 试证典则双射 $A/(A\cap H)\to AH/H$ 是拓扑群同构.

8) 设 $E$, $F$, $G$ 是三个度量空间, $d$, $d'$, $d''$ 分别是 $E$, $F$, $G$ 上的距离, $f$ 是 $E\times F$ 到 $G$ 的映射,使对每个 $x_0\in E$, $f(x_0,\cdot)$ 在 $F$ 内连续, 且对每个 $y_0\in F$, $f(\cdot,y_0)$ 在 $E$ 内连续.

a) 对每个 $\varepsilon>0$, 每个点 $b\in F$ 与每个 $x\in E$, 设 $g(x;b,\varepsilon)$ 是满足下述条件的数 $\alpha>0$ 的上确界: 关系 $d'(b,y)\leqslant\alpha$ 蕴涵 $d''(f(x,b),f(x,y))\leqslant\varepsilon$. 试证 $x\to g(x;b,\varepsilon)$ 是上半连续的.

b) 设 $E$ 是完备的,由 a) 推断,对每个 $b\in F$, 存在瘦集 $M_b\subset E$, 使对一切 $a\notin M_b$, 函数 $f$ 在点 $(a,b)$ 处是连续的.

设 $F$ 也是完备的, 试证在 $E\times F$ 内存在瘦集 $N$, 使得 $f$ 在 $(E\times F)-N$ 上的限制是连续的. (对每个 $k$, 考虑使得 $f$ 的振幅 $<1/k$ 的点的集, 利用

12.7 问题 4.)

c) 设 $E, F, G$ 是 Fréchet 空间，$f$ 是 $E \times F$ 到 $G$ 的双线性映射，使对每个 $x_0 \in E$ 与 $y_0 \in F$，线性映射 $f(x_0, \cdot)$ 与 $f(\cdot, y_0)$ 连续，试证 $f$ 在 $E \times F$ 内连续。

9) 设 $G$ 是群，$d$ 是 $G$ 上的距离，且由 $d$ 所定义的拓扑使 $G$ 成为完备可分局部紧度量空间. 假定对每个 $x_0 \in G$，映射 $y \to x_0 y$ 与 $y \to y x_0$ 在 $G$ 内连续，试证 $d$ 所定义的拓扑与 $G$ 的群结构协调.（首先利用问题 8 证明映射 $(x, y) \to xy$ 是连续的. 然后在 $G \times G$ 内考虑 $(x, x^{-1})$ 所成的集 $F$，这里 $x$ 取遍 $G$. 证明若在 $F$ 上赋予运算律 $(x, x^{-1})(y, y^{-1}) \to (xy, y^{-1}x^{-1})$ 与 $G \times G$ 的拓扑在 $F$ 上的诱导拓扑，则 $F$ 是拓扑群，且是 $G \times G$ 内的闭集. 最后，利用(12.16.12)证明 $\mathrm{pr}_1$ 在 $F$ 上的限制是双方连续的，由此推断 $x \to x^{-1}$ 在 $G$ 内连续.）

10) 设 $T$ 是度量空间，$E$ 是 Fréchet 空间，$M$ 是 $E \times T$ 到可度量化拓扑向量空间 $F$ 的映射的一个集，满足下列条件：1° 对每个 $t_0 \in T$，当 $f$ 取遍 $M$ 时，映射 $f(\cdot, t_0)$ 组成的集是 $E$ 到 $F$ 的线性映射的一个等度连续集；2° 对每个 $x_0 \in E$，当 $f$ 取遍 $M$ 时，映射 $f(x_0, \cdot)$ 的集是等度连续的. 试证在这些条件下，$M$ 是等度连续的.（给定 $t_0 \in T$ 与 0 在 $F$ 内的均衡闭邻域 $V$，对每个 $x \in E$，设 $d_x$ 是 $T$ 内以 $t_0$ 为中心的满足下述条件的开球的半径的上确界：对这些球内的每个点 $t$，对一切 $f \in M$，有 $f(x, t) - f(x, t_0) \in V$. 用反证法证明 $x \to d_x$ 在 $E$ 内上半连续，然后利用 (12.16.2).）

11) 设 $E, F$ 是两个 Fréchet 空间，$G$ 是 Banach 空间，$(f_n)$ 是 $E \times F$ 到 $G$ 的连续双线性映射的一个序列. 假定对每个 $(x, y) \in E \times F$，序列 $(f_n(x, y))$ 在 $G$ 内有界. 试证，如果对 $E \times F$ 的处处稠密子集 $D$，序列 $(f_n(x, y))$ 在每个 $(x, y) \in D$ 处收敛；则序列 $(f_n)$ 在 $E \times F$ 内简单收敛，且其极限函数连续（利用问题 10 与 (7.5.5)).

12) 设 $E$ 是使得以 $\xi_n$ 为通项的级数收敛的实数序列 $x = (\xi_n)_{n \geq 0}$ 组成的空间，令 $\|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k \right|$.

a) 试证 $\|x\|$ 是 $E$ 上的范数，且 $E$ 关于这个范数是完备的.

b) Banach 空间 $l^1$ (5.7 问题 1) 在 $E$ 内关于范数 $\|x\|$ 是稠密的；如果赋予 $l^1$ 范数 $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$，则典则单射 $l^1 \to E$ 是连续的.

c) 设 $(P_n)$ 是 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ 的有限子集的一个递增序列，并且它形成 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ 的覆盖. 对每个 $x = (\xi_n) \in E$ 与每个 $y = (\eta_n) \in l^1$，设

$$f_n(x, y) = \sum_{(i,j)\in P_n} \xi_i \eta_j,$$

则为使序列 $(f_n)$ 在 $E\times l^1$ 内简单收敛，必须且只须对每个$(x,y)\in E\times l^1$，序列 $(f_n(x,y))$ 有界；此时对每个 $(x,y)\in E\times l^1$，$(f_n(x,y))$ 的极限等于

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\right).$$

（取 $D = l^1\times l^1$，利用问题 11.）

d）对每个 $j\in \boldsymbol{N}$，设 $p_{jn}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的满足下述条件的闭区间的最小个数：这些闭区间的并是截面 $P_n^{-1}(j)$ （$P_n \cap (\boldsymbol{N}\times\{j\})$ 的射影），并设 $\rho_n = \sup\limits_{j\in \mathbf{N}} \rho_{jn}$.

试证 c) 中的条件等价于 $\sup\limits_n \rho_n < +\infty$.（设 $\varphi_{P_n}$ 是 $P_n$ 的特征函数，试证双线性形式 $f_n$ 的范数（5.7.7）是 $\sup\limits_{j\in N}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} |\varphi_{P_n}(i, j) - \varphi_{P_n}(i+1, j)|.\right)$（**Mertens–Alexiewicz 定理**）.

13）从代数的角度，Banach 空间 $l^1$（5.7问题 1）是空间 $l^2$（6.5）的向量子空间，若 $\|x\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 分别是 $l^1$ 与 $l^2$ 上的范数，则对一切 $x\in l^1$，有

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1.$$

试证，在空间 $l^2$ 内，虽然 $l^1$ 的单位球 $B$：$\|x\|_1\leqslant 1$ 与每个有限维线性簇的交是闭的，但 $B$ 关于范数 $\|x\|_2$ 却不是闭的（利用（12.16.3））.

14）设 $E$ 是 Fréchet 空间，$F$ 是赋范空间. 试证，若 $H$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续线性映射的一个非等度连续的集，则使得 $H(x)$（它是 $u$ 取遍 $H$ 时 $u(x)$ 组成的集）在 $F$ 内无界的 $x\in E$ 的集是一个瘦集的余集. 由此推断，若 $(F_n)$ 是 Banach 空间序列，且对每个 $n$，$H_n$ 是 $\mathscr{L}(E;F_n)$ 的非等度连续的子集，则存在 $x_0\in E$，使得每个集 $H_n(x_0)$ 都是无界的（**“奇性凝聚原理”**）.

15）设 $(a_{ij})_{i\leqslant j}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $I=[0,1]$ 上的点的一个族. 对每个非负整数 $n$，令 $\omega_n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - a_{in})$，且假定这个多项式的根都不相同. 对 $0\leqslant i\leqslant n$，令 $q_{in}(x) = \omega_n(x)/(\omega_n'(a_{in})(x-a_{in}))$. 对定义在 $I$ 上的每个实值函数 $f$，设 $P_n(f)$ 是 $f$ 相应于 $(a_{ij})$ 的 **Lagrange 插值多项式**，即由

$$P_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(a_{in}) q_{in}$$

所定义的多项式.

a）映射 $f\to P_n(f)$ 是 Banach 空间 $\mathscr{C}(I)$ 到自身的连续线性映射. 为使对于一切 $f\in\mathscr{C}(I)$，多项式序列 $(P_n(f))$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$，必须且只须这些

线性映射的范数 $\|P_n\|$ 所成的序列有界(利用(12.16.5)与(7.5.5)). 试证

$$\|P_n\| = \sup_{x \in I} \left( \sum_{j=0}^{n} |q_{jn}(x)| \right).$$

b) 对 $0 \leqslant i \leqslant n$, 取 $a_{in} = i/n$. 试证 $\|P_n\|$ 所成的序列趋于 $+\infty$. 由此推断, 对于这样选取的 $a_{in}$, 存在函数 $f_0 \in \mathscr{C}(I)$, 使得多项式的序列 $(P_n(f_0))$ 在 $I$ 上不一致有界(利用问题 14).

16) 设 $f$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 的开区间 $I$ 上的连续实值函数, 且在 $I$ 的每个点处具有右导数 $f'_d$ (8.4).

a) 试证使得 $f'_d$ 在 $x$ 的某个邻域内有界的 $x \in I$ 的集是在 $I$ 内处处稠密的开集(利用(12.16.2)).

b) 试证使得 $f'_d$ 在该点处连续的点 $x \in I$ 组成的集是 $I$ 内的一个瘦集的余集(参阅问题 3). 由此推断, $f$ 在 $I$ 内某个瘦集的余集的每个点处可导(参阅 8.6 问题 2).

17) a) 在 Banach 空间 $\mathscr{C}(I)$ (这里 $I = [0, 1]$) 中, 设 $A_n$ 是满足下述条件的函数 $f$ 的集: 对于满足 $0 \leqslant x \leqslant 1 - (1/n)$ 的某个值 $x$ (它依赖于 $f$),

$$|f(x') - f(x)| \leqslant n|x' - x|$$

对满足 $x < x' < x + (1/n)$ 的一切 $x'$ 成立. 试证 $A_n$ 是 $\mathscr{C}(I)$ 内的疏集. (注意, 一方面, 在 $\mathscr{C}(I)$ 内, 每个球含有一个函数, 此函数在 $I$ 内具有有界的右导数. 另一方面, 对每个 $\varepsilon > 0$ 与每个整数 $m$, 存在函数 $g \in \mathscr{C}(I)$, 使得 $g$ 在 $[0,1[$ 的每个点处具有右导数, 且对一切 $x \in [0,1[$, 有 $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ 与 $|g'_d(x)| \geqslant m$.)

b) 由 a) 推断, 设 $A$ 是满足下述条件的函数 $f \in \mathscr{C}(I)$ 的集: 至少有一个点(依赖于 $f$) $x \in [0,1[$, 使得 $f$ 在点 $x$ 处具有右导数, 则 $A$ 在 $\mathscr{C}(I)$ 内是瘦的. 于是, 这个集的余集, 即在 $[0,1[$ 的每个点处都没有右导数的 $f \in \mathscr{C}(I)$ 所成的集, 在 $\mathscr{C}(I)$ 内是处处稠密的(参阅 8.4, 问题 1).

18) 设 $f$ 是定义在开集 $A \subset \boldsymbol{R}^2$ 上的实值函数, 且对每个 $(x_0, y_0) \in A$, 函数 $f(\cdot, y_0)$ 在点 $x_0$ 处连续而函数 $f(x_0, \cdot)$ 在点 $y_0$ 处可导. 试证, 在 $A$ 内存在瘦集 $M$, 使得导数 $D_2 f$ 在 $A - M$ 内连续(利用问题 8b) 与问题 3)).

19) 设 $E$ 是复 Banach 空间, $E'$ 是它的对偶, $E'$ 关于范数(5.7.1)是 Banach 空间. 试证开集 $A \subset \boldsymbol{C}$ 到 $E'$ 的弱解析映射 $z \to f_z$ 实际上在(9.3)的意义下(关于所考虑的范数)是解析的(利用公式(12.16.6.6)与 Banach-Steinhaus 定理.)

20) 设 $Z$ 是完备度量空间, $f$ 是 $Z$ 到可分 Hilbert 空间 $E$ 的弱连续映

射.

a) 试证，对 $E$ 内每个闭凸集 $A$，$f^{-1}(A)$ 在 $Z$ 内是闭的(参阅 12.15 问题 3b)).

b) 对每个整数 $n>1$，设 $D_n$ 是使得 $f$(把它看作一个度量空间到另一个度量空间的映射)的振幅 $\geqslant 1/n$ 的 $z\in Z$ 的集，则 $D_n$ 是闭集(12.7 问题 4). 试证 $D_n$ 在 $Z$ 内是瘦的. (用直径 $\leqslant 1/2n$ 的闭球序列 $(S_k)$ 覆盖 $E$，利用 a) 与 Baire 定理证明，对每个 $k$，$D_n\cap f^{-1}(S_k)$ 是 $Z$ 内的疏闭集.)

c) 由 a) 推断，在 $Z$ 内存在瘦集 $M$，使得 $f$ 在 $Z-M$ 的每个点处是强连续的.

21) 设 $E=\mathscr{K}(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界实值函数组成的 Banach 空间 $\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$ 的子空间，它由具有紧支集的连续函数所组成. 设 $u_n$ 是 $E$ 上的连续线性形式 $f\to\sum_{k=1}^{n}f(k)$. 试证序列 $(u_n)$ 在 $E$ 内简单收敛，但在对偶 $E'$ 内是无界的，且其极限 $u$ 在 $E$ 内不是连续的.

22) 设 $E$ 是 Hilbert 空间 $l^2$ 的子空间，它由具有有限支集的序列 $(\xi_n)$ 所组成，因而 $E$ 是 $l^2$ 中的向量 $e_n$(6.5) 的(有限)线性组合所成的集. 设 $u$ 是 $E$ 的自同态，使对每个 $n$，有 $u(e_n)=ne_n$. 试证对每个 $y\in E$，线性形式 $x\to(u(x)|y)$ 在 $E$ 内连续，但 $u$ 不是 $E$ 的连续自同态.

23) 设 $E$ 是平面 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间，它由直线 $D=\{0\}\times\boldsymbol{R}$ 与点 $(1/n,k/n^2)$ 所组成，这里 $n$ 取遍正整数集而 $k$ 取遍有理整数集 $Z$.

a) 对 $E$ 内每个点 $(0,y)$ 与每个正整数 $n$，设 $T_n(y)$ 是满足 $u\leqslant 1/n$ 与 $|v-y|\leqslant u$ 的点 $(u,v)\in E$ 的集. 试证，如果取这些 $T_n(y)$ 组成的集为点 $(0,y)$ 的基本邻域系，而取单点集为 $E$ 的其他点的基本邻域系，则在 $E$ 上定义了一个分离拓扑 $\mathscr{T}$，关于这个拓扑，每个子空间 $T_n(y)$ 是可度量化的与紧的. 在 $D$ 上的诱导拓扑是离散拓扑.

b) 设 $A$ 是集 $\{0\}\times\boldsymbol{Q}$，它在 $D$ 内是闭的，且它在 $D$ 内的余集 $B$ 也是闭的. 试证，如果关于 $\mathscr{T}$ 的开集 $U$ 包含 $B$，则在 $D$ 内存在区间 $\{0\}\times[a,b]$ $(a<b)$ 与整数 $n$，使得 $U$ 包含对于 $a\leqslant y\leqslant b$ 与 $(0,y)\in B$ 的 $T_n(y)$ 的并(利用这样的事实：集 $\boldsymbol{Q}$ 关于 $\boldsymbol{R}$ 的通常拓扑在 $\boldsymbol{R}$ 内是瘦的). 试证 $A$ 在 $E$ 内的每个邻域都与 $U$ 相交，由此推断，虽然空间 $E$ 包含处处稠密且可数的离散子空间，但它不是可度量化的(利用 (4.5.2)).

24) 设 $(a_n)$ 是实数序列. 试证，如果对属于空间 $l^1$ (5.7 问题 1)(相应地，空间 $l^2$ (6.5)) 的每个实数序列 $(\xi_n)$，以 $a_n\xi_n$ 为通项的级数收敛，则序列

$(\alpha_n)$属于 $l^\infty$(5.7问题1)(相应地，$l^2$)．(对每个整数 $N$，考虑 $l^1$(相应地，$l^2$)上的连续线性形式 $x\to\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\xi_n$ 并应用 Banach–Steinhaus 定理.)

25) a) 给出在区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 内连续的实值函数序列 $(f_n)$ 的例，使它在 $I$ 的每个点处简单收敛，但不存在包含在 $I$ 中的非空开区间，使得该序列在此开区间内一致收敛(参阅(12.7.1))．

b) 设 $(f_n)$ 是在开集 $D\subset \boldsymbol{C}$ 内解析的复值函数序列，它在 $D$ 的每个点处简单收敛．试证存在在 $D$ 内处处稠密的开集 $U$，使对每个 $z_0\in U$，存在 $z_0$ 的邻域，使得 $(f_n)$ 在此邻域内一致收敛．(考虑函数 $z\to|f_n(z)|$ 组成的序列并利用(9.13.2)．)

26) 设 $t\to A(t)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $\boldsymbol{R}_+=[0,+\infty[$ 到 $n$ 阶实方阵空间的连续映射，$t\to C(t)$ 是齐次线性微分方程 $U'=A(t)U$ 的解，它在 $t=0$ 处等于单位矩阵(10.8.4)．以 $E_1$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的满足下述条件的向量 $y$ 组成的向量子空间：$t\to C(t)\cdot y$ 在 $[0,+\infty[$ 内有界；以 $E_2$ 表示 $E_1$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的补空间；以 $P_1$：$\boldsymbol{R}^n\to E_1$ 与 $P_2$：$\boldsymbol{R}^n\to E_2$ 表示相应于 $\boldsymbol{R}^n$ 分解为直和 $E_1+E_2$(5.4)的投影．

a) 假定对每个函数 $f\in\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{R}_+)$(7.2)，微分方程 $x'=A(t)\cdot x+f(t)$ 至少有一个在 $\boldsymbol{R}_+$ 内有界的解，试证对每个函数 $f\in\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{R}_+)$，存在唯一的向量 $y(f)\in E_2$，使得 $x'=A(t)\cdot x+f(t)$ 的在点0处取值为 $y(f)$ 的唯一解 $u_f$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 内有界，且存在正常数 $c$，使得 $\|u_f\|\leqslant c\cdot\|f\|$．(考虑在 $\boldsymbol{R}^n$ 内取值的满足下述条件的函数 $x$ 组成的空间 $F$：$x$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 内连续可微，$x$ 与 $x'-A\cdot x$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 内有界，且 $x(0)\in E_2$．试证函数

$$N(x)=\|x\|+\|x'-A\cdot x\|$$

是 $F$ 上的范数，而 $F$ 关于这个范数是 Banach 空间．然后考虑到 $E_2$ 的定义，对 $F$ 到 $\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{R}_+)$ 的线性映射 $x\to x'-A\cdot x$ 应用 Banach 定理.)

b) 由 a) 推断，对每个 $f\in\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{R}_+)$，方程 $x'=A(t)\cdot x+f(t)$ 具有在 $\boldsymbol{R}_+$ 内有界的解的必要充分条件是，

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\int_0^t\|C(t)P_1C^{-1}(s)\|ds+\int_t^{+\infty}\|C(t)P_2C^{-1}(s)\|ds\right)<+\infty$$

(参阅(10.8.6)与(13.14.4))．

27) 设 $f$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[a,b[$ 内递增与右连续的实值函数．假定 $f$ 的间断点所成的可数集在 $[a,b[$ 内处处稠密(3.15的问题)．试证 $[a,b[$ 内使得 $f$ 在该点处具有有限右导数的点组成集是瘦的．(对每个正整数 $n$，设 $A_n$ 是 $[a,b[$ 内满足下述条件的点 $x$ 的集：在 $[a,b[$ 内存在两个点 $y,z$，使得

$x<y<z<x+(1/n)$ 且

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \geqslant 1.$$

证明 $A_n$ 在 $[a, b[$ 内是处处稠密的开集.)

28) 设 $f$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 的开区间 $]a, b[$ 内任意次可微的实值函数. 假定对每个 $x \in ]a, b[$, 存在整数 $N(x)$, 使得 $D^{N(x)}f=0$, 试证 $f$ 必是多项式. 证明可如下进行:

a) 设 $G$ 是如下的 $x \in ]a, b[$ 组成的开集: 在 $x$ 的某个邻域内, $f$ 与一个多项式相同; 设 $F$ 是 $G$ 在 $]a, b[$ 内的(闭)余集. 试证 $F$ 没有孤立点 (3.10.10).

b) 对每个整数 $n$, 设 $E_n$ 是 $F$ 的满足 $D^nf(x)=0$ 的 $x \in F$ 组成的闭子集,如果 $F$ 非空,试证存在非空开区间 $I \subset ]a, b[$ 与整数 $N$, 使得 $F \cap I$ 非空且包含在 $E_N$ 内(利用 Baire 定理). 于是由 a) 推断,对一切 $n>N$, 还有 $F \cap I \subset E_n$.

c) 由 b) 推断, $F \cap I$ 在 $I$ 内是疏的;然后证明,在 $G \cap I$ 的每个连通分支区间上,有 $D^Nf(x)=0$; 最后,如果假定 $F \neq \phi$, 即可得到矛盾.

29) 设 $E$, $F$ 是两个可分 Banach 空间, $F'$ 是 $F$ 的对偶. 假定 $F'$ 包含在分离局部凸空间 $G$ 内,且 $G$ 的拓扑在 $F'$ 上的诱导拓扑粗于 $F'$ 的弱拓扑. 又设 $u$ 是 $E$ 到 $G$ 的连续线性映射.

a) 试证,对 Banach 空间 $F'$ 内的每个球 $B$, $u^{-1}(B)$ 是 $E$ 的闭子集 (利用 (12.15.9) 与 (12.15.8.1)).

b) 假定存在 $E$ 的非瘦子集 $A$, 使对一切 $x \in A$, 有 $u(x) \in F'$. 试证此时 $u(E) \subset F'$ 且 $u$ 关于由 $F'$ 的范数定义的拓扑是连续的.

30) 设 $E$ 是 Fréchet 空间, $(u_\alpha)$ 是由 $E$ 到赋范空间 $F$ 的连续线性映射的一个族. 假定存在 $E$ 的非瘦子集 $A$, 使对一切 $x \in A$, $u_\alpha(x)$ 所成的集在 $F$ 内有界. 试证族 $(u_\alpha)$ 是等度连续的(对每个整数 $n \geqslant 1$, 考虑使得 $\|u_\alpha(x)\| \leqslant n$ 对一切指标 $\alpha$ 成立的 $x \in E$ 所成的集).

# 第十三章 积 分

本章叙述的积分理论限于可分可度量化的局部紧空间的情形,而以后用到的将只是这种空间.我们按照相当接近 N. Bourbaki [22] 的方式来阐述,但在较多的限制下,给予适当的简化.

积分论中最基本的定理是 Lebesgue 收敛定理 (13.8), Fischer-Riesz 定理 (13.11.4), Lebesgue-Nikodym 定理 (13.15.5) 与 Lebesgue-Fubini 定理 (13.21.7). 可惜这就必须包括相当长的关于上积分、可测函数与可忽略函数的内容,这些都是不可缺少的技术性工具. 关于局部紧群或微分流形上的某些特殊测度的重要性质,将在第十四与十六两章中分别加以考虑.

我们还在问题中插入了积分的一些应用,这些应用是正文中没有叙述过的;尤其是插入了遍历理论与正交系方面的应用. 想在这个方向上进一步深入研究的读者可参看 [21], [26+], [28], [30] 与 [31].

我们研究积分问题与本世纪初的数学家不再完全相同. 如果目的只在于能积分"很不连续的"函数,那么积分论就很难超越一个或多个实变量函数的"精致"理论的相当狭隘的界限. Lebesgue 创造的积分概念在现代分析中的重要性,一方面在于它可以自然地导致考虑各种新的完备函数空间——正是由于这些空间的元是函数(或"等价"函数类),而不是象"完备化"空间的点那样抽象的对象,所以就能方便地加以定义与研究. 另一方面,这种重要性在于,Lebesgue-Nikodym 定理与由密度所定义的测度的性质(13.15)为我们提供了使用局部紧空间上测度的可数族的方法,为此把这些测度看作具有固定的基的测度,并且连同它们关于这个基测度的密度(因而最终也是对于函数)来进行研究;而这也是非常方便的. 这里就显示出现代的观点:对于一个 $\mu$ 可积函数 $f$,重要的不

是 $f$ 所取的值，而是它通过线性映射 $g \to \int fg d\mu$ 作用在有界连续函数空间上的方式(这个线性映射是只依赖于 $f$ 所属的类的算子，因而在零测度集上改变 $f$ 的值时，它保持不变)。这种观点的发展在第十七章中就导致广义函数理论，它是微分流形上的测度概念的自然推广。

在整个这一章中，为简略起见，我们将把"可分的、局部紧的与可度量化的空间"称为"局部紧空间"。

## 1. 测度的定义

设 $X$ 是(可度量化的)紧空间且设 $\mathscr{C}_C(X)$ 是 $X$ 上的连续复值函数的 Banach 空间(7.2)，则 $\mathscr{C}_C(X)$ 的对偶空间的元称为 $X$ 上的**测度**(或**复测度**)，这就是说((12.15)与(5.5.1))，它是 $\mathscr{C}_C(X)$ 上的一个线性形式 $f \to \mu(f)$，且对一切 $f \in \mathscr{C}_C(X)$，满足形如

**(13.1.1)** $$|\mu(f)| \leqslant a\|f\|$$

的不等式(请记住，$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$)。

现在设 $X$ 是局部紧空间(按照开始的约定，它是可度量化与可分的)。对于 $X$ 的每个紧子集 $K$，以 $\mathscr{K}(X; K)$ (或 $\mathscr{K}_C(X;K)$) 表示由 $\mathscr{C}_C(X)$ 中的下述函数组成的向量子空间：这些函数的支集(12.6)包含在 $K$ 内(因而是紧的)；以 $\mathscr{K}_C(X)$ (或 $\mathscr{K}(X)$) 表示当 $K$ 取遍 $X$ 的紧子集的集时 $\mathscr{K}_C(X; K)$ 的并，换言之，它是具有紧支集的连续(复值)函数的向量空间。显见有

$$\mathscr{K}_C(X) \subset \mathscr{C}_C^\infty(X).$$

把 $\mathscr{K}_C(X)$ 上具有下述性质的线性形式 $\mu$ 称为 $X$ 上的一个**测度**(或**复测度**)：对 $X$ 的任何紧子集 $K$，存在 $a_K \geqslant 0$ (一般地说，$a_K$ 依赖于 $K$)，使对一切函数 $f \in \mathscr{K}(X; K)$，有

**(13.1.2)** $$|\mu(f)| \leqslant a_K\|f\|.$$

当 $X$ 是紧空间时，这个定义与上面给出的定义一致。这表明，$\mu$ 的限制 $\mu|\mathscr{K}(X; K)$ 关于 $\mathscr{C}_C^\infty(X)$ 的拓扑在 $\mathscr{K}(X; K)$ 上的

诱导拓扑是连续的. 我们注意到 $\mathscr{K}(X;K)$ 在 $\mathscr{C}_C^\infty(X)$ 内是闭的,因而是 Banach 空间 (3.14.5).

注意,一个测度在 $\mathscr{K}_C(X)$ 上关于 $\mathscr{C}_C^\infty(X)$ 的拓扑(即由范数 $\|f\|$ 定义的拓扑)的诱导拓扑不一定是连续的. 我们将在更后的地方 (13.20) 考察这个问题.

**(13.1.3)** 测度的例. 设 $X$ 是局部紧空间, $x$ 是 $X$ 的一个点, 则 $\mathscr{K}(X)$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $f \to f(x)$ 是一个测度, 因为它是线性的, 并且对 $X$ 的每个满足 $f \in \mathscr{K}(X;K)$ 的紧子集 $K$, 显然有 $|f(x)| \leqslant \|f\|$. 这个测度称为点 $x$ 处的 **Dirac 测度**(或**由点 $x$ 处的单位质量所定义的测度**),记作 $\varepsilon_x$.

更一般地,设$(a_n)$是$X$内不同的点的序列,$(t_n)$是复数序列,满足下述条件:对$X$的每个紧子集 $K$,对应于使得 $a_n \in K$ 的指标 $n$ 的 $t_n$ 所成的子族是绝对可和的 (5.3). 令 $c_K = \sum\limits_{a_n \in K} |t_n|$. 这时,对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X;K)$, 级数 $\sum\limits_n t_n f(a_n)$ 是绝对收敛的,因为这个级数中不等于零的项只是对应 $a_n \in K$ 的那些项,并且还有

$$\sum_{a_n \in K} |t_n f(a_n)| \leqslant \|f\| \cdot \sum_{a_n \in K} |t_n| = c_K \|f\|.$$

这个论证还表明,$f \to \Sigma t_n f(a_n)$是$X$上的一个测度;称它为由(对于一切 $n$) **置于点 $a_n$ 处的质量 $t_n$ 所定义的测度**(参阅 (13.18.8)).

**(13.1.4)** 设 $f$ 是属于 $\mathscr{K}_C(\boldsymbol{R})$ 的函数, 则对包含 $f$ 的支集的每个区间 $[a, b]$, 积分 $\int_a^b f(t)dt$ (8.7) 的值总是相等的,把这个值记为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$. 映射 $f \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ 是 $\mathscr{K}_C(\boldsymbol{R})$ 上的线性形式. 我们来证明它是测度. 事实上, 对 $\boldsymbol{R}$ 的每个紧区间 $K=[a, b]$ 与每个函数 $f \in \mathscr{K}(\boldsymbol{R};K)$, 根据中值定理 (8.7.7), 有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| \leqslant (b-a)\|f\|.$$

这个测度称为 $\boldsymbol{R}$ 上的 **Lebesgue 测度**.

**(13.1.5)** 设 $\mu$ 是 $X$ 上的测度, $g$ 是属于 $\mathscr{C}_C(X)$ 的任一函数. 对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X)$, 显见有 $gf \in \mathscr{K}(X)$, 因而映射 $f \to \mu(gf)$

是 $\mathscr{K}(X)$ 上的线性形式. 我们来证明这是一个测度. 事实上, 对每个函数 $f \in K(X; K)$, 有 $\|gf\| \leqslant \|f\| \sup_{x \in K} |g(x)|$, 因而

$$|\mu(gf)| \leqslant b_K \|f\|,$$

其中 $b_K = a_K \sup_{x \in K} |g(x)|$. 把这个测度记作 $g \cdot \mu$, 称它为对于 $\mu$ 以 $g$ 为**密度**的测度(参阅 (13.13)).

**(13.1.6)** 设 $\pi$: $X \to X'$ 是 $X$ 到局部紧空间 $X'$ 上的同胚, 则对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X')$, 函数 $f \circ \pi$ 属于 $\mathscr{K}(X)$, 并且有

$$\mathrm{Supp}(f \circ \pi) = \pi^{-1}(\mathrm{Supp} f).$$

由此立即得知, 对于 $X$ 上的每个测度 $\mu$, $f \to \mu(f \circ \pi)$ 是 $X'$ 上的测度, 称它为 $\mu$ 在 $\pi$ 下的**象**, 记作 $\pi(\mu)$.

**(13.1.7)** 设 $Y$ 是 $X$ 的闭子集 (因而它是局部紧子空间 (3.18.4)), $\nu$ 是 $Y$ 上的测度. 对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X; K)$, 限制 $f|Y$ 属于 $\mathscr{K}(Y; K \cap Y)$, 因而存在常数 $c_K$, 使对一切 $f \in \mathscr{K}(X; K)$, 有 $|\nu(f|Y)| \leqslant c_K \sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant c_K \|f\|$. 这样, 映射 $f \to \nu(f|Y)$ 是 $X$ 上的测度, 也称它为 $\nu$ 在典则单射 $Y \to X$ 下的**象**(或 $\nu$ 在 $X$ 上的**典则延拓**).

**(13.1.8)** 设 $U$ 是 $X$ 的开子集(因而它还是局部紧子空间(3.18.4). 显然, 对 $U$ 的每个紧子集 $K$, 映射 $f \to f|U$ 是 $\mathscr{K}(X; K)$ 到 $\mathscr{K}(U; K)$ 上的一个等距, 它的逆等距使每个函数 $g \in \mathscr{K}(U; K)$ 对应到函数 $g^U$, $g^U$ 在 $U$ 内等于 $g$, 而在 $X - U$ 内等于 0 (在用语随便时, 如果 $\mathrm{Supp}(f) \subset U$, 我们常写 $f$ 以代替 $f|U$; 并写 $g$ 以代替 $g^U$), 因而 $\mathscr{K}_C(U)$ 到 $\mathscr{K}_C(X)$ 的映射 $g \to g^U$ 是单射. 对 $X$ 上的每个测度 $\mu$, 映射 $g \to \mu(g^U)$ 是 $U$ 上的测度, 称它为 $\mu$ 在 $U$ 上的**诱导测度**, 或 $\mu$ 在 $U$ 上的**限制**, 记作 $\mu_U$ 或 $\mu|U$. 注意, $U$ 上的测度 $\nu$ 不一定是 $X$ 上的某个测度的限制 (13.4, 习题 1), 而且当存在这样的"延拓"测度 $\nu$ 时, 一般地说, 它也不是唯一的, 然而我们有下面的结果:

**(13.1.9)** 设 $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 的开覆盖, 假定对每个 $\alpha \in I$, 给出了 $U_\alpha$ 上的一个测度 $\mu_\alpha$, 使对每对指标 $\alpha, \beta$, $\mu_\alpha$ 与 $\mu_\beta$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的限

制(13.1.8)相等. 这时,在$X$上存在唯一的测度$\mu$,使对每个$\alpha\in I$,$\mu$在$U_\alpha$上的限制等于$\mu_\alpha$.

我们首先证明,每个函数$f\in\mathscr{K}_C(X)$可以写成$f=\sum_{i=1}^{n}f_i$,这里对每个指标$i$,存在$\alpha_i\in I$,使得$f_i\in\mathscr{K}_C(X)$,并且

$$\operatorname{Supp}(f_i)\subset U_{\alpha_i}.$$

为此注意到,若$K=\operatorname{Supp}(f)$,则存在有限个指标$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使得相应的$U_{\alpha_i}$形成$K$的覆盖. 于是((3.18.2)与(12.6.4))存在$X$到$[0,1]$的$n$个连续映射$h_i$,使对$1\leqslant i\leqslant n$,$\operatorname{Supp}(h_i)$是紧的且包含在$U_{\alpha_i}$内,而且在$K$上有$\sum_{i=1}^{n}h_i(x)=1$. 这样函数$f_i=fh_i$就是所提问题的解. 这也证明,如果存在具有所述性质的$\mu$,则它必是唯一的,因为由定义有

$$\mu(f)=\sum_{i=1}^{n}\mu(fh_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_{\alpha_i}(fh_i).$$

为证明存在$\mathscr{K}_C(X)$上的线性形式$\mu$,使得它在每个$\mathscr{K}_C(U_\alpha)$上的限制是$\mu_\alpha$,只须证明下面的性质:给定两个由属于$\mathscr{K}_C(X)$的函数组成的有限序列$(g_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$与$(h_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$,使得对于$1\leqslant i\leqslant m$,有$\operatorname{Supp}(g_i)\subset U_{\alpha_i}$;对于$1\leqslant j\leqslant n$,有

$$\operatorname{Supp}(h_j)\subset U_{\beta_j};$$

并且在$\operatorname{Supp}(f)$上,有

$$\sum_{i=1}^{m}g_i(x)=\sum_{j=1}^{n}h_j(x)=1,$$

则

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{\alpha_i}(fg_i)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{\beta_j}(fh_j).$$

可是,我们有

$$fg_i=\sum_{j=1}^{n}fg_ih_j,$$

因而

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{\alpha_i}(fg_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{\alpha_i}(fg_i h_j)\right).$$

同样

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{\beta_j}(fh_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_{\beta_j}(fg_i h_j)\right).$$

然而由于 $\mathrm{Supp}(fg_ih_j)$ 包含在 $U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_j}$ 之内,所以按假定有

$$\mu_{\alpha_i}(fg_ih_j) = \mu_{\beta_j}(fg_ih_j).$$

由此就得到我们的论断.

剩下要证明这样定义的线性形式 $\mu$ 是一个测度. 设 $K$ 是 $X$ 的紧子集,并且就象本证明开始时那样定义 $U_{\alpha_i}$ 与 $h_i$. 若

$$H_i = \mathrm{Supp}(h_i),$$

则由假设,存在数 $a_i \geqslant 0$, 使对一切函数 $g \in \mathscr{K}(X;H_i)$, 有

$$|\mu_{\alpha_i}(g)| \leqslant a_i\|g\| \quad (13.1.2.).$$

于是,对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X;K)$, 有

$$|\mu_{\alpha_i}(fh_i)| \leqslant a_i\|fh_i\| \leqslant a_i\|f\|,$$

因此得到

$$|\mu(f)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\|f\|.$$

证毕.

**(13.1.10)** 设 $\lambda$ 与 $\mu$ 是 $X$ 上的两个测度, 则显然 $\lambda+\mu$ 同样是 $X$ 上的测度,且对每个纯量 $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha\mu$ 同样是 $X$ 上的测度. 于是, $X$ 上的测度所成的集是 $\mathbf{C}^{\mathscr{K}_\mathbf{C}(X)}$ 的一个向量子空间, 记作 $M_C(X)$ 或 $M(X)$.

类似于例 (13.1.4), 若 $\mu$ 是局部紧空间 $X$ 上的测度,则对每个函数 $f \in \mathscr{K}(X)$, 代替 $\mu(f)$, 我们把它写为 $\int f d\mu$ 或 $\int f(x)d\mu(x)$ (也可写为 $\langle f,\mu\rangle$ 或 $\langle \mu,f\rangle$), 且把这个数称为 ***f* 关于 *μ* 的积分.**

## 2. 实 测 度

设 $X$ 是局部紧空间,以 $\mathscr{K}_R(X)$ 表示 $X$ 上具有紧支集的连续

有限实值函数的集，以 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X;K)$ 表示 $X$ 上其支集包含在 $K$ 内的连续有限实值函数的集．显然 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 是 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 的实向量子空间，并且我们可以写(直和)

$$\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)=\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)\oplus i\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X).$$

对每个(复)测度 $\mu$，$\mu$ 在 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 上的限制是 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 到 $\mathbf{C}$ 的 $\mathbf{R}$ 线性映射 $\mu_0$．再者，这个限制完全确定了 $\mu$．因为如果有 $f=f_1+if_2$，其中 $f_1, f_2$ 属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，则由此可推出 $\mu(f)=\mu_0(f_1)+i\mu_0(f_2)$．反之，如果 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 到 $\mathbf{C}$ 的 $\mathbf{R}$ 线性映射 $\mu_0$ 满足：对 $X$ 的每个紧子集 $K$，存在 $a_K>0$，使对一切函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X;K)$，有 $|\mu_0(f)|\leqslant a_K\|f\|$，则显见映射

$$f_1+if_2\to\mu_0(f_1)+i\mu_0(f_2)$$

是 $X$ 上的一个(复)测度．因此，我们可以使 $X$ 上的每个测度等同于它在 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 上的限制．

设 $\mu$ 是 $X$ 上的(复)测度．由 (13.1.2) 立即得到，映射 $f\to\overline{\mu(\bar{f})}$ 还是 $X$ 上的测度，称为 $\mu$ 的**共轭测度**，记作 $\bar{\mu}$．我们有 $\bar{\bar{\mu}}=\mu$；对于 $X$ 上的两个测度 $\lambda$，$\mu$ 与任意的两个复数 $a, b$，有

$$\overline{a\lambda+b\mu}=\bar{a}\bar{\lambda}+\bar{b}\bar{\mu}.$$

更一般地，对每个函数 $g\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 与 $X$ 上的每个测度 $\mu$，有

$$\overline{g\cdot\mu}=\bar{g}\cdot\bar{\mu}\quad(13.1.5).$$

$X$ 上的测度 $\mu$ 称为**实的**，如果 $\bar{\mu}=\mu$．这等价于对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，$\mu(f)$ 的值都是实的．

这样，我们就能使 $X$ 上的实测度所成的集等同于实向量空间 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 上的线性形式所成的一个向量空间；以 $M_{\mathbf{R}}(X)$ 记这个向量空间．Lebesgue 测度是实的，所有 Dirac 测度都是实的．设 $\mu$ 是任意的复测度，则测度 $\mu_1=(\mu+\bar{\mu})/2$，$\mu_2=(\mu-\bar{\mu})/2i$ 都是实的；分别把它们称为 $\mu$ 的**实部**与**虚部**，记作 $\mathscr{R}\mu$ 与 $\mathscr{I}\mu$．对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，有

**(13.2.1)** $\quad(\mathscr{R}\mu)(f)=\mathscr{R}(\mu(f)),\ (\mathscr{I}\mu)(f)=\mathscr{I}(\mu(f))$；

且由定义，有

**(13.2.2)** $\quad\mu=\mathscr{R}\mu+i\mathscr{I}\mu,\ \bar{\mu}=\mathscr{R}\mu-i\mathscr{I}\mu.$

## 3. 正测度．测度的绝对值

局部紧空间 $X$ 上的测度 $\mu$ 称为**正的**，如果对每个非负函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$，有 $\mu(f)\geqslant 0$．于是，若 $f$ 与 $g$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的两个函数，满足 $f\leqslant g$，则有 $\mu(f)\leqslant\mu(g)$．由于每个函数

$$f\in\mathscr{K}_R(X)$$

都可写成 $f=f^+-f^-$（这里 $f^+(x)=(f(x))^+$，$f^-(x)=(f(x))^-$ (2.2))，所以正测度必是实测度． 我们以 $M_+(X)$ 表示 $X$ 上的正测度集．

值得注意的是，单有正性这一条，就可免于验证定义一个测度的性质 (13.1.2)：

**(13.3.1)** 设 $\mu$ 是实向量空间 $\mathscr{K}_R(X)$ 上的线性形式，使对每个属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的非负函数 $f$，有 $\mu(f)\geqslant 0$，则 $\mu$ 是(正)测度．

事实上，为验证 (13.1.2)，只须注意，存在函数 $g\in\mathscr{K}_R(X)$，它取值于 $[0,1]$ 中，且在 $K$ 上等于 1 ((3.18.2) 与 (4.5.2))，因此对每个函数 $f\in\mathscr{K}_R(X;K)$，有

$$0\leqslant f^+\leqslant\|f\|g,\quad 0\leqslant f^-\leqslant\|f\|g,$$

从而得到

$$0\leqslant\mu(f^+)\leqslant\|f\|\cdot\mu(g),\quad 0\leqslant\mu(f^-)\leqslant\|f\|\cdot\mu(g),$$

最后有 $|\mu(f)|\leqslant 2\|f\|\cdot\mu(g)$．

正测度的概念使我们有可能在 $X$ 上的实测度构成的向量空间 $M_R(X)$ 上用下述方式定义序关系： 若测度 $\nu-\mu$ 为正，则令 $\mu\leqslant\nu$．由于由关系 $\mu\geqslant 0$ 与 $\mu\leqslant 0$ 可以推出，对每个函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$，

$$\mu(f)=\mu(f^+)-\mu(f^-)=0,$$

从而 $\mu=0$，因此这样就确实定义了一个序关系(但一般不是全序)． 显然，关系 $\mu\leqslant\nu$ 蕴涵 $\lambda+\mu\leqslant\lambda+\nu$ 对一切实测度 $\lambda$ 成立；且对任一非负纯量 $a$，有 $a\mu\leqslant a\nu$（关于这个序关系的研究，参阅 (13.15))．

**(13.3.2)** 设 $\mu$ 是 $X$ 上的(复)测度，则存在 $X$ 上的最小正测度 $\rho$，

使对每个属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 的函数 $f$，有 $|\mu(f)| \leqslant \rho(|f|)$.

对每个正测度 $\nu$，如果它满足：对一切函数 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，有 $|\mu(f)| \leqslant \nu(|f|)$，则由关系 $g \geqslant 0$，$|h| \leqslant g$ ($g$，$h$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 的两个函数)可推出 $|\mu(h)| \leqslant \nu(|h|) \leqslant \nu(g)$. 我们证明,存在正测度 $\rho$，使对每个属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的非负函数 $f$，有

**(13.3.2.1)** $$\rho(f) = \sup_{|g| \leqslant f, g \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)} |\mu(g)|.$$

由此正好得到 $\rho$ 满足所述条件.

首先注意到，等式 (13.3.2.1) 的右边是一个有限数，因为若 $K = \operatorname{Supp}(f)$，则 $\operatorname{Supp}(g) \subset K$，且根据 (13.1.2)，对 $|g| \leqslant f$，有

$$|\mu(g)| \leqslant a_K \cdot \|g\| \leqslant a_K \cdot \|f\|.$$

另一方面，显见对任何纯量 $a \geqslant 0$ 有 $\rho(af) = a\rho(f)$. 现在证明，若 $f_1$ 与 $f_2$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的两个非负函数,则有

**(13.3.2.2)** $$\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2).$$

对每个 $\varepsilon > 0$，存在函数 $g_i \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，使得 $|g_i| \leqslant f_i$，且

$$|\mu(g_i)| \geqslant \rho(f_i) - \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

以绝对值等于 1 的复数乘 $g_i$，我们可以假定 $\mu(g_i) = |\mu(g_i)|$，因而有

$$\mu(g_1 + g_2) = |\mu(g_1)| + |\mu(g_2)| \geqslant \rho(f_1) + \rho(f_2) - 2\varepsilon.$$

由于 $|g_1 + g_2| \leqslant f_1 + f_2$，故 $\rho(f_1 + f_2) \geqslant \rho(f_1) + \rho(f_2) - 2\varepsilon$. 又因 $\varepsilon$ 是任意的，所以 $\rho(f_1) + \rho(f_2) \leqslant \rho(f_1 + f_2)$. 另一方面，设 $h \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，且满足 $|h| \leqslant f_1 + f_2$. 令 $h_i$ 是如下的函数：在

$$f_1(x) + f_2(x) \neq 0$$

的点处，$h_i$ 等于 $hf_i/(f_1 + f_2)$；而在其余点处等于 0 ($i = 1, 2$). $h_i$ 在 $X$ 上是连续的,因为 $f_i/(f_1 + f_2)$ 在使得 $f_1(x) + f_2(x) > 0$ 的点 $x$ 处是连续的;另外 $|h_i(x)| \leqslant |h(x)|$ 对一切 $x \in X$ 都成立,这表明 $h_i$ 在使得 $f_1(x) + f_2(x) = 0$ 的点 $x$ 处是连续的,因为在这些点处也有 $h(x) = 0$. 显然 $|h_i| \leqslant f_i$ ($i = 1, 2$)，且 $h = h_1 + h_2$，因而

$$|\mu(h)| \leqslant |\mu(h_1)| + |\mu(h_2)| \leqslant \rho(f_1) + \rho(f_2).$$

由于可以取 $|\mu(h)|$ 任意地接近 $\rho(f_1 + f_2)$，所以有

$$\rho(f_1+f_2)\leqslant\rho(f_1)+\rho(f_2).$$

这就完成了所述情形下 (13.3.2.2) 的证明。

现在把 $\rho(f)$ 的定义推广到任意函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$ 的情形。对 $f$ 的任何分解 $f=f'-f''$，这里 $f',f''$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的两个非负函数，我们写 $\rho(f)=\rho(f')-\rho(f'')$。这样得到的值不依赖于所选的分解，因为若 $f=f_1'-f_1''=f_2'-f_2''$，则 $f_1'+f_2''=f_2'+f_1''$，于是由 (13.3.2.2) 有 $\rho(f_1')+\rho(f_2'')=\rho(f_2')+\rho(f_1'')$。在这样的定义下，公式 (13.3.2.2) 对 $\mathscr{K}_R(X)$ 中的任何 $f_1,f_2$ 都成立。事实上，我们可以写 $f_1=f_1'-f_1''$，$f_2=f_2'-f_2''$，其中 $f_i'$ 与 $f_i''(i=1,2)$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的非负函数。由于 $f_1+f_2=(f_1'+f_2')-(f_1''+f_2'')$，故我们的论断由上面的定义与关于非负函数的 (13.3.2.2) 得到。最后，上面的定义表明，对每个纯量 $a\geqslant 0$，有 $\rho(af)=a\rho(f)$；而对 $a<0$，有

$$\begin{aligned}\rho(af)&=\rho(af'-af'')=\rho(-af'')+\rho(af')\\&=(-a)\rho(f'')-\rho(-af')=(-a)\rho(f'')-(-a)\rho(f')\\&=a\rho(f);\end{aligned}$$

因此关系 $\rho(af)=a\rho(f)$ 对所有实纯量 $a$ 成立，这就证明了 $\rho$ 是 $\mathscr{K}_R(X)$ 上的(实)线性形式，从而由 (13.3.1)，它是一个正测度。证毕。

以 $|\mu|$ 记这样定义的测度 $\rho$，并称它为**复测度 $\mu$ 的绝对值**。因而按照定义，对 $f\in\mathscr{K}_C(X)$，有

**(13.3.3)** $$|\mu(f)|\leqslant|\mu|(|f|).$$

显然，对任一纯量 $a\in C$ 与 $X$ 上的任一测度 $\mu$，有

**(13.3.4)** $$|a\mu|=|a|\cdot|\mu|.$$

再者，若 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，则

**(13.3.5)** $$|\mu|=\mu.$$

事实上，根据 (13.3.2.1)，只须证明，对一切函数 $f\in\mathscr{K}_C(X)$，有 $|\mu(f)|\leqslant\mu(|f|)$。然而，存在数 $\zeta\in C$，使得 $|\zeta|=1$ 且

$$|\mu(f)|=\zeta\mu(f)=\mu(\zeta f).$$

由于 $\mu$ 是实的，因而推出 $\mu(\zeta f)=\mu(\mathscr{R}(\zeta f))$；但因 $\mu\geqslant 0$ 且

$$\mathscr{R}(\zeta f) \leqslant |f|,$$

所以

$$|\mu(\mathscr{R}(\zeta f))| \leqslant \mu(|f|).$$

若 $\mu$ 是 $X$ 上的任意实测度，则由 (13.3.3) 得到 $\mu \leqslant |\mu|$，因而有：

**(13.3.6)** $X$ 上的每个实测度是两个正测度的差(关于更精确的结果,参阅 (13.15))。

若 $\mu$ 是 $X$ 上的任一(复)测度,则由 (13.3.3) 与 (13.3.2) 得到

**(13.3.7)** $$|\mathscr{R}\mu| \leqslant |\mu|, \quad |\mathscr{I}\mu| \leqslant |\mu|.$$

$$|\mu| \leqslant |\mathscr{R}\mu| + |\mathscr{I}\mu|.$$

此外,对 $X$ 上任意两个测度 $\mu, \nu$，根据 (13.3.2)，显然有

**(13.3.8)** $$|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|.$$

由定义(参看 (13.1.6) 立即得到，若 $\pi$: $X \to X'$ 是一个同胚，则对 $X$ 上的任何测度 $\mu$，有

**(13.3.9)** $$|\pi(\mu)| = \pi(|\mu|).$$

## 问　　题

1) 设 $X$ 是局部紧空间，$E$ 是空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 的向量子空间，$P$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 内的凸锥(即空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 的一个子集,满足：由关系 $f \in P$ 与 $g \in P$ 可得出

$$f + g \in P,$$

且对一切 $\alpha > 0$ 有 $\alpha f \in P$)。 假定对每个函数 $h \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，存在函数 $f \in E$，使得 $f - h \in P$。

设 $u$ 是 $E$ 上的实线性形式，使得关系 $f \in E \cap P$ 蕴涵 $u(f) \geqslant 0$。 设 $h \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，令 $P'_h$ 是使得 $h - f \in P$ 的 $f \in E$ 所成的集，$P''_h$ 是使得 $f - h \in P$ 的 $f \in E$ 所成的集,试证这两个集均非空，且若 $\alpha'$ 是 $u(f)$ 关于 $f \in P'_h$ 的上确界，$\alpha''$ 是 $u(f)$ 关于 $f \in P''_h$ 的下确界,则 $\alpha'$ 与 $\alpha''$ 是有限的,且有 $\alpha' \leqslant \alpha''$。 由此推断，在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 的子空间 $E_1 = E + \mathbf{R}h$ 上，存在线性形式 $u_1$，它是 $u$ 的开拓,并使得关系 $f_1 \in E_1 \cap P$ 蕴涵 $u_1(f_1) \geqslant 0$。 试证，对任何这样的延拓，恒有 $\alpha' \leqslant u_1(h) \leqslant \alpha''$；为使这种延拓是唯一的,必须且只须 $\alpha' = \alpha''$。

2) 设 $X$ 是紧空间，$p$ 是定义在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 上的实值函数，满足下面两个条件：1° $p(f + g) \leqslant p(f) + p(g)$；2° 对一切 $\alpha > 0$，有 $p(\alpha f) = \alpha p(f)$；因

而使得 $p(f)\leqslant 0$ 的 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 所成的集 $P$ 是凸锥． 此外还假定：3° 对一切 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$，有 $\inf_{x\in X} f(x)\leqslant p(f)\leqslant \sup_{x\in X} f(x)$．由此 $p(1)=1$． 试证，在这些条件下，在 $X$ 上存在质量为 1 的正测度 $\mu$，使对一切函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$，有 $\mu(f)\leqslant p(f)$． 如果此外还在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 的一个向量子空间 $E$ 上给定一个线性形式 $u$，使对一切 $f\in E$，都有 $u(f)\leqslant p(f)$，则存在上面这种类型的测度，使得它是线性形式 $u$ 的延拓．（考虑 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 中的一个可数全子集 $(g_n)_{n\geqslant 0}$，其中 $g_0=1$． 利用问题 1，可按归纳法在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 的由 $g_n(n\geqslant 0)$ 与 $E$ 生成的子空间 $G$ 上给出一个线性形式 $v$，使对一切 $f\in G$，有 $-p(-f)\leqslant v(f)\leqslant p(f)$． 由此推断 $v$ 可以连续延拓为 $X$ 上的一个测度．）为使测度 $\mu$ 是唯一的，必须且只须对一切函数 $f\in E$，有 $p(f)+p(-f)=0$．

## 4. 粗 疏 拓 扑

既然 $M_{\mathbf{C}}(X)$ 是 $\mathbf{C}^{\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)}$ 的子空间，就能在其上定义弱拓扑，或 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 中的简单收敛拓扑（12.15）．对这种特殊情形，我们称它为 $M_{\mathbf{C}}(X)$ 上的**粗疏拓扑**． 因而，$X$ 上的测度序列 $(\mu_n)$ **粗疏收敛**于测度 $\mu$ 是指，对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，序列 $(\mu_n(f))$ 在 $\mathbf{C}$ 内收敛于 $\mu(f)$．

**（13.4.1）** 设 $(\mu_n)$ 是 $X$ 上的测度序列，使对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，序列 $(\mu_n(f))$ 在 $\mathbf{C}$ 内有极限 $\mu(f)$，则 $f\to\mu(f)$ 是 $X$ 上的测度，它是序列 $(\mu_n)$ 的粗疏极限．若 $\mu_n$ 都是正的，则 $\mu$ 也是正的．

事实上，我们已经注意到（13.1），对 $X$ 的每个紧子集 $K$，$\mathscr{K}(X;K)$ 是 Banach 空间，且 $\mu_n$ 在 $\mathscr{K}(X;K)$ 上的限制是该空间上的连续线性形式．因而由 Banach-Steinhaus 定理（12.16.5）推出，$\mu$ 在 $\mathscr{K}(X;K)$ 上的限制也是连续的 所以 $\mu$ 是 $X$ 上的测度（当 $\mu_n$ 为正时，显然 $\mu$ 是正的）．

由（12.15）得知，$M_{\mathbf{C}}(X)$ 的子集 $H$ 是**粗疏有界**的（在不致引起混淆时，简称为**有界的**），如果对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，有

$$\sup_{\mu\in H}|\mu(f)|<+\infty.$$

粗疏收敛的序列必是粗疏有界的．

**(13.4.2)** 设$H$是$M_{\mathbf{C}}(X)$的有界子集，则

(i) 对$X$的每个紧子集$K$，存在数$c_K > 0$，使对每个测度$\mu \in H$与每个函数$f \in \mathscr{K}(X; K)$，有

$$|\mu(f)| \leqslant c_K \|f\|$$

(因而由(13.3.2.1)，有$|\mu|(|f|) \leqslant c_K\|f\|$)。

(ii) $H$在$M_{\mathbf{C}}(X)$内的粗疏闭包关于粗疏拓扑是紧可度量化空间.

关于(i)，由 Banach-Steinhaus 定理(12.16.4)可以直接得出结论.

关于(ii)，设$(U_n)$是$X$内的相对紧开集序列，它形成$X$的覆盖，且有$\overline{U}_n \subset U_{n+1}$(3.18.3). 由于$X$的每个紧子集$K$包含在某个$U_n$内(3.16)，所以每个空间$\mathscr{K}(X; K)$等同于某个 Banach 空间$\mathscr{C}(\overline{U}_n)$的一个闭子空间，因而等同于$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$的一个闭子空间. 然而我们知道(7.4.4)，$\mathscr{C}(\overline{U}_n)$是可分的，从而$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$是可分的(3.10.9). 设$(f_{mn})_{m\geqslant 1}$是$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$中的处处稠密序列，为证明$H$是可度量化的，只须证明$H$上的粗疏拓扑由伪距离$|\langle f_{mn}, \mu - \nu\rangle|$组成的族所定义(12.4.6). 这表示若$g_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$是属于$\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$的函数，$\mu_0$是$H$的元，而$r$是大于零的数，则存在有限个函数$f_{m_k n_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$，使关系$\mu \in H$，$|\langle f_{m_k n_k}, \mu - \mu_0\rangle| \leqslant r/2$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$蕴涵$|\langle g_i, \mu - \mu_0\rangle| \leqslant r$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. 由于$g_i$属于同一个空间$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$，再根据(i)与(12.15.7.1)，$u \in H$在$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$上的限制所成的集是等度连续的，故所述论断由(12.15.7)得到.

剩下要证明(与(12.15.7)相同的推理)，当$H$通过映射$\mu \to (\langle f_{mn}, \mu\rangle)$等同于它在积空间$\mathbf{C}^{N\times N}$内的象$L$时，$L$在$\mathbf{C}^{N\times N}$内是闭的. 事实上，设$(\mu_k)$是$H$的点的一个序列，使得每个序列$(\langle f_{mn}, \mu_k\rangle)_{k\geqslant 1}$都收敛，则由(12.15.7)得到，在每个$\mathscr{K}(X; \overline{U}_n)$上，$\mu_k$的限制收敛于一个连续线性形式，从而序列$(\mu_k)$粗疏收敛于$X$上的一个测度. 证毕.

以后(13.20)我们将看到，(13.4.2)中的条件(i)还可写为：

对每个测度 $\mu \in H$，有 $|\mu|(K) \leqslant c_K$.

注意 (13.4.2(ii)) 蕴涵 (13.4.1)，后者是前者的特殊情形.

特别有：

**(13.4.3)** 设 $\nu$ 是 $X$ 上的正测度，则使得 $|\mu| \leqslant \nu$ 的复测度 $\mu$ 所成的集关于粗疏拓扑是可度量化的与紧的.

事实上，显见这个集在 $M_{\boldsymbol{C}}(X)$ 为关于粗疏拓扑是有界的与闭的.

注意，测度的有界集不一定满足 (13.4.3) 的假设.

**(13.4.4)** 设 $(\mu_n)$ 是 $X$ 上实测度的递增序列，且对属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的每个非负函数 $f$，序列 $(\mu_n(f))$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内是上有界的，则序列 $(\mu_n)$ 在 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 内有粗疏极限，此极限也是该序列关于 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的序关系的上确界.

只须注意，对属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的每个非负函数 $f$，序列 $(\mu_n(f))$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内是递增且有界的，因而 (4.2.1) 在 $\boldsymbol{R}$ 内有极限 $\mu(f)$，此极限等于 $\sup\limits_n \mu_n(f)$. 由于属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 的每个函数是属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的四个非负函数的线性组合，故序列 $(\mu_n)$ 粗疏收敛 (13.4.1)，而且由 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 内序关系的定义，显见 $\mu$ 是序列 $(\mu_n)$ 的上确界.

**(13.4.5)** 设以 $X$ 上的正测度 $\mu_n$ 为通项的级数满足：对属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的每个非负函数 $f$，以 $\mu_n(f) \geqslant 0$ 为通项的级数在 $\boldsymbol{R}$ 内收敛，则以 $\mu_n$ 为通项的级数在 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 内粗疏收敛，且其和 $\mu = \sum\limits_n \mu_n$ 满足：对每个函数 $f \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$，有 $\mu(f) = \sum\limits_n \mu_n(f)$.

只须对所述级数的部分和应用 (13.4.4) 即可.

## 问　　题

1) 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度，$\mu$ 是 $\lambda$ 在 $\boldsymbol{R}_+^* = ]0, +\infty[$ 上的限制，$g$ 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 上的函数 $x \longrightarrow 1/x$. 试证测度 $g \cdot \mu$ 不能延拓为 $\boldsymbol{R}$ 上的测度（参阅 (17.9)）.

2) 在实直线 $\boldsymbol{R}$ 上，Dirac 测度 $\varepsilon_n$（在点 $+n$ 处的单位质量）组成的序列粗疏收敛于 0. 在 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{R})$ 中给出序列 $(f_n)$ 的例子，使它在 Fréchet 空间

$\mathscr{C}_C(\boldsymbol{R})$ (12.14.6) 中收敛于 0，但序列 $(\langle\mu_n, f_n\rangle)$ 收敛于 1.

3) 设 $X$ 是紧空间.

a) 试证，若 $(f_n)$ 是属于 Banach 空间 $\mathscr{C}_C(X)$ 的函数的趋于 0 的序列，$(\mu_n)$ 是 $X$ 上的测度的粗疏趋于 0 的序列，则序列 $(\langle\mu_n, f_n\rangle)$ 趋于 0（利用 (13.4.2)).

b) 假定 $X$ 是无限集. 试证，如果设 $V$ 是 $M(X)$ 内 0 关于粗疏拓扑的邻域，它由有限个不等式 $|\langle\mu, f_i\rangle| \leqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 所定义，则对于每个不是 $f_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的线性组合的函数 $f\in\mathscr{C}_C(X)$，存在 $\mu\in V$，使得 $|\langle\mu, f\rangle|$ 可以任意大(参阅 12.15 问题 1). 由此推断，$\mathscr{C}_C(X)\times M(X)$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $(\mu, f)\to\langle\mu, f\rangle$ 不是连续的，由这一点与 a) 推断，空间 $M(X)$ 关于粗疏拓扑不是可度量化的.

4) 设 $X$ 是紧空间. 试证粗疏拓扑在 $M_+(X)$ 上的诱导拓扑是可分的、可度量化的与局部紧的(注意，对每个点 $\mu_0\in M_+(X)$，在 $M(X)$ 内存在 $\mu_0$ 关于粗疏拓扑的邻域 $V$，使得 $V\cap M_+(X)$ 有界). 由此推断 $\mathscr{C}_C(X)\times M_+(X)$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $(\mu, f)\to\langle\mu, f\rangle$ 是连续的.

进而推断，若 $X$ 是局部紧空间，但不是紧空间，则 $M_+(X)$ 关于粗疏拓扑的诱导拓扑还是可度量化的，但不再是可分的.

5) a) 设 $X$ 是局部紧空间. 试证，若 $(g_n)$ 是属于 Fréchet 空间 $\mathscr{C}_C(X)$ 的函数的趋于 0 的序列，$(\mu_n)$ 是 $X$ 上的测度的粗疏趋于 0 的序列，则序列 $(g_n\cdot\mu_n)$ 粗疏趋于 0.

b) 试证，当赋予 $M_+(X)$ 粗疏拓扑的诱导拓扑时，$M_+(X)\times\mathscr{C}_C(X)$ 到 $M(X)$ 的映射 $(\mu, g)\to g\cdot\mu$ 是连续的.

c) 假定 $X$ 是紧空间且是无限集. 试证，当赋予 $M(X)$ 粗疏拓扑时，

$$M(X)\times\mathscr{C}_C(X)$$

到 $M(X)$ 的映射 $(\mu, g)\to g\cdot\mu$ 不是连续的(推理类似于问题 3b).

6) 设 $X$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0, 1]$.

a) 设 $\mu_n$ 是测度 $\varepsilon_0-\varepsilon_{1/n}$. 试证序列 $(\mu_n)$ 粗疏趋于 0，但序列 $(|\mu_n|)$ 粗疏趋于 $2\varepsilon_0$.

b) 设 $\lambda$ 是 $X$ 上的 Lebesgue 测度，$g_n(x)=\sin nx$. 试证，当 $n\to+\infty$ 时，正测度 $\mu_n=(1-g_n)\cdot\lambda$ 所成的序列粗疏收敛于 $\lambda$，但关于由 $M(X)$ 上的范数 (5.7.1) 所定义的拓扑，它不收敛于 $\lambda$.

7) 设 $X$ 是紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的质量为 1 的正测度. $X$ 中的点列 $(x_n)$ 称为关于 $\mu$ 是等度分配的，如果测度 $(1/n)(\varepsilon_{x_1}+\cdots+\varepsilon_{x_n})$ 的序列粗疏收敛

于 $\mu$. 为使 $(x_n)$ 关于 $\mu$ 是等度分配的，必须且只须，若 $(f_k)$ 是 $\mathscr{C}_C(X)$ 中的全序列 (5.4)，则对每个 $k$，序列 $((1/n)(f_k(x_1)+\cdots+f_k(x_n)))$ 收敛于

$$\int f_k d\mu.$$

特别考虑 $X=[0,1]$ 与 $x_n=n\theta-[n\theta]$ 的情形(读者记得，$[t]$ 是实数 $t$ 的整数部分)；试证，若 $\theta$ 是无理数，则序列 $(x_n)$ 关于 Lebesgue 测度是等度分配的 (**Bohl 定理**)(利用 $f_k(x)=e^{2\pi ikx}$ 所组成的序列).

8) 设 $X$, $Y$ 是两个局部紧空间，$\pi$: $X\to Y$ 是正常连续映射 (12.7 问题 2). 此时，对每个函数 $g\in\mathscr{K}(Y)$，有 $g\circ\pi\in\mathscr{K}(X)$. 设 $\mu$ 是 $X$ 上的测度，则 $Y$ 上的测度 $g\to\mu(g\circ\pi)$ 称为 $X$ 上的测度 $\mu$ 在 $\pi$ 下的象，记作 $\pi(\mu)$. $M(X)$ 到 $M(Y)$ 的映射 $\mu\to\pi(\mu)$ 是线性的与粗疏连续的.

假定 $X$ 是紧的，$\Gamma$ 是 $X$ 到自身的连续映射的一个集，集中任何一对映射都可以互相交换. 设 $\Gamma'$ 是 $M(X)$ 到自身的形如 $\mu\to(1/n)(\mu+u(\mu)+\cdots+u^{n-1}(\mu))$ 的线性映射的集，这里 $u\in\Gamma$，$n$ 是任意正整数；$\Gamma''$ 是 $\Gamma'$ 的(任意)有限个元的合成组成的集. 若 $K$ 是 $X$ 上总质量为 1 的正测度所成的粗疏紧凸集，则对一切 $u\in\Gamma''$，有 $u(K)\subset K$. 试证当 $u$ 取遍 $\Gamma''$ 时，集 $u(K)$ 在 $K$ 上形成一个由粗疏紧集组成的滤系基；由此推断这些集的交 $I$ 是非空的. 最后，试证每个测度 $\mu\in I$ 在 $\Gamma$ 下是不变的，换言之，对一切 $u\in\Gamma$，有 $u(\mu)=\mu$ (注意，按照定义，对每个整数 $n$，存在测度 $\nu\in K$，使得

$$\mu=(1/n)(\nu+u(\nu)+\cdots+u^{n-1}(\nu)),$$

然后计算 $\|u(\mu)-\mu\|$) (**Марков- 角谷静夫定理**). 考虑紧交换群的情形，该交换群通过平移作用于自身(参阅 (14.1)).

9) 对定义于 $I=[0,1]$ 上的任何实值函数 $f$，称多项式

$$B_{n,f}(t)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^p(1-t)^{n-p}f\left(\frac{p}{n}\right)$$

为 $f$ 的第 $n$ 个 Бернштейн 多项式.

a) 若在 $I$ 上 $f\geqslant 0$，则在 $I$ 上有 $B_{n,f}\geqslant 0$，且 $B_{n,1}$ 等于常数 1. 由此推断，在 $\mathscr{B}(I)$ 内，有 $\|B_{n,f}\|\leqslant\|f\|$.

b) 对 $k$ 用归纳法证明，若令 $f_k(t)=t^k$，则有

$$(^*k)\qquad B_{n,f_k}(t)=a_{k,n}t^k+P_{k,n}(t),$$

其中 $a_{k,n}=(1-((k-1)/n))a_{k-1,n}$，$a_{0,n}=1$；而 $P_{k,n}$ 是次数不大于 $k-1$ 的多项式，其系数的绝对值不大于 $C_k/n$，其中 $C_k$ 是不依赖于 $n$ 的常数. (对公式 $(^*k)$ 关于 $t$ 求导，然后乘以 $t$.)

c) 由 b) 推出 Weierstrass 定理：对每个连续函数 $f \in \mathscr{C}(I)$，序列 $(B_{n,f})$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$.

10) 设 $X$ 是可距离化紧空间，$(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $X$ 上的连续复值函数的序列，$(c_n)_{n\geqslant 0}$ 是复数序列.

a) 为存在 $X$ 上的复测度 $\mu$，使对一切 $n$ 有 $\mu(f_n) = c_n$，必须且只须存在正数 $A$，使对每个复数有限序列 $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$，有

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k\right| \leqslant A\left\|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right\|.$$

(利用 Hahn-Banach 定理.)

b) 假定 $f_k$ 取有限实值且 $c_k$ 是实数，而 $f_0 = 1$，则为存在 $X$ 上的正测度 $\mu$，使对一切 $n$ 有 $\mu(f_n) = c_n$，必须且只须对于每个使得

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \geqslant 0$$

在 $X$ 上成立的实数有限序列 $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$，有 $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k \geqslant 0$ (参阅 13.3 问题 2).

11) 在第 10 题中，取 $X = [0,1]$，$f_n(t) = t^n$ ("Hausdorff 矩问题")．对每个纯量序列 $(c_n)$，令

$$\Delta^k c_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} c_{n+j}.$$

a) 试证，为存在 $X$ 上的复测度 $\mu$，使对一切 $n$ 有 $\mu(f_n) = c_n$，必须且只须存在正数 $A$，使对一切 $n$，有

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left|\Delta^{n-p} c_p\right| \leqslant A.$$

(注意 $\Delta^k c_n$ 应当是 $\mu$ 对多项式 $t^n(1-t)^k$ 所取的值；注意对每个实多项式 $P$，存在常数 $c_P$，使对一切 $n$，有 $B_{n,P} - c_P/n \leqslant P \leqslant B_{n,P} + c_P/n$，并利用问题 9b).)

b) 为存在 $X$ 上的正测度 $\mu$，使对一切 $n$ 有 $\mu(f_n) = c_n$，必须且只须对一切 $k \geqslant 0$ 与 $n \geqslant 0$，有 $\Delta^k c_n \geqslant 0$ (证法相同).

12) 设 $X$ 是紧空间．试证在 $M(X)$ 内，具有有限支集且总质量为 1 的正测度组成的集在总质量为 1 的正测度组成的集 $P$ 内关于粗疏拓扑是稠密的．(设 $U$ 是 $\mu \in P$ 关于粗疏拓扑的一个邻域，它由这样的测度 $\nu \in P$ 所组成：对于函数 $f_i \in \mathscr{C}_C(X)$，有 $|\mu(f_i) - \nu(f_i)| < \delta$．考虑单位连续分解 $(g_j)$ 与 $X$ 的点 $a_j$，使得

$$|f_i(x) - \sum f_i(a_j)g_j(x)| \leqslant \delta$$

对一切 $i$ 成立.)

13) 设 $X$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的区间 $[0, 1]$. 试证,当 $x$ 取遍 $X$ 时, Dirac 测度 $\varepsilon_x$ 所成的集 $K$ 关于粗疏拓扑是紧的,而在 $M(X)$ 内, Lebesgue 测度属于 $K$ 的凸包的粗疏闭包,但不属于这个凸包.

## 5. 关于正测度的上积分与下积分

在 (13.5) 到 (13.14) 各节中(包括问题在内), $\mu$ 表示局部紧空间 $X$ 上的正测度.

我们将在 (13.7.3) 中指出, 可以把 $\mu$ 从 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 延拓到 $\boldsymbol{R}^X$ 的向量子空间 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(X, \mu)$ 上(这个子空间依赖于 $\mu$, 包含

$$\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X),$$

而且一般与 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 不同), 使得这个延拓(仍然把它记作 $\mu$) 是 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(X, \mu)$ 上的正线性形式(即对属于该空间的一切非负函数,它所取的值都是非负的), 并且具有这样的基本性质: 对于递增序列, $\mu$ 与极限符号可以互相交换,就是说, 设 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(X, \mu)$ 的函数的递增序列,且它的上包络 (12.7.5) $f$ 仍属于 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(X, \mu)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

设 $\mathscr{I}$ (或 $\mathscr{I}(X)$) 是在 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 内取值且满足下述条件的函数 $f$ 组成的集: $f$ 在 $X$ 内下半连续,并且由属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的某个函数作为它的下界(这蕴涵对一切 $x \in X$ 有 $f(x) > -\infty$; 但在 $X$ 的某些点处完全可以有 $f(x) = +\infty$, 事实上恒等于 $+\infty$ 的常值函数属于 $\mathscr{I}$). 在 $X$ 内下半连续的非负函数 $f$ 属于 $\mathscr{I}$. 对每个函数 $f \in \mathscr{I}$, 令

**(13.5.1)**
$$\mu^*(f) = \sup_{g \leqslant f, g \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)} \mu(g).$$

它是实数或 $+\infty$. 显然,若 $f \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$, 则 $\mu^*(f) = \mu(f)$; 若 $f$, $g$ 属于 $\mathscr{I}$ 且 $f \leqslant g$, 则 $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$; 最后,对于任何纯量 $a > 0$, 当 $f \in \mathscr{I}$ 时,有 $\mu^*(af) = a\mu^*(f)$.

**(13.5.2)** 设 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{I}$ 的函数组成的递增序列，令

$$f = \sup_n f_n,$$

它属于 $\mathscr{I}$ (12.7.6)。这时，有

**(13.5.2.1)** $$\mu^*(f) = \sup_n \mu^*(f_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

首先假定 $f \in \mathscr{K}_R(X)$，且对一切 $n$，$f_n \in \mathscr{K}_R(X)$. 显然所有 $f_n$ 的支集包含在同一个紧集 $K = \mathrm{Supp}(f) \cup \mathrm{Supp}(f_1)$ 之内. 根据 Dini 定理 (7.2.2)，序列 $(f_n)$ 在 $X$ 上一致收敛于 $f$. 于是关系式 (13.5.2.1) 由 $\mu$ 在 $\mathscr{K}(X; K)$ 上的限制是 Banach 空间 $\mathscr{K}(X; K)$ 上的连续线性形式这一事实得到.

现在转到一般情形. 显然对一切 $n$ 有 $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f)$，因而只须证明，对每个使得 $u \leqslant f$ 的函数 $u \in \mathscr{K}_R(X)$，有

$$\mu^*(u) \leqslant \sup \mu^*(f_n).$$

而由(12.7.8)得知，对每个函数 $f_n$，存在属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的函数的递增序列 $(g_{mn})_{m\geqslant 1}$，使得 $f_n = \sup\limits_m g_{mn}$. 我们有 $f = \sup\limits_{m,n} g_{mn}$，因而也有 $f = \sup\limits_n h_n$，其中 $h_n = \sup\limits_{p\leqslant n, q\leqslant n} g_{pq}$. 显然函数 $h_n$ 都属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 并且构成递增序列. 由于 $u \leqslant f$，我们有 $u = \sup\limits_n(\inf(u, h_n))$. 序列 $(\inf(u, h_n))$ 是递增的，且由属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的函数组成. 由于 $u \in \mathscr{K}_R(X)$，所以上述推理的第一部分表明

$$\mu^*(u) = \sup_n \mu^*(\inf(u, h_n)).$$

然而由于 $h_n \leqslant f_n$，故

$$\mu^*(\inf(u, h_n)) \leqslant \mu^*(f_n),$$

因而
$$\mu^*(u) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n).$$

证毕.

注意，由于属于 $\mathscr{I}$ 的函数不会取值 $-\infty$，所以这样的两个函数的和 $f_1 + f_2$ 在 $X$ 的每个点处有定义，且有 $f_1 + f_2 \in \mathscr{I}$ (12.7.5).

**(13.5.3)** 对属于 $\mathscr{I}$ 的两个函数 $f_1$，$f_2$，有 $\mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(f_1) +$

$\mu^*(f_2)$.

事实上,我们可以写 $f_1 = \lim_{n\to\infty} g_n$, $f_2 = \lim_{n\to\infty} h_n$, 这里 $(g_n)$ 与 $(h_n)$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的函数的两个递增序列 (12.7.8), 于是

$$f_1 + f_2 = \lim_{n\to\infty}(g_n + h_n)\ (4.1.8).$$

由于 $\mu(g_n + h_n) = \mu(g_n) + \mu(h_n)$, 所述结论由 (13.5.2) 与 (4.1.8) 得到.

设 $(t_n)$ 是各项均为非负实数或 $+\infty$ 的任一序列, 由于它的部分和 $s_n = t_1 + \cdots + t_n$ 有定义 (4.1.8) 且形成递增序列, 故这个序列在 $\bar{\mathbf{R}}$ 内有极限 (4.2.1), 仍以 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ 记这个极限, 并称为以 $t_n$ 为通项的级数的和. 于是对每个属于 $\mathscr{I}$ 的非负函数的序列 $(f_n)$, 函数 $x \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 有定义, 把这个函数记作 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, 它也属于 $\mathscr{I}$ (12.7.6). 把定理 (13.5.2) 应用于部分和

$$\sum_{n=1}^{N} f_n$$

组成的序列,且把定理 (13.5.3) 应用于这个序列的每一项,就得到下面的推论:

**(13.5.4)** 设 $(f_n)_{n\geq 1}$ 是属于 $\mathscr{I}$ 的非负函数序列,则有

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n).$$

现在考虑 $X$ 到 $\bar{\mathbf{R}}$ 的任一映射 $f$. 存在函数 $h \in \mathscr{I}$, 使得 $h \geq f$, 至少等于 $+\infty$ 的常值函数就是这样的一个函数。令

**(13.5.5)** $$\mu^*(f) = \inf_{h \geq f, h \in \mathscr{I}} \mu^*(h),$$

且把这个数称为 $f$ 关于测度 $\mu$ 的**上积分**.

显然, 若 $f \in \mathscr{I}$, 则这个定义与前面的定义相符. 在这里, $\mu^*(f)$ 的值可以是 $\bar{\mathbf{R}}$ 的任何元素. 关系式 $f \leq g$ 蕴涵 $\mu^*(f) \leq \mu^*(g)$, 且对任何纯量 $a > 0$, 有

$$\mu^*(af) = a\mu^*(f).$$

**(13.5.6)** 如果$X$到$\bar{R}$的两个映射的和$f_1+f_2$在$X$的每个点处都有定义,且$\mu^*(f_1)>-\infty$, $\mu^*(f_2)>-\infty$,则

$$\mu^*(f_1+f_2) \leqslant \mu^*(f_1)+\mu^*(f_2).$$

事实上,对任何$a>\mu^*(f_1)$与$b>\mu^*(f_2)$,在$\mathscr{I}$中存在$h_1$, $h_2$,使得$f_1\leqslant h_1$, $f_2\leqslant h_2$,且 $\mu^*(h_1)\leqslant a$, $\mu^*(h_2)\leqslant b$. 根据(13.5.3),由此得到$h_1+h_2\geqslant f_1+f_2$与$\mu^*(h_1+h_2)\leqslant a+b$,于是所述结论得证.

**(13.5.7)** 设$(f_n)$是$X$到$\bar{R}$的映射的任一递增序列,且当$n$充分大时,有$\mu^*(f_n)>-\infty$,则

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n) = \lim_{n\to\infty}\mu^*(f_n).$$

不等式$\mu^*(\sup_n f_n)\geqslant\sup_n\mu^*(f_n)$是显然的.现在来证明相反的不等式.可以限于考虑$\sup_n\mu^*(f_n)<+\infty$的情形,否则结论是显然的.于是根据假定,可设$\sup_n\mu^*(f_n)$与所有$\mu^*(f_n)$都有限. 下面证明,对每个$\varepsilon>0$,存在属于$\mathscr{I}$的函数的递增序列$(g_n)$,使对每个$n$,有$f_n\leqslant g_n$,并且$\mu^*(g_n)\leqslant\mu^*(f_n)+\varepsilon$. 此时,如果令$f=\sup_n f_n$, $g=\sup_n g_n$,就有 $g\in\mathscr{I}$, $f\leqslant g$,且根据(13.5.2),有$\mu^*(g)=\sup_n\mu^*(g_n)\leqslant\sup_n\mu^*(f_n)+\varepsilon$,最后有

$$\mu^*(f)\leqslant\mu^*(g)\leqslant\sup_n\mu^*(f_n)+\varepsilon.$$

由于$\varepsilon$是任意的,证明得以完成.

由定义,对每个$n$,存在$h_n\in\mathscr{I}$,使得$f_n\leqslant h_n$,并且

$$\mu^*(f_n)\leqslant\mu^*(h_n)\leqslant\mu^*(f_n)+2^{-n}\varepsilon.$$

令 $g_n=\sup(h_1, h_2, \cdots, h_n)$,则 $g_n$ 属于 $\mathscr{I}$ (12.7.5);显见序列$(g_n)$是递增的且$f_n\leqslant g_n$. 我们对$n$用归纳法来证明不等式

**(13.5.7.1)** $$\mu^*(g_n)\leqslant\mu^*(f_n)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

成立. 当$n=1$时,由定义这是显然的. 假定不等式(13.5.7.1)为真,注意到 $g_{n+1}=\sup(h_{n+1}, g_n)$, $f_n\leqslant\inf(h_{n+1}, g_n)$; 由于函数

$h_{n+1}$ 与 $g_n$ 不取值 $-\infty$，故

$$\sup(h_{n+1}, g_n) + \inf(h_{n+1}, g_n) = h_{n+1} + g_n,$$

因而根据(13.5.3)以及数 $\mu^*(g_n)$ 与 $\mu^*(h_{n+1})$ 都有限这一事实，并根据归纳法假设(13.5.7.1)，就有

$$\begin{aligned}\mu^*(g_{n+1}) &= \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(\inf(h_{n+1}, g_n)) \\ &\leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(f_n) \\ &\leqslant \mu^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

证毕.

注意，对于由函数组成的递减序列 $(f_n)$，即使所有数 $\mu^*(f_n)$ 都有限，也不一定有 $\mu^*(\inf\limits_n f_n) = \inf\limits_n \mu^*(f_n)$ (13.8 问题 13).

**(13.5.8)** 对任何非负函数序列 $(f_n)$，有

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n).$$

事实上，对每个正整数 $N$，由(13.5.6)推出

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(f_n),$$

然后只须对部分和 $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ 组成的递增序列应用(13.5.7)即得所需的结论.

对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射的任一序列 $(f_n)$，映射

$$x \to \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad (\text{对应地 } x \to \limsup_{n\to\infty} f_n(x))$$

在 $X$ 的每个点处有定义，记为 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ (相应地，$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$).

**(13.5.9)** **(Fatou 引理)** 对于非负函数的任一序列 $(f_n)$，恒有

$$\mu^*(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n).$$

事实上，对每个 $n \geqslant 1$，令 $g_n = \inf\limits_{p>0}(f_{n+p})$，显然有 $\mu^*(g_n) \leqslant$

$\inf\limits_{p\geqslant 0}\mu^*(f_{n+p})$，并且 $g_n\geqslant 0$. 由于序列 $(g_n)$ 递增且有

$$\lim_{n\to\infty}\inf f_n=\sup_n g_n,$$

故由 (13.5.7) 得到

$$\mu^*(\lim_{n\to\infty}\inf f_n)=\sup_n\mu^*(g_n)\leqslant\sup_n(\inf_{p\geqslant 0}\mu^*(f_{n+p}))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\inf\mu^*(f_n).$$

对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$，令 $\mu_*(f)=-\mu^*(-f)$，这个数称为 $f$ 关于测度 $\mu$ 的**下积分**. 上面证明的关于上积分的一切性质都可直接转述为下积分的性质. 特别是，如果令 $-\mathscr{I}=\mathscr{S}$（或 $\mathscr{S}(X)$），这里 $\mathscr{S}$ 是满足下述条件的函数 $f$ 所成的集：$f$ 在 $X$ 内上半连续，且以属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$的某个函数作为它的上界(这蕴涵它不能取值$+\infty$). 对任一函数 $f\in\mathscr{S}$，有 $\mu_*(f)=\inf\limits_{g\geqslant f,g\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)}\mu(g)$，并且对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$，有 $\mu_*(f)=\sup\limits_{h\leqslant f,h\in\mathscr{I}}\mu_*(h)$.

**(13.5.10)** 对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$，有 $\mu_*(f)\leqslant\mu^*(f)$.

根据定义，只须证明，若 $u\in\mathscr{S}$，$v\in\mathscr{S}$ 且 $u\leqslant v$，就有

$$\mu_*(u)\leqslant\mu^*(v).$$

由于 $-u\in\mathscr{I}$，故 $v-u=v+(-u)$ 在 $X$ 上有定义，它属于 $\mathscr{I}$ 且为非负，因而根据 (13.5.3) 有

$$0\leqslant\mu^*(v-u)=\mu^*(v+(-u))$$
$$=\mu^*(v)+\mu^*(-u)=\mu^*(v)-\mu_*(u).$$

代替 $\mu^*(f)$（相应地，$\mu_*(f)$），我们常把它写为 $\int^* fd\mu$ 或

$$\int^* f(x)d\mu(x)$$

$\left(\text{相应地，}\int_* fd\mu\text{ 或 }\int_* f(x)d\mu(x)\right)$.

对 $X$ 的任一子集 $A$，令 $\mu^*(A)=\mu^*(\varphi_A)$，$\mu_*(A)=\mu_*(\varphi_A)$；并称这两个非负数(可能等于 $+\infty$)为 $A$ 的**外测度**与**内测度**.

(13.5.11) 例. 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度，$I=]a,b[$ 是 $\bar{R}$ 的一个开区间. 我们证明 $\lambda^*(I)=b-a$（当 $b=+\infty$或 $a=-\infty$

时，它等于 $+\infty$）。事实上，对于 $a<a'<b'<b$，存在 $\boldsymbol{R}$ 到 $[0,1]$ 的连续映射 $f$，其支集包含在 $[a,b]$ 内，且 $f$ 在 $[a',b']$ 上等于 1 (4.5.2)。我们有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\geqslant b'-a'$。反之，对每个使得 $0\leqslant g\leqslant\varphi_I$ 的函数 $g\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt\leqslant b-a,$$

从而得知 $\lambda^*(I)=b-a$。

现在设 $U$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内的任一开集，$U$ 的连通分支（3.19）是开区间（(3.19.1)与(3.19.5)）。$U$ 的所有连通分支形成一个至多可数的集 $(I_k)$，因为每个连通分支含有可数集 $\boldsymbol{Q}$ 的一个点，且这些连通分支两两不相交。于是，令 $I_k=]a_k,b_k[$，就有 $\varphi_U=\sum_k\varphi_{I_k}$，因而（(12.7.4) 与 (13.5.4)）

**(13.5.11.1)** $$\lambda^*(U)=\sum_k(b_k-a_k).$$

## 6. 可忽略函数与可忽略集

$X$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 称为（关于测度 $\mu$ 的）**可忽略函数**或 **$\mu$ 可忽略函数**，如果 $\mu^*(|f|)=0$。显然，这时对 $\boldsymbol{R}$ 内的任何 $a\neq0$，$af$ 都是可忽略的，且若 $|g|\leqslant|f|$，则 $g$ 也是可忽略的。

**(13.6.1)** 设 $(f_n)$ 是非负可忽略函数序列，则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 是可忽略的。

这可从 (13.5.8) 直接得到。

$X$ 的子集 $N$ 称为（关于 $\mu$ 的）**可忽略集**或 **$\mu$ 可忽略集**，如果特征函数 (12.7) $\varphi_N$ 关于 $\mu$ 是可忽略的，显然可忽略集的任一子集是可忽略的。

**(13.6.2)** 可忽略集的可数并是可忽略的。

事实上，设 $(N_k)$ 是可忽略集序列，$N=\bigcup_k N_k$。我们有

$$\varphi_N=\sup_k\varphi_{N_k}\leqslant\sum_k\varphi_{N_k},$$

再由(13.6.1)即得所需的结论.

例如,对于 Lebesgue 测度 $\lambda$, $\boldsymbol{R}$ 的单点集 $\{t\}$ 是可忽略的. 事实上,对每个 $\varepsilon>0$,存在函数 $f\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})$,它取值于$[0,1]$内,在点 $t$ 处等于 1,而在区间 $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ 的余集上等于 0. 这样,$\lambda^*(\varphi_{\{t\}})\leqslant\mu(f)\leqslant 2\varepsilon$. 因而,由(13.6.2), $\boldsymbol{R}$ 内的任一可数集(特别是有理数集 $\boldsymbol{Q}$)关于 Lebesgue 测度是可忽略的.

我们还能给出关于 Lebesgue 测度为可忽略的不可数集的例子(13.8 问题 4).

称一个性质 $P(x)$ 在 $X$ 内(关于 $\mu$) **几乎处处成立**,如果使得 $P(x)$ 为真的点的集的余集是可忽略的.

**(13.6.3)** 为使 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 是可忽略的,必须且只须它几乎处处取值零.

设 $N$ 是使得 $|f(x)|>0$ 的点 $x\in X$ 的集,我们有

$$\varphi_N\leqslant\sup_n n|f| \text{和} |f|\leqslant\sup_n n\varphi_N,$$

因而由(13.5.7)即得所需的结论.

**(13.6.4)** 设 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 满足 $\mu^*(f)<+\infty$ (相应地, $\mu_*(f)>-\infty$),则几乎处处有 $f(x)<+\infty$ (相应地 $f(x)>-\infty$).

只须证明关于上积分的论断. 由假定,存在函数 $h\in\mathscr{I}$,使得 $f\leqslant h$ 且 $\mu^*(h)<+\infty$. 因而可以限于 $f\in\mathscr{I}$ 的情形. 又由于此时存在函数 $u\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$,使得 $f-u\geqslant 0$,因而还可以假设 $f\geqslant 0$. 现在设 $N$ 是使 $f(x)=+\infty$ 的 $x\in X$ 所成的集. 对任何正整数 $n$,有 $n\varphi_N\leqslant f$,从而 $n\mu^*(\varphi_N)\leqslant\mu^*(f)$,于是由假设推出 $\mu^*(\varphi_N)=0$.

在 $X$ 到集 $E$ 的映射之间,关系"$f(x)=g(x)$ 在 $X$ 内几乎处处成立"是一个等价关系,因为两个可忽略集的并是可忽略集. 这时,我们称 $f$ 与 $g$ (关于 $\mu$) 是**等价的**或 **$\mu$ 等价的**,且把 $X$ 到 $E$ 的映射 $f$ 的等价类记作 $\tilde{f}$. 设 $f$ 是 $X$ 的子集 $A$ 到 $E$ 的一个映射,若 $X-A$ 是可忽略集,我们(在用语随便时)就称 $f$ 在 $X$ 上**几乎处**处

**有定义**；也称定义于$X$上且成为$f$的延拓的任一函数的等价类（显然这个类只依赖于$f$）为$f$的等价类，并记作$\tilde{f}$. 设$f$, $g$是两个几乎处处有定义的函数，如果$\tilde{f}=\tilde{g}$，我们称$f$与$g$**是等价的**；这意味着使$f$与$g$都有定义且使$f(x)=g(x)$的点$x\in X$的集是某个可忽略集的余集.

**(13.6.5)** 设$f$,$g$是$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的两个等价映射，则$\mu^*(f)=\mu^*(g)$.

设$N$是使$f(x)\neq g(x)$的$x\in X$构成的可忽略集. 由于函数$f$, $g$与$\sup(f, g)$在$X-N$上相等，故我们可以限于考虑$f\leqslant g$的情形. 设$h$是在$N$的每个点处等于$+\infty$而在其他点处等于0的可忽略函数，对每个使得$f\leqslant v$的函数$v\in\mathscr{I}$，函数$v+h$在$X$上有定义且有$g\leqslant v+h$，从而根据(13.5.6)，由于$\mu^*(v)>-\infty$，有

$$\mu^*(g)\leqslant\mu^*(v+h)\leqslant\mu^*(v)+\mu^*(h)=\mu^*(v).$$

由$\mu^*(f)$的定义，便得到$\mu^*(g)\leqslant\mu^*(f)$，因而$\mu^*(g)=\mu^*(f)$.

若$f$是$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的映射，它在$X$上几乎处处有定义且有限，则它等价于在$X$上有定义且有限的一个函数. 若$f$,$g$是在$X$上几乎处处有定义的两个映射，它们取值于$\bar{\boldsymbol{R}}$中且几乎处处有限，则$f+g$与$fg$也具有同样性质，且这两个函数的等价类只依赖于$f$与$g$，我们把这两个等价类分别记作$\tilde{f}+\tilde{g}$与$\tilde{f}\tilde{g}$.

若$f(x)\leqslant g(x)$几乎处处成立，则对任何等价于$f$（相应地，$g$）的函数$f_1$（相应地，$g_1$），$f_1(x)\leqslant g_1(x)$也几乎处处成立. 这时也写为$\tilde{f}\leqslant\tilde{g}$，从而就在$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的映射关于$\mu$的等价类所成的集上定义了一个序关系.

## 7. 可积函数与可积集

我们已经看到(13.5.10)，对$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的任一映射$f$，有

$$\mu_*(f)\leqslant\mu^*(f).$$

若$\mu_*(f)$与$\mu^*(f)$均有限且相等，则称$f$（关于$\mu$）**是可积函数**或**$\mu$可积函数**；而这个相同的值称为**$f$关于$\mu$的积分**，记作$\mu(f)$，或

$\langle f, \mu\rangle$，或 $\int f d\mu$，或 $\int f(x) d\mu(x)$．显然每个函数 $f \in \mathscr{K}_R(X)$ 是可积的，而且它的积分正是 $\mu$ 在 $f$ 处的值，这说明上面的记号是合理的。

于是，可积函数是几乎处处有限的(13.6.4)．然而有界函数却不一定是可积的，例如 $\bar{R}$ 上不等于 0 的常值函数，或连续函数 $1/(1+|x|)$（关于 Lebesgue 测度）就不是可积的（参阅（13.20））．

基于（13.5）的定义，上面的定义转化为下述准则：

**(13.7.1)** (i) 为使 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 可积，必须且只须对每个 $\varepsilon>0$，存在函数 $g \in \mathscr{S}$ 与 $h \in \mathscr{I}$，使得 $g \leqslant f \leqslant h$，且

$$\mu^*(h)-\mu_*(g) \leqslant \varepsilon$$

（或由（13.5.3），这等价于 $\mu^*(h-g) \leqslant \varepsilon$）．

(ii) 若 $f$ 可积，则存在属于 $\mathscr{I}$ 的函数的递减序列 $(h_n)$ 与属于 $\mathscr{S}$ 的函数的递增序列 $(g_n)$，使得 $g_n \leqslant f \leqslant h_n$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(h_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_*(g_n)=\mu(f).$$

关于 (i)，所述条件一方面蕴涵 $\mu^*(h)$ 与 $\mu_*(g)$ 必为有限（因而 $\mu^*(f)$ 与 $\mu_*(f)$ 也同样为有限），另一方面蕴涵 $\mu^*(f)=\mu_*(f)$．

至于 (ii)，对每个 $n$，存在 $h'_n \in \mathscr{I}$ 与 $g'_n \in \mathscr{S}$，使得 $g'_n \leqslant f \leqslant h'_n$ 且 $\mu(f)-(1/n) \leqslant \mu_*(g'_n) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu^*(h'_n) \leqslant \mu(f)+(1/n)$．于是只须取

$$h_n=\inf(h'_1,\cdots,h'_n) \text{ 和 } g_n=\sup(g'_1,\cdots,g'_n)$$

即可。

显然，若 $f$ 可积，则任何等价于 $f$ 的函数 $f_1$ 都可积（13.6），且有 $\int f_1 d\mu=\int f d\mu$（我们也把这个数记作 $\mu(\tilde{f})$）．由此可以导致只在 $X$ 上几乎处处有定义的函数 $f$ 是可积函数的定义：如果在 $X$ 上有定义且等价于 $f$ 的函数可积，就称 $f$ 可积．我们也把值 $\mu(\tilde{f})$ 记作 $\int f d\mu$，或 $\int f(x) d\mu(x)$，或 $\mu(f)$，或 $\langle f, \mu\rangle$．

**(13.7.2)** 为使 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 可积，必须且只须对每个 $\varepsilon>0$，存在函数 $u \in \mathscr{K}_R(X)$，使得

$$\mu^*(|f-u|)\leqslant\varepsilon.$$

所述条件是必要的．事实上，假定 $f$ 可积，则可推出存在函数 $g\in\mathscr{S}$，$h\in\mathscr{I}$，使得 $g\leqslant f\leqslant h$ 且 $\mu^*(h-g)\leqslant\varepsilon/2$．另一方面 ((13.5.1) 与 (13.5.3))，存在 $u\in\mathscr{K}_R(X)$，使得 $u\leqslant h$ 且

$$\mu^*(h-u)\leqslant\varepsilon/2.$$

由于 $|f-u|\leqslant|h-u|+|h-g|$，故由 (13.5.6) 推出，

$$\mu^*(|f-u|)\leqslant\mu^*(|h-u|)+\mu^*(|h-g|)\leqslant\varepsilon.$$

所述条件是充分的．事实上，若 $u\in\mathscr{K}_R(X)$ 满足

$$\mu^*(|f-u|)\leqslant\varepsilon,$$

则由定义 (13.5.5)，存在函数 $v\in\mathscr{I}$，使得 $|f-u|\leqslant v$ 且

$$\mu^*(v)\leqslant 2\varepsilon.$$

然而关系 $-v\leqslant f-u\leqslant v$ 可写为

$$-v+u\leqslant f\leqslant v+u$$

(因为 $u$ 是有限的)，且有 $-v+u\in\mathscr{S}$，$v+u\in\mathscr{I}$ (12.7.5)，还有

$$\mu^*(v+u-(-v+u))=2\mu^*(v)\leqslant 4\varepsilon,$$

从而 $f$ 是可积的．

**(13.7.3)** $X$ 上的 $\mu$ 可积有限函数组成的集 $\mathscr{L}_R^1(X,\mu)$ (也记作 $\mathscr{L}_R^1(\mu)$ 或 $\mathscr{L}_R^1$) 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，而映射 $f\to\int f d\mu$ 是 $\mathscr{L}_R^1$ 上的正$\left(\text{即关系 } f\geqslant 0 \text{ 蕴涵} \int f d\mu\geqslant 0\right)$线性形式．

显然，若 $f$ 为有限且可积，则对每个纯量 $a\in\boldsymbol{R}$，$af$ 也为有限且可积，并有 $\int afd\mu=a\int fd\mu$．若 $f$ 与 $g$ 为有限且可积，则把 (13.5.6) 用到 $f$ 与 $g$ 上，也用到 $-f$ 与 $-g$ 上，就有

$$\int fd\mu+\int gd\mu\leqslant\int_*(f+g)d\mu\leqslant\int^*(f+g)d\mu$$
$$\leqslant\int fd\mu+\int gd\mu,$$

这就完成了证明．

由此得知，若 $f$ 与 $g$ 是 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的两个(有限或非有限)可积映

射，则 $f+g$（几乎处处有定义）是可积的，且有

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

**(13.7.4)** 若 $f$ 可积，则 $|f|$，$f^+$ 与 $f^-$ 也可积，且有

**(13.7.4.1)**
$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu.$$

若 $f$ 与 $g$ 可积，则 $\sup(f, g)$ 与 $\inf(f, g)$ 也可积。

若 $u \in \mathscr{K}_{R}(X)$ 使得 $\mu^*(|f-u|) \leqslant \varepsilon$，则因

$$||f| - |u|| \leqslant |f-u|,$$

从而推出 $\mu^*(||f|-|u||) \leqslant \varepsilon$，这表明(13.7.2) $|f|$ 是可积的．此外我们有 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$，从而

$$-\mu(|f|) = \mu^*(-|f|) \leqslant \mu^*(f) = \mu(f) \leqslant \mu^*(|f|) = \mu(|f|),$$

这就证明了(13.7.4.1)．由于 $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$，$f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$，所以 $f^+$ 与 $f^-$ 是可积的(13.7.3)．若 $f$ 与 $g$ 可积，则 $f-g$ 几乎处处有定义且可积，而（处处有定义的）函数 $\sup(f,g)$ 与 $\inf(f,g)$ 分别等价于（几乎处处有定义的）函数 $\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ 与 $\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$，因而是可积的．

**(13.7.5)** 为使函数 $h \in \mathscr{I}$（相应地，$g \in \mathscr{S}$）可积，必须且只须 $\mu^*(h) < +\infty$（相应地，$\mu_*(g) > -\infty$）．

事实上，鉴于(13.5.1)与(13.5.3)，若 $\mu^*(h) < +\infty$，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在函数 $u \in \mathscr{K}_{R}(X)$，使得 $u \leqslant h$，并且 $\mu^*(h-u) = \mu^*(h) - \mu(u) \leqslant \varepsilon$；于是所需结论由可积函数的定义得到．

$X$ 的子集 $A$ 称为**可积子集**，如果它的特征函数 $\varphi_A$ 可积，或等价地，如果 $\mu^*(A)$ 与 $\mu_*(A)$ 有限且相等；此时把这两个相等的值 $\int \varphi_A d\mu$ 记作 $\mu(A)$，称为 $A$ 的**测度**．我们有 $\mu(\phi) = 0$．可忽略集就是测度为零的可积集．若 $A$ 可积，$B$ 是使得 $A \cap \complement B$ 与 $B \cap \complement A$ 为可忽略的任意集，则 $B$ 可积，且有 $\mu(B) = \mu(A)$．

**(13.7.6)** 若 $A$ 与 $B$ 是两个可积集，则 $A \cup B$，$A \cap B$ 与 $A \cap \complement B$ 也

是可积集.

这由公式(12.7.3)得到.

**(13.7.7)** 任何紧集是可积的. 为使开集 $U$ 可积,必须且只须

$$\mu^*(U) < +\infty;$$

特别地,任何相对紧开集是可积的.

这由(13.7.5)与(12.7.4)立即得到.

**(13.7.8)** 例. 对于 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度,根据(13.5.11)与有限集关于 Lebesgue 测度为可忽略这一事实(13.6),每个以 $a,b(a\leqslant b)$ 为端点的有界区间 $I$ 是可积的,且其测度为 $b-a$.

对每个有界区间 $I=[a,b]$, 由于集 $\boldsymbol{Q}$ 是可忽略的, 故"Dirichlet 函数"(3.11) $\varphi_I-\varphi_I\varphi_Q$(它在 $I$ 的有理点处与 $\complement I$ 内等于 0,而在 $I$ 的无理点处等于 1)是可积的,它的积分等于 $b-a$.

**(13.7.9)** 为使 $X$ 的子集 $A$ 可积, 必须且只须对每个 $\varepsilon>0$, 存在紧集 $K$ 与开集 $G$, 使得 $K\subset A\subset G$, 且 $\mu^*(G-K)\leqslant\varepsilon$.

鉴于可积函数的定义与(12.7.4), 所述条件显然是充分的. 现在证明它是必要的. 设 $\varepsilon$ 满足 $0<\varepsilon<1$. 由假定, 存在 $h\in\mathscr{I}$, 使得 $\varphi_A\leqslant h$ 并且 $\int(h-\varphi_A)d\mu\leqslant\varepsilon$. 设 $G$ 是使得 $h(x)>1-\varepsilon$ 的 $x\in X$ 所成的集,它是开的(12.7.2)且包含 $A$. 显然 $h\geqslant(1-\varepsilon)\varphi_G$, 因而

$$\mu(G)\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}\int hd\mu\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}(\mu(A)+\varepsilon).$$

另一方面,存在 $g\in\mathscr{S}$, 使得 $g\leqslant\varphi_A$ 并且 $\int(\varphi_A-g)d\mu\leqslant\varepsilon$, 由 $\mathscr{S}$ 的定义,使得 $g(x)>0$ 的 $x\in X$ 的集是相对紧的. 取 $\delta>0$,使得 $\delta\mu(A)\leqslant\varepsilon$; 设 $K$ 是使得 $g(x)\geqslant\delta$ 的 $x\in X$ 的集, 它在 $X$ 内是闭的(12.7.2), 从而是紧的(3.17.3), 因为它包含在一个相对紧集内. 显然 $K\subset A$, 且若设 $B=A-K$, 则有 $g\leqslant\varphi_K+\delta\varphi_B$, 从而

$$\int gd\mu\leqslant\mu(K)+\delta\mu(B)\leqslant\mu(K)+\delta\mu(A)\leqslant\mu(K)+\varepsilon,$$

最后，$\mu(A) \leqslant \int g d\mu + \varepsilon \leqslant \mu(K) + 2\varepsilon$. 证毕.

我们能给出在 $\boldsymbol{R}$ 内为有界但关于 Lebesgue 测度却不可积的集的例子（13.21 习题 6）.

**(13.7.10)** 设 $\pi: X \to X'$ 是一个同胚. 由定义直接得到，对 $X'$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f'$，有

$$\int^* f' d(\pi(\mu)) = \int^* (f' \circ \pi) d\mu, \quad \int_* f' d(\pi(\mu)) = \int_* (f' \circ \pi) d\mu.$$

为使 $f'$ 是 $\pi(\mu)$ 可积的，必须且只须 $f' \circ \pi$ 是 $\mu$ 可积的，此时有

$$\int f' d(\pi(\mu)) = \int (f' \circ \pi) d\mu.$$

## 8. Lebesgue 收敛定理

**(13.8.1)** 设 $(f_n)$ 是可积函数的递增序列，则为使 $\sup\limits_n f_n$ 可积，必须且只须 $\sup\limits_n \int f_n d\mu < +\infty$，此时有

$$\int (\sup_n f_n) d\mu = \sup_n \int f_n d\mu. \tag{13.8.1.1}$$

由于对一切 $n$ 有 $\int^* f_n d\mu > -\infty$，所以

$$\int^* (\sup_n f_n) d\mu = \sup_n \int f_n d\mu \quad (13.5.7).$$

这就证明了所述条件的必要性. 反之，若所述条件满足，令

$$f = \sup_n f_n,$$

则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n$，使得函数 $f - f_n$（因为 $f$ 与 $f_n$ 几乎处处有定义（13.6.4），故 $f - f_n$ 几乎处处有定义）满足

$$\int^* (f - f_n) d\mu \leqslant \int^* f d\mu + \int^* (-f_n) d\mu = \int^* f d\mu - \int f_n d\mu \leqslant \varepsilon$$

（13.5.6）. 然而存在函数 $u \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$，使得 $\int |f_n - u| d\mu \leqslant \varepsilon$

(13.7.2)，因而 (13.5.6) 有

$$\int^* |f-u|d\mu \leqslant \int^* |f-f_n|d\mu + \int^* |f_n-u|d\mu \leqslant 2\varepsilon,$$

于是由 (13.7.2) 即得所需的结论。

把 (13.8.1) 用于添上负号的函数，当然就有关于可积函数的递减序列的一条相应的定理。

**(13.8.2)** 设 $(f_n)$ 是可积函数的任一序列，则为使 $f=\sup\limits_n f_n$ 可积，必须且只须存在非负函数 $g$，使得 $\int^* g d\mu < +\infty$，并且几乎处处有 $f_n \leqslant g$。

取 $g=f^+$，即见所述条件是必要的。反之，假定这个条件满足，令 $g_n=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f_k$，则 $g_n$ 是可积的 (13.7.4)，且有 $f=\sup\limits_n g_n$。由于序列 $(g_n)$ 递增且

$$\int g_n d\mu \leqslant \int^* g d\mu < +\infty,$$

从而由 (13.8.1) 即得所需的结论。

**(13.8.3)** 设 $(f_n)$ 是可积函数序列，并且假定存在非负函数 $h$，使得 $\int^* h d\mu < +\infty$，且对一切 $n$，$-h \leqslant f_n \leqslant h$ 几乎处处成立。这时，$\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup f_n$ 可积，且有

**(13.8.3.1)**
$$\int (\lim_{n\to\infty}\inf f_n) d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf \int f_n d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup \int f_n d\mu \leqslant \int (\lim_{n\to\infty}\sup f_n) d\mu.$$

只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n$ 可积以及 (13.8.3.1) 中的第一个不等式，剩下的可由换 $f_n$ 为 $-f_n$ 推出。令 $g_n=\inf\limits_{p\geqslant 0} f_{n+p}$，把 (13.8.2) 用于序列 $(-f_{n+p})_{p\geqslant 0}$，且由 $f_{n+p}\geqslant -h$ 的假定，可知 $g_n$ 可积，并且显然对一切 $p\geqslant 0$ 有 $\int g_n d\mu \leqslant \int f_{n+p} d\mu$，从而

$$\int g_n d\mu \leqslant \inf_{p\geqslant 0}\int f_{n+p} d\mu.$$

序列 $(g_n)$ 是递增的，且对一切 $n$ 有 $g_n \leqslant h$；而由定义(12.7.10)，有 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_n g_n$；因而由(13.8.1)推出，$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 可积，并且

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu = \sup_n \int g_n d\mu \leqslant \sup_n (\inf_{p\geqslant 0} \int f_{n+p} d\mu)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**(13.8.4)** (**控制收敛定理**). 设 $(f_n)$ 是可积函数序列. 假定

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

几乎处处存在，且存在非负函数 $g$，使得

$$\int^* g d\mu < +\infty,$$

并且对一切 $n$，$|f_n| \leqslant g$ 几乎处处成立. 在这些假定下，$f$ 必是可积的，且有

**(13.8.4.1)** $$\int f(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) d\mu(x).$$

事实上，应用(13.8.3)，并且注意在所考虑的情形下，(13.8.3.1)的首尾两项相等，即可得到所需的结论.

上述定理的好处在于，为了在积分号下取极限，并不要求所给序列一致收敛(甚至也不要求它在 $X$ 的任一紧集上一致收敛). 特别有：

**(13.8.5)** 设 $(f_n)$ 是可积函数序列. 若以 $\int |f_n| d\mu$ 为通项的级数收敛，则以 $f_n(x)$ 为通项的级数在 $\boldsymbol{R}$ 内几乎处处绝对收敛，且若令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，则(几乎处处有定义的)函数 $f$ 可积，且有

**(13.8.5.1)** $$\int f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) d\mu(x)$$

("由可积函数构成的级数可逐项积分").

事实上，若对每个非负整数 $N$，令 $g_N = \sum\limits_{n=1}^{N} |f_n|$，则序列 $(g_n)$

是可积函数的递增序列，并且 $\int g_N d\mu = \sum_{n=1}^{N}\int |f_n| d\mu$ ((13.7.4) 与 (13.7.3))．根据 (13.8.1)，函数 $g = \lim_{N\to\infty} g_N = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 是可积的．由此首先得到 $g$ 几乎处处有限 (13.6.4)，换言之，以 $|f_n(x)|$ 为通项的级数几乎处处收敛，由此即得第一个论断 ((5.3.1) 与 (5.3.2))．此外，对一切 $N$，有 $\sum_{n=1}^{N} |f_n| \leqslant g$；根据 (13.8.4)，即得 $f$ 的可积性与关系式 (13.8.5.1)．

**(13.8.6)** (i) 设 $E$ 是度量空间，$(x, z) \to f(x, z)$ 是 $X \times E$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射，$z_0$ 是 $E$ 中的点．我们假定：

1° 对每个 $z \in E$，函数 $x \to f(x, z)$ 可积；

2° 对几乎一切 $x \in X$，函数 $z \to f(x, z)$ 在点 $z_0$ 处连续；

3° 存在可非负积函数 $g$，使对一切 $z \in E$，在 $X$ 内几乎处处有 $|f(x, z)| \leqslant g(x)$．

这时，$h(z) = \int f(x, z) d\mu(x)$ 在点 $z_0$ 处连续．

(ii) 此外还假定 $E$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间，且 $f$ 满足下列条件：

4° 对几乎一切 $x \in X$，函数 $z \to f(x, z)$ 是有限的，并且具有导数 $D_2 f(x, z)$；

5° 存在非负可积函数 $g_1$，使对一切 $z \in E$，在 $X$ 内几乎处处有 $|D_2 f(x, z)| \leqslant g_1(x)$．

这时，$h$ 在每个点 $z \in E$ 处可导，且有

**(13.8.6.1)** $$h'(z) = \int D_2 f(x, z) d\mu(x)$$

("积分号下求导数")．

(iii) 最后，假定 $E$ 是 $\boldsymbol{C}$ 内的开集，$f$ 是 $X \times E$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射，满足下列条件：

6° 对几乎一切 $x \in X$，函数 $z \to f(x, z)$ 在 $E$ 内解析；

7° 对一切 $z \in E$，函数 $x \to f(x, z)$ 可积；

8° 存在非负可积函数 $g$，使对一切 $z \in E$，在 $X$ 内几乎处处有 $|f(x, z)| \leqslant g(x)$．

这时 $h$ 在 $E$ 内解析，且对每个正整数 $k$ 与每个 $z\in E$，函数 $x\to D_2^k f(x,z)$ 可积,并有 $D^k h(z)=\int D_2^k f(x,z)d\mu(x)$.

对于 (i)，只须证明 (3.13.14)，对每个在 $E$ 内趋于 $z_0$ 的序列 $(z_n)$，有 $\lim_{n\to\infty} h(z_n)=h(z_0)$. 这可由假定与 (13.8.4) 得到.

对于 (ii)，根据 (3.13.14)，也只须证明,对每个趋于 0 的非零实数序列 $(t_n)$，序列

$$\int \frac{1}{t_n}(f(x,z+t_n)-f(x,z))d\mu(x)$$

趋于 (13.8.6.1) 的右端. 而由假设与 (8.5.4)，对任意的 $n$ 有

$$\left|\frac{1}{t_n}(f(x,z+t_n)-f(x,z))\right|\leqslant g_1(x),$$

因而所需的结论仍可由 (13.8.4) 得到.

至于(iii),设 $\gamma: t\to a+re^{it}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 是包含在 $E$ 内的一个回路;对属于圆盘 $|z-a|\leqslant r$ 内部的每个 $z$，我们有

**(13.8.6.2)** $$f(x,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x,s)ds}{s-z}.$$

由此推出 ((13.16.5) 与 (8.7.8))，对几乎一切 $x$，$f(x,z)$ 是序列

$$(1/n)\sum_{k=1}^{n} f_{kn}(x)$$

的极限,这里

$$f_{kn}(x)=\frac{f(x,a+re^{2k\pi i/n})re^{2k\pi i/n}}{a+re^{2k\pi i/n}-z}.$$

应用 (13.8.4)，可知 $h(z)$ 是序列

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int f_{kn}(x)d\mu(x)\right)$$

的极限,因而

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(\xi)d\xi}{\xi-z},$$

这表明 $h$ 在 $E$ 内是解析的 (9.9.4). 用 $k!/(\zeta-z)^{k+1}$ 代替 (13.8.6.2) 右边的 $1/(\zeta-z)$，就得到关于 $h$ 的导数的论断.

**(13.8.7)** (*i*) 若 $(A_n)$ 是可积集序列，则 $A=\bigcap_n A_n$ 是可积的；如果序列 $(A_n)$ 还是递减的，则

**(13.8.7.1)** $$\mu(A)=\inf_n \mu(A_n).$$

(ii) 若 $(A_n)$ 是可积集序列，且所有 $A_n$ 都包含在某个可积集 $B$ 内，则 $A=\bigcup_n A_n$ 是可积的.

(iii) 若 $(A_n)$ 是可积集序列，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<+\infty,$$

则并 $A=\bigcup_n A_n$ 是可积的，且有

**(13.8.7.2)** $$\mu(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

如果再设 $A_n$ 是两两不相交的，则有

**(13.8.7.3)** $$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

(**"测度的完全可加性"**).

论断 (i) 是把 (13.8.1) 与 (13.8.2) 应用于序列 $(-\varphi_{A_n})$ 而得到的结果. 论断 (ii) 由 (13.8.2) 得到. (iii) 的第一个论断与公式 (13.8.7.2) 是 (13.8.2)、不等式 $\varphi_A\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{A_n}$ 以及 (13.5.8) 的推论. 最后，如果 $A_n$ 两两不相交，则有 $\varphi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{A_n}$，再把(13.8.5)应用于序列 $(\varphi_{A_n})$，即得 (13.8.7.3).

**(13.8.8)** 例. 设 $f$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的简单函数，并且具有紧支集(因而由 (7.6.1)，它是有界的)，则 $f$ 关于 Lebesgue 测度 $\lambda$ 是可积的，并且若设 $J=[a,b]$ 是包含 $\operatorname{Supp}(f)$ 的一个区间，则有

**(13.8.8.1)** $$\int f d\lambda=\int_a^b f(t)\,dt,$$

这里右边是在 (8.7) 意义下的积分. 事实上，我们有

$$|f|\leqslant\|f\|\varphi_J.$$

根据(7.6.1)、(8.7.8)与(13.8.4)，只须对具有紧支集的阶梯函数(7.6)证明(13.8.8.1)。而这样的函数是区间的特征函数的线性组合，于是最后归结为 $f$ 是区间特征函数 $\varphi_I$ 的情形，因而所需论断由(13.7.8)得到。

## 问　　题

1) 在离散空间 $\boldsymbol{N}$ 上取测度 $\mu$，使对一切 $n$ 都有 $\mu(\{n\})=1$。试证关于 $\mu$ 为可积的函数 $n\to u_n$ 就是那些使得通项为 $u_n$ 的级数绝对收敛的函数 $n\to u_n$；也就是其上积分(或下积分)为有限的函数。我们有

$$\int u_n d\mu(n)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n,$$

且空间 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(N,\mu)$ 就是 Banach 空间 $l^1$(5.7 问题 1)。

2) a) 试证，如果 $f$ 与 $g$ 是定义在 $X$ 上的两个非负实值函数，则

$$\mu^*(\sup(f,g))+\mu^*(\inf(f,g))\leqslant\mu^*(f)+\mu^*(g).$$

b) 设 $f$ 是使得 $\mu^*(f)$ 为有限的实值函数，试证存在可积函数 $f_1\geqslant f$，使得 $\mu(f_1)=\mu^*(f)$；若 $f_2$ 是另一可积函数，使得 $f_2\geqslant f$ 且 $\mu(f_2)=\mu^*(f)$，则 $f_1$ 与 $f_2$ 是等价的。

c) 设 $f$ 是实值函数，且 $\mu^*(f)$ 与 $\mu_*(f)$ 均为有限；设 $g$ 与 $h$ 是两个可积函数，使得 $g\leqslant f\leqslant h$，并且 $\mu(g)=\mu_*(f)$，$\mu(h)=\mu^*(f)$。试证此时有

$$\mu_*(f-g)=\mu_*(h-f)=0,$$

并且 $\mu^*(f-g)=\mu^*(h-f)=\mu^*(f)-\mu_*(f)$。

d) 设 $f_1, f_2$ 是两个实值函数，且 $\mu^*(f_1)$，$\mu^*(f_2)$，$\mu_*(f_1)$ 与 $\mu_*(f_2)$ 均为有限，试证此时有 $\mu_*(f_1+f_2)\leqslant\mu_*(f_1)+\mu^*(f_2)\leqslant\mu^*(f_1+f_2)$(若 $g_2$ 是可积函数，使得 $f_2\leqslant g_2$，且 $\mu^*(f_2)=\mu(g_2)$，则对每个满足 $h\leqslant f_1+f_2$ 的可积函数 $h$，几乎处处有 $h-g_2\leqslant f_1$)。由此推断，若 $f_1$ 可积，则

$$\mu^*(f_1+f_2)=\mu(f_1)+\mu^*(f_2),\quad \mu_*(f_1+f_2)=\mu(f_1)+\mu_*(f_2),$$

且

$$\mu^*(f_1+f_2)=\mu^*(\sup(f_1,f_2))+\mu^*(\inf(f_1,f_2))$$

(利用 a))。

e) 设 $f$ 是有限可积函数。为使满足 $\mu^*(g)$ 为有限的函数 $g$ 可积，必须且只须 $\mu(f)=\mu^*(g)+\mu^*(f-g)$(设 $g_1$ 是可积函数，满足 $g\leqslant g_1$ 并且

$$\mu^*(g)=\mu(g_1),$$

注意 $f - g_1 \leqslant f - {}'g$)。

3) a) 对于 $X$ 的任意两个子集 $A$, $B$, 试证

$$\mu^*(A\cup B) + \mu^*(A\cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

b) 对于 $X$ 的每个子集 $A$, 试证 $\mu_*(A)$ 是包含在 $A$ 内的紧集的测度的上确界.

c) 对于 $X$ 的每个外测度为有限的子集 $A$, 试证存在两个可积集 $A_1, A_2$, 使得 $A_1 \subset A \subset A_2$, 且 $\mu_*(A) = \mu(A_1)$, $\mu^*(A) = \mu(A_2)$. 此时有

$$\mu_*(A - A_1) = \mu_*(A_2 - A) = 0,$$

$$\mu^*(A - A_1) = \mu^*(A_2 - A) = \mu^*(A) - \mu_*(A).$$

d) 设 $A$ 是可积集, 试证对每个集 $B \subset A$, 有 $\mu(A) = \mu^*(B) + \mu_*(A - B)$.

e) 设 $A$, $B$ 是两个外测度为有限且没有公共点的集. 试证,如果令 $C = A\cup B$, 则有

$$\mu_*(A) + \mu_*(B) \leqslant \mu_*(C) \leqslant \mu_*(A) + \mu^*(B) \leqslant \mu^*(C) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

且

$$\mu_*(C) - \mu_*(A) - \mu_*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - \mu^*(C).$$

(对于最后一个不等式,借助于 c) 归结为 $\mu_*(A) = \mu_*(B) = 0$ 的情形;若 $A_2$ 与 $B_2$ 是两个可积集,使得 $A\subset A_2, B\subset B_2$ 且 $\mu^*(A) = \mu(A_2), \mu^*(B) = \mu(B_2)$, 证明 $\mu_*(C) \leqslant \mu(A_2 \cap B_2)$.)

4) 设 $\lambda$ 是区间 $I = [0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度.

a) 对任意的 $\alpha (0 \leqslant \alpha < 1)$, 在 $I$ 上构造一个疏紧集, 使它的测度等于 $\alpha$ (适当地修改 Cantor 三分集 (4.2 问题 2) 的构造方法, 而 Cantor 三分集正是 $\alpha = 0$ 的情形).

b) 在 $I$ 上构造一个两两互不相交的疏紧集序列 $(A_n)$, 使得

$$\lambda(A_n) = 2^{-n},$$

且每个作为 $I - \left(\bigcup_{i\leqslant n} A_i\right)$ 的连通分支的区间包含 $A_{n+1}$ 的一个测度大于 0 的子集. 令 $A = \bigcup_n A_n$, 试证 $A$ 是测度等于 1 的瘦集,因而作为瘦集的余集的 $I - A$ 是可忽略集.

5) 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $E$ 是赋于空间 $\mathscr{L}^1(\lambda)$ 简单收敛拓扑 (12.15) 而得到的拓扑向量空间. 试证 $E$ 上的线性形式 $f \mapsto \int f d\lambda$ 不是连续的.

6）设 $(A_n)$ 是 $X$ 中的 $\mu$ 可积集序列，且 $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$。对每个整数 $k$，设 $G_k$ 是满足下述条件的 $x \in X$ 的集：至少有 $k$ 个 $n$ 的值，使得 $x \in A_n$。试证 $G_k$ 可积且 $k\mu(G_k) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$。

7）设 $X$ 是紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(A_n)$ 是 $X$ 中的可积集序列，且 $\inf_n \mu(A_n) = m > 0$。试证 $X$ 内属于无限个 $A_n$ 的点所成的集 $B$ 是可积的，并且 $\mu(B) \geqslant m$。

8）设 $\lambda$ 是区间 $I = [0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度，$(A_n)$ 是 $I$ 内的可积集序列，且 $\inf_n \lambda(A_n) = m > 0$。对每个整数 $k$，以 $\mathfrak{D}_k$ 表示 $I$ 内形如 $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$ $(0 \leqslant j < 2^k)$ 的 $2^k$ 个区间，而以 $\mathfrak{E}_k$ 表示属于 $\mathfrak{D}_k$ 的集的所有并所组成的集。试证存在 $I$ 的子集的递减序列 $(I_k)_{k \geqslant 0}$，使得 $I_0 = I$，且对一切 $k$ 有 $I_k \in \mathfrak{E}_k$；还存在 $(A_n)$ 的子序列 $(A_{n_k})$，具有下述性质：对一切 $r \geqslant k$，有 $\lambda(A_{n_r} \cap (I - I_k)) \leqslant \frac{1}{2} m\lambda(I - I_k)$，且对包含在 $I_k$ 内的一切 $J \in \mathfrak{D}_k$，当 $r \geqslant k$ 时，有 $\lambda(A_{n_r} \cap J) \geqslant \frac{1}{2} m\lambda(J)$（对 $k$ 作归纳法并利用对角线方法）。由此推断，存在 $(A_n)$ 的子序列 $(B_n)$；使对一切 $k$ 与包含在 $I_k$ 中的一切 $J \in \mathfrak{D}_k$，$J$ 与序列 $(B_n)$ 的交都非空（利用问题 7 与对角线方法）。试证明这些 $B_n$ 的交包含一个没有孤立点的非空紧集（因而它是不可数的（4.2 问题 3c））。

9）设 $f$ 是定义于 $X$ 上的非负实值函数。试证，为使 $M_+(X)$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $\mu \to \mu^*(f)$ 关于粗疏拓扑（13.4）连续，必须且只须 $f$ 连续并且有紧支集。为使映射 $\mu \to \mu^*(f)$ 关于粗疏拓扑为下半连续，必须且只须 $f$ 为下半连续。

10）设 $(\mu_n)$ 是 $X$ 上的正测度的递增序列；假定这个序列在 $M_+(X)$ 内上有界，且以 $\mu$ 记其上确界（13.4.4）试证，对定义于 $X$ 上的每个非负函数 $f$，有 $\mu^*(f) = \lim_{n \to \infty} \mu_n^*(f)$。

11）a）设 $(\mu_n)$ 是 $X$ 上的正测度的递减序列，$\mu$ 是它在 $M_+(X)$ 内的下确界（13.4.4）。试证，对定义于 $X$ 上的任一非负函数 $f$，如果当 $n$ 充分大后 $\mu_n^*(f) < +\infty$，则有 $\mu^*(f) = \lim_{n \to \infty} \mu_n^*(f)$。（当非负函数 $g$ 为下半连续且 $\mu^*(g) < +\infty$ 时，注意存在具有紧支集的非负连续函数序列 $(h_m)$，使得 $\sum_m h_m \leqslant g$，且对一切 $n$，有 $\mu_n^*(g) = \sum_m \mu_n^*(h_m)$）。

b）在离散空间 $N$ 上，设 $\mu_n$ 是这样的测度：当 $m < n$ 时，$\mu_n(\{m\}) = 0$；当 $m \geqslant n$ 时，$\mu_n(\{m\}) = 1$。试证 $M_+(N)$ 中的递减序列 $(\mu_n)$ 的下确界等

于 0，但对一切 $n$，有 $\mu_n^*(N)=+\infty$.

12) 设 $X$，$Y$ 是两个局部紧空间，$\pi$：$X\to Y$ 是正常连续映射（12.7 问题 2），$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$\nu=\pi(\mu)$（13.4 问题 8）. 试证，对每个定义于 $Y$ 上的非负函数 $g$，有 $\nu^*(g)=\mu^*(g\circ\pi)$.（首先考虑 $g$ 的支集为紧的情形，然后利用 12.7 问题 2b)）. 为使集 $N\subset Y$ 是 $\nu$ 可忽略的，必须且只须 $\pi^{-1}(N)$ 是 $\mu$ 可忽略的.

13) 假设在 $I=[0,1]$ 中存在关于 Lebesgue 测度 $\lambda$ 为不可测的集的递增序列 $(H_n)$，它的并是 $I$，而对一切 $n$ 有 $\lambda_*(H_n)=0$. 试证

$$\lambda^*(\inf_n(1-\varphi_{H_n}))=0,$$

但对一切 $n$，有 $\lambda^*(1-\varphi_{H_n})=1$.

14) a) 设 $F$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的开凸集 $A$ 上的凸函数（8.5 问题 8），$f_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 $X$ 上的可积函数，使得映射 $x\to(f_k(x))_{1\leqslant k\leqslant n}$ 取值于 $A$ 中，且合成函数

$$x\to F(f_1(x),\cdots,f_n(x))$$

可积. 试证，若 $\mu$ 是有界的（13.9.16）且 $\mu(X)=1$，则

$$\int F(f_1(x),\cdots,f_n(x))d\mu(x)\geqslant F\left(\int f_1d\mu,\cdots,\int f_nd\mu\right)$$

（对 $A\times\boldsymbol{R}$ 内由使得 $u\geqslant F(t_1,\cdots,t_n)$ 的点 $(t_1,\cdots,t_n,u)$ 组成的凸集应用 Hahn-Banach 定理）.

把所证命题用于 $n=1$，$F(t)=e^t$ 的情形. 由此推出**几何平均不等式**

$$u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_m^{\alpha_m}\leqslant\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_mu_m,$$

其中 $u_k>0$；$\alpha_k\geqslant0$ 且满足 $\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$.

b) 假定 $\mu$ 是有界的且 $\mu(X)=1$. 试证，若非负函数 $f$，$g$ 可积，且在 $X$ 上有 $fg\geqslant1$，则 $\left(\int fd\mu\right)\left(\int gd\mu\right)\geqslant1$（利用 a)）.

15) 对 $\mu$ 可积集的每个有限序列 $(A_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，令

$$D(A_1,\cdots,A_n)=\left(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}A_j\right)-\left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n}A_j\right);$$

若 $A_j$ 不全是 $\mu$ 可忽略的，令

$$\sigma_\mu(A_1,\cdots,A_n)=\mu(D(A_1,\cdots,A_n))/\mu\left(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}A_j\right).$$

试证，如果 $A_j$ 都不是 $\mu$ 可忽略的，则

$$\sigma_\mu(A_1,\cdots,A_n)\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{i<j}\sigma_\mu(A_i,A_j).$$

（注意 $D(A_1,\cdots,A_n)$ 的点至少属于 $n-1$ 个集 $D(A_i,A_j)(i<j)$.）

16）设 $\lambda$ 是 $I=[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度，试证，在由 $I$ 的非空闭子集组成的空间 $\mathfrak{F}(I)$ 上，函数 $A\to\lambda(A)$ 关于 Hausdorff 距离（3.16 问题 3）不是连续的.

## 9. 可 测 函 数

**(13.9.1)** 设 $A$ 是 $X$ 的可积子集，则存在 $A$ 的一个划分，它由一个紧集序列 $(K_n)$ 与一个可忽略集 $N$ 所组成.

事实上，我们可以利用 (13.7.9)，(13.7.7) 与 (13.7.6)，通过归纳法按下面的方式定义集 $K_n$：$K_1\subset A$ 且 $\mu(A-K_1)\leqslant 1$；对 $n>1$，有 $K_n\subset A-\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}K_i\right)$ 且

$$\mu\left(\left(A-\bigcup_{i=1}^{n-1}K_i\right)-K_n\right)\leqslant 1/n.$$

于是根据 (13.8.7)，集 $A-\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_i(n\geqslant 1)$ 的交 $N$ 是可忽略的.

我们把 $X$ 的子集 $A$ 称为（关于 $\mu$ 的）**可测子集**或 **$\mu$ 可测子集**，如果存在 $A$ 的划分，它由一个紧集序列与一个可忽略集所组成. 由于当 $K'\subset K$ 且 $K,K'$ 是紧集时，$K-K'$ 必是可积的 ((13.7.6) 与 (13.7.7))，再由 (13.9.1) 即知 $A$ 是可测的等价于 $A$ 是一个紧集序列与一个可忽略集的并. 同样的推理表明这也等价于 $A$ 是一个可积集序列的并.

我们把集 $A\subset X$ 称为**普遍可测集**，如果它关于 $X$ 上的每个正测度都是可测的.

**(13.9.2)** 为使 $X$ 的子集 $A$ 是可测的，必须且只须对每个紧集 $K$，$A\cap K$ 是可积的.

根据 (13.8.7，(ii))，所述条件是必要的. 它也是充分的，因为 $X$ 是由紧集组成的一个递增序列 $(K_n)$ 的并 (3.18.3)，故 $A$ 是可积集序列 $(A\cap K_n)$ 的并. 特别地，我们看到，空间 $X$ 本身是可测的.

**(13.9.3)** (i) 可测集的余集是可测的.

(ii) 可测集的可数并与可数交是可测的.

(iii) 开集与闭集是普遍可测的.

论断 (i) 由 (13.9.2) 与 (13.7.6) 得到,论断 (ii) 由 (13.9.2) 与 (13.8.7) 得到,论断 (iii) 中关于闭集的部分由 (13.9.2) 与(13.7.7) 得到,然后由 (i) 得到论断 (iii) 中关于开集的部分.

这样,从开集(或闭集)出发,重复进行上述 (i) 与 (ii) 两种运算所得到的集也是普遍可测的. 此外,$\mu$ 可测集的定义还表明,若 $A$ 是 $\mu$ 可测集,则存在普遍可测集 $B$,使得 $B\subset A$,且 $A-B$ 是 $\mu$ 可忽略的;把所得结果应用于 $X-A$,我们看到,也存在普遍可测集 $C\supset A$,使得 $C-A$ 是 $\mu$ 可忽略的.

$X$ 到拓扑空间 $Y$ 的映射 $u$ 称为(关于 $\mu$ 的)**可测映射**或 **$\mu$ 可测映射**,如果存在 $X$ 的一个划分,它由紧集序列 $(K_n)$ 与 $\mu$ 可忽略集 $N$ 组成,使得每个限制 $u|K_n$ 是连续的. $u$ 称为**普遍可测映射**,如果它关于 $X$ 上任一测度都可测. 连续函数是普遍可测的.

为使 $X$ 的子集 $A$ 是可测的(相应地,普遍可测的),必须且只须它的特征函数 $\varphi_A$ 是可测的(相应地,普遍可测的). 事实上,若 $X$ 有一个划分,由紧集序列 $(K_n)$ 与可忽略集 $N$ 组成,并且对于一切 $n$,$\varphi_A|K_n$ 都连续,则 $K_n$ 是两个没有公共点的紧集 $A\cap K_n$ 与 $K_n-(A\cap K_n)$ ((13.11.4)与(3.17.3))的并,且 $A$ 是所有 $A\cap K_n$ 与 $A\cap N$ 的并,因而它是可测的. 反之,若 $A$ 可测,则 $X-A$ 也可测 (13.9.3),因而存在 $X$ 的一个划分,它由紧集序列 $(K_n)$ 与可忽略集 $N$ 构成,使对每个 $n$,有 $K_n\subset A$ 或 $K_n\subset X-A$. 于是对一切 $n$,限制 $\varphi_A|K_n$ 是连续的.

**(13.9.4)** 设 $u$ 是 $X$ 到拓扑空间 $Y$ 的映射,则下列陈述是等价的:

a) $u$ 是 $\mu$ 可测的.

b) 对 $X$ 的每个紧子集 $K$ 与每个 $\varepsilon>0$,存在 $K$ 的紧子集 $K'$,使得 $\mu(K-K')\leqslant\varepsilon$,且限制 $u|K'$ 连续.

c) 对 $X$ 的每个紧子集 $K$,存在 $K$ 的一个划分,它由紧集序列 $(L_n)$ 与 $\mu$ 可忽略集 $M$ 组成,使得每个限制 $u|L_n$ 连续.

为证明 a) 蕴涵 c)，注意由假设 a) 推出，存在 $X$ 的一个划分，它由紧集序列 $(K_n)$ 与可忽略集 $N$ 组成，使对每个 $n$，$u|K_n$ 都连续。取 $L_n = K \cap K_n$，$M = K \cap N$，条件 c)得以满足。为证明 c)蕴涵 b)，注意由条件 c)，可有 $\mu(K) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(L_n)$ (13.8.7)，因而存在整数 $n$，使得 $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$，其中 $K' = \bigcup_{i<n} L_i$。显然 $K'$ 符合所提的要求。

最后证明 b) 蕴涵 a)。事实上，$X$ 是一紧集递增序列 $(H_n)$ 的并 (3.18.3)。考虑到假设 b) 与 (13.7.9)，对每个 $n$，都能定义一紧集序列 $(K_{mn})_{m\geqslant 1}$，使得 $K_{1n} \subset H_n - H_{n-1}$，$K_{mn} \subset (H_n - H_{n-1}) - \bigcup_{i<m} K_{in}$，$\mu\left((H_n - H_{n-1}) - \bigcup_{i<m} K_{in}\right) \leqslant 1/m$，且 $u$ 在 $K_{mn}$ 上的限制 $u|K_{mn}$ 连续。于是集 $K_{mn}(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$ 的并的余集是可忽略的，因而 $u$ 是可测的。

由此可知，为使 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 可测，必须且只须对 $X$ 的每个紧子集 $K$，函数 $f\varphi_K$ 可测(这里我们约定，在 $X - K$ 的点处，即使 $f$ 取的值为无穷，$f\varphi_K$ 也等于 0 (参阅 13.11))。事实上，根据 (13.9.4)，所述条件是充分的；而根据 (13.9.4) 与 $X - K$ 为可测 (13.9.3) 的事实，它也是必要的。

同样的推理表明，若 $f$ 是 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射，$K$ 是 $X$ 的紧子集，使得 $f|K$ 连续，则 $f\varphi_K$ 可测。

**(13.9.5)** 设 $(Y_n)$ 是拓扑空间序列，而对每个 $n$，$u_n$ 是 $X$ 到 $Y_n$ 的可测映射，则对 $X$ 的每个紧子集 $K$ 与每个 $\varepsilon > 0$，存在 $K$ 的紧子集 $K'$，使得 $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$，且每个限制 $u_n|K'$ 是连续的。

事实上，利用 (13.9.4)，可以通过归纳法定义 $K$ 的紧子集的递减序列 $(K_n)$，使得

$$\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon/2, \quad \mu(K_n - K_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{n+1},$$

且 $u_n|K_n$ 连续。显然，由 (13.8.7)，$K' = \bigcap_n K_n$ 符合所述要求。

**(13.9.6)** 设 $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是拓扑空间的有限序列，$Z$ 是拓扑空间，$v$ 是 $\prod_i Y_i$ 到 $Z$ 的连续映射。若对每个 $i$，映射 $u_i: X \to Y_i$ 可测，则

合成函数 $x \to v(u_1(x), \cdots, u_n(x))$ 可测.

这可从 (13.9.5) 与 (13.9.4) 直接得到.

**(13.9.7)** 若 $f, g$ 是两个取值于 $\bar{\mathbf{R}}$ 中的可测函数，则 $\sup(f, g)$ 与 $\inf(f, g)$ 是可测函数. 若 $u, v$ 是 $X$ 到某个(实或复的)向量空间的可测映射，则 $u + v$ 与 $au$ ($a$ 为任一纯量)是可测映射.

**(13.9.8)** 等价于可测函数的函数是可测的.

这从 (13.9.4) 与下述事实直接得到：若 $K$ 是紧集而 $N \subset K$ 是可忽略集，则存在紧子集 $K' \subset K - N$，其测度可任意接近 $K$ 的测度(13.7.9).

在 $X$ 上几乎处处有定义而取值于拓扑空间 $Y$ 内的映射称为**可测的**，如果 $X$ 到 $Y$ 的任一等价 (13.6) 于它的映射都可测；显然，只须有一个这样的映射可测即可 (13.9.8).

**(13.9.8.1)** 特别是，由 (13.9.6) 与 (13.9.8) 得到，若 $f$ 与 $g$ 是两个取值于 $\bar{\mathbf{R}}$ 内而在 $X$ 上几乎处处有定义且有限的可测映射，则 $f + g$ 与 $fg$ (它们几乎处处有定义)是可测映射.

**(13.9.9)** 设 $u$ 是 $X$ 到拓扑空间 $Y$ 的可测映射，则对 $Y$ 的任何闭(相应地，开)子集 $M$，$u^{-1}(M)$ 都是可测的.

事实上，考虑 $X$ 的一个划分，它由紧集序列 $(K_n)$ 与可忽略集 $N$ 组成，使得 $u|K_n$ 连续。于是，如果 $M \subset Y$ 是闭的，则 $u^{-1}(M) \cap K_n$ 是紧的 (3.11.4)，因而 $u^{-1}(M)$ 是可测的。如果 $M$ 是开的，则 $X - u^{-1}(M) = u^{-1}(Y - M)$ 是可测的，因而 $u^{-1}(M)$ 也是可测的 (13.9.3).

**(13.9.10)** (Егоров **定理**). 设 $Y$ 是度量空间，$(f_n)$ 是 $X$ 到 $Y$ 的可测映射序列，且对几乎一切 $x \in X$，序列 $(f_n(x))$ 有极限 $f(x)$. 于是，1° $f$ 是可测的；2° 对 $X$ 的每个紧子集 $K$ 与每个 $\varepsilon > 0$，存在 $K$ 的紧子集 $K'$，使得 $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$，而限制 $f_n|K'$ 连续，且序列 $(f_n|K')$ 在 $K'$ 上一致收敛于 $f|K$.

显然只须证明第二个论断 ((13.9.4) 与 (7.2.1)). 设 $K_0$ 是 $K$ 的紧子集，使得 $\mu(K - K_0) \leqslant \varepsilon/2$，且限制 $f_n|K_0$ 连续 (13.9.5). 以 $d$ 表示 $Y$ 上的距离，设 $B_{n,r}$ 是 $K_0$ 的子集，它由满足下述条件的

点 $x$ 构成：至少有一对 $(p, q)$，$p \geqslant n$，$q \geqslant n$，使得 $d(f_p(x), f_q(x)) \geqslant 1/r$. 设 $A_{p,q,r}$ 是使得 $d(f_p(x), f_q(x)) \geqslant 1/r$ 的 $x \in K_0$ 所成的集，则有

$$B_{n,r} = \bigcup_{p \geqslant n, q \geqslant n} A_{p,q,r}.$$

$A_{p,q,r}$ 是闭集 (3.11.4)，因而 $B_{n,r}$ 是可积集 (13.8.7). 再由假定，对每个正整数 $r$，有 $\mu\left(\bigcap_n B_{n,r}\right) = 0$，又显见序列 $(B_{n,r})_{n\geqslant 1}$ 是递减的，所以 (13.8.7) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_{n,r}) = 0$. 于是存在整数 $n_r$，使得

$$\mu(B_{n_r,r}) \leqslant \varepsilon/2^{r+2}.$$

令 $B = \bigcup_r B_{n_r,r}$，则 $B$ 是可积的，且 $\mu(B) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon/2^{r+2} = \varepsilon/4$ (13.8.7). 这样，设 $C = K_0 - B$，则它是可积的；由定义，序列 $(f_n|C)$ 一致收敛于 $f|C$. 现在只须取 $K'$ 为包含在 $C$ 内的紧子集，使得 $\mu(C - K') \leqslant \varepsilon/4$ (13.7.9) 即可.

**(13.9.11)** 设 $(f_n)$ 是 $X$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的可测映射序列，则 $\sup\limits_n f_n$，$\inf\limits_n f_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 与 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 都是可测的.

事实上，$\sup\limits_n f_n$ 是由 $g_n = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} f_i$ 组成的递增序列的极限，而 $g_n$ 是可测的 (13.9.7). $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 是递减序列 $(\sup\limits_{p\geqslant 0} f_{n+p})$ 的极限，由上所证，$\sup\limits_{p\geqslant 0} f_{n+p}$ 是可测的.

**(13.9.11.1)** 在 (13.9.6)，(13.9.7)，(13.9.9) 与 (13.9.11) 的陈述中，当把"可测"换为"普遍可测"时，这些命题仍然成立. 相反地，只有当一个函数处处有定义时，才能谈到它的普遍可测性. 因为对 $X$ 的任一非空子集 $N$，都有 $X$ 上的测度 $\mu$，使得 $\mu(N) \neq 0$，例如，取 $\mu$ 为 $N$ 的某个点处的 Dirac 测度.

特别地 (12.7.8)，属于 $\mathscr{I}$（相应地，$\mathscr{L}$）的任何函数是普遍可测的. 另一方面，对 $X$ 上的任何下半连续函数 $f$，我们可写成

$$f = \inf_n(\sup(f, -n)),\quad \sup(f, -n) = -n + \sup(f + n, 0),$$

因而由 (13.9.6)，有：

**(13.9.11.2)** $X$ 到 $\bar{R}$ 的任何(上或下)半连续映射是普遍可测的.

从半连续函数出发,反复进行 (13.9.6), (13.9.7) 与 (13.9.11) 中所说的运算而得到的函数,同样都是普遍可测的.

$X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 称为**阶梯函数**,如果它只取有限个值

$$a_k (1 \leqslant k \leqslant n).$$

令 $A_k = f^{-1}(a_k)$, 就有 $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{A_k}$; 这里我们约定, 若某个 $a_k$ 等于 $\pm\infty$, 则 $a_k \varphi_{A_k}$ 在 $A_k$ 内等于 $a_k$, 而在 $X - A_k$ 内等于 0 (13.11). 由此并由 (13.9.9) 立即推出, 为使 $f$ 可测, 必须且只须每个 $A_k$ 可测.

**(13.9.12)** 设 $f$ 是 $X$ 到 $\bar{R}$ 的可测映射, 则存在具有紧支集的普遍可测的阶梯函数组成的序列 $(g_n)$, 使对一切 $x \in X$, 有 $|g_n(x)| \leqslant |f(x)|$, 且序列 $(g_n(x))$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ (这蕴涵 $f$ 等价于一个普遍可测函数).

考虑 $X$ 的一个划分, 它由紧集序列 $(K_n)$ 与可忽略集 $N$ 组成. 对每个整数 $i \leqslant n$, 存在 $K_i$ 的有限覆盖 $(U_{ij}^{(n)})_{1 \leqslant j \leqslant q_{in}}$, 其中 $U_{ij}^{(n)}$ 是 $K_i$ 内的开集, 且使得 $f$ 在每个 $U_{ij}^{(n)}$ 上(关于 $\bar{R}$ 上的一个距离)的振幅(参阅(3.16.5))都 $\leqslant 1/n$. 现在注意下面的引理:

**(13.9.12.1)** 对于可积集的有限族 $(F_h)_{1 \leqslant h \leqslant p}$, 存在两两互不相交的可积集的有限族 $(G_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, 使得每个 $F_h$ 是某些 $G_k$ 的并.

只须考虑 $2^p - 1$ 个集 $\bigcap_{h=1}^{p} Z_h$, 这里对某些指标 $h$, 有 $Z_h = F_h$, 而对其他的指标, 则有 $Z_h = X - F_h$, 且至少有一个 $Z_h$ 等于 $F_h$. 若 $(G_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ 是这些集中的非空集组成的族 ($G_k$ 是两两互不相同的), 则这个族符合所提的要求, 因为它由可积集 (13.7.6) 构成, 且每个 $F_h$ 是使得 $Z_h = F_h$ 的那些 $\bigcap_{l=1}^{p} Z_l$ 的并.

把引理应用于每个有限族 $(U_{ij}^{(n)})_{1 \leqslant j \leqslant q_{in}}$, 就得到 $K_i$ 的一个划分 $(A_{ik}^{(n)})_{1 \leqslant k \leqslant r_{in}}$, 它由可积且普遍可测的集组成. 设 $a_{ik}^{(n)}$ 为这样的数; 当 $f$ 在 $A_{ik}^{(n)}$ 上变号时, 它等于 0; 当 $f$ 在 $A_{ik}^{(n)}$ 上非负时, 等于

$\inf f(A_{ik}^{(n)})$；当 $f$ 在 $A_{ik}^{(n)}$ 上非正时，等于 $\sup f(A_{ik}^{(n)})$。然后取函数 $g_n$ 如下：在 $A_{ik}^{(n)}$ 上 $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant r_{in})$，令 $g_n(x) = a_{ik}^{(n)}$；而在这些集 $A_{ik}^{(n)}$ 的并的余集上，令 $g_n(x) = 0$。显然序列 $(g_n)$ 是所提问题的解。

**(13.9.13)** 为使 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 为可积，必须且只须 $f$ 为可测且上积分 $\mu^*(|f|)$ 为有限。

所述条件是必要的．由于 $|f|$ 可积 (13.7.4)，所以第二点是显见的．关于第一点，注意根据假定，对每个 $n$，存在函数 $f_n \in \mathscr{I}$，使得 $f \leqslant f_n$ 且 $\mu(f_n - f) \leqslant 1/n$ (13.7.1)。用 $\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i$ (12.7.5) 代替 $f_n$，可以假设序列 $(f_n)$ 是递减的．若 $g$ 是这个序列的极限（等于它的下包络），则有 $f \leqslant g$，且 $\mu(g-f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n-f) = 0$ (13.8.1)，即 $f$ 几乎处处等于序列 $(f_n)$ 的极限。而每个属于 $\mathscr{I}$ 的函数是可测的 (13.9.11)，再由 Егоров 定理 (13.9.10) 即可证明 $f$ 是可测的。

所述条件是充分的。用一个等价于 $f$ 的函数来代替 $f$ (13.6.4)，可以假定 $f$ 是有限的。由 (13.9.12)，存在具有紧支集的可测阶梯函数组成的序列 $(g_n)$，使得 $|g_n| \leqslant |f|$，且序列 $(g_n)$ 几乎处处收敛于 $f$。$g_n$ 是相对紧可测集的特征函数的线性组合，而由于相对紧可测集是可积的 (13.9.2)，所以 $g_n$ 是可积的．再由 (13.8.4) 即知 $f$ 是可积的。

**(13.9.14)** (i) 如果 $f$ 是可积函数，则对每个可测集 $A$，函数 $f\varphi_A$ 都是可积的。

(ii) 如果 $(A_n)$ 是可积集递增序列，其并为可忽略集 $N$ 的余集 $X - N$，则

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f\varphi_{A_n} d\mu.$$

事实上，可以限于 $f$ 是处处有限的情形 (13.6.4)。此时 $f\varphi_A$ 是可测的 (13.9.6)，且 $\mu^*(|f\varphi_A|) \leqslant \mu^*(|f|) < +\infty$，于是由 (13.9.13) 即得第一个论断．第二个论断由控制收敛定理 (13.8.4) 得到。

在 (13.9.14) 的假定下，我们令 $\int f\varphi_A d\mu = \int_A f d\mu$ 或

$$\int_A f(x)d\mu(x),$$

称为**函数 $f$ 在集 $A$ 上(或展布在 $A$ 上)的积分**. 同样，当 $A$ 为可测时，我们用记号 $\int_A^* f d\mu$ 来代替 $\int^* f\varphi_A d\mu$.

**(13.9.15)** 如果 $f$ 可积，$A$ 与 $B$ 是两个可测集，且 $A\cap B$ 是可忽略集，则 $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

事实上，此时 $\varphi_{A\cup B}$ 与 $\varphi_A + \varphi_B$ 是等价的 (12.7.3).

**(13.9.16)** 附注. 设 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的紧区间 $[a, b]$, 则对每个具有紧支集的简单函数 $f$, 有 $\int_I f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ ($\lambda$ 是 Lebesgue 测度) (13.8.8). 现在，如果 $f$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的任一简单函数，则由于它是可积函数 $f\varphi_{I_n}$ (这里 $I_n = [-n, n]$) 的极限，所以是可测的 (13.9.11). 为使 $f$ 可积，必须且只须 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{+n} |f(x)|dx < +\infty$, 此时有 $\int f d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{+n} f(x)dx$ ((13.8.2) 与 (13.8.4)), 我们也用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 记这个积分. 注意，可能 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{+n} f(x)dx$ 存在，但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{+n} |f(x)|dx = +\infty,$$

例如函数 $f(x) = (\sin x)/x$ $(x \neq 0)$ 就是这种情形的例子. 对这些"广义积分"中的一大部分的理解与广义函数理论有联系 (17.5 问题 4 与第十七章).

由上所述，对端点为 $a, b$ $(a \leqslant b)$ 的任何区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 与使得 $f\varphi_I$ 为可积的任何函数 $f$, 我们也用记号 $\int_a^b f(x)dx$ 来代替 $\int_I f d\lambda$.

(正)测度 $\mu$ 称为**有界正测度**，如果常值函数 1 可积，换言之 (13.9.13), 如果 $\mu^*(X) = \mu^*(1)$ 有限. 此时

$$\mu(X) = \mu(1) = \int_X d\mu$$

称为$\mu$的**总质量**(参阅 (13.20)).

**(13.9.17)** 如果$\mu$是有界的，则$X$到$\bar{\mathbf{R}}$的任何可测映射是可积的(特别地，任何有界半连续函数都是可积的)，且有

**(13.9.17.1)** $$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \|f\| \mu(X).$$

这是 (13.9.13) 的直接推论.

**(13.9.18)** 设$\mu$是$X$上的有界正测度，则对每个$\varepsilon>0$，存在$X$的紧子集$K$，使得$\mu(X-K)\leqslant\varepsilon$.

这是 (13.7.9) 的特殊情形.

**(13.9.19)** 假定$\mu$是有界的，$(f_n)$是一致有界的可测函数序列(即$\sup\limits_n\|f\|<+\infty$)，此外还假定，对几乎一切$x$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

存在，则$f$是可积的，且有

**(13.9.19.1)** $$\int f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

这是 (13.8.4) 的特殊情形.

**(13.9.20)** 例. 设$\mu$是$X$上的正测度，$Y$是$X$的闭子空间. 由 Tietze-Урысон 定理 (4.5.1) 得知，每个函数$f\in\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(Y)$都可以写为$g|Y$，这里$g\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(X)$，且$\|g\|=\|f\|$. 因此，在$Y$上等于$f$而在$X-Y$上等于0的函数$f^Y=g\varphi_Y$是$\mu$可积的 (13.9.13)，且有$|\mu(f^Y)|\leqslant\|f\|\mu(\mathrm{supp}(f))$. 令$\mu_Y(f)=\mu(f^Y)$(显然它只依赖于$f$)，上面的讨论表明$f\to\mu_Y(f)$是$Y$上的正测度，称为$\mu$在$Y$上的**诱导测度**. 由 (12.7.8)，上述说明与 (13.5.7) 立即得到，对每个函数$f\in\mathscr{I}(Y)$，如果把在$Y$上等于$f$而在$X-Y$上等于0的函数记作$f^Y$，则有$\mu_Y^*(f)=\mu^*(f^Y)$. 由此得知 (13.5.5)，这个关系对$Y$到$\bar{\mathbf{R}}$的任一映射$f$($f^Y$如上面那样定义)都成立. 因而我们看到，为使$Y$到$\bar{\mathbf{R}}$的映射$f$为$\mu_Y$可积，必须且只须$f^Y$为$\mu$可积，此时且有

**(13.9.20.1)** $$\int f d\mu_Y=\int f^Y d\mu.$$

类似地，易于验证，为使 $Y$ 到拓扑空间 $Z$ 的映射 $u$ 为 $\mu_Y$ 可测，必须且只须，通过在 $X-Y$ 上给定(任意的)常值而得到的 $u$ 在 $X$ 上的延拓 $u': X \to Z$ 为 $\mu$ 可测.

反之，现在考虑 $X$ 的闭子集 $Y$ 与 $Y$ 上的正测度 $\nu$，并设 $\mu$ 是 $\nu$ 在 $X$ 上的典则延拓(13.1.7). 显然有 $\nu=\mu_Y$. 另一方面，对每个函数 $f \in \mathscr{I}(Y)$，在 $Y$ 上等于 $f$ 而在 $X-Y$ 上等于 $+\infty$ 的函数 $g$ 属于 $\mathscr{I}(X)$，且有 $\nu^*(f)=\mu^*(g)$. 由此立即得到(13.5.5)，对 $X$ 到 $\bar{R}$ 的任一映射 $g$，有 $\mu^*(g)=\nu^*(g|Y)$；因此，为使这样的映射 $g$ 为 $\mu$ 可积，必须且只须 $g|Y$ 为 $\nu$ 可积，此时有

(13.9.20.2)
$$\int (g|Y)d\nu = \int g d\mu.$$

类似地，为使 $X$ 到拓扑空间 $Z$ 的映射 $u$ 为 $\mu$ 可测，必须且只须 $u|Y$ 为 $\nu$ 可测.

**(13.9.21)** 设 $\pi: X \to X'$ 是一个同胚，则为使 $X'$ 到拓扑空间 $Y$ 的映射 $u'$ 为 $\pi(\mu)$ 可测，必须且只须 $u' \circ \pi$ 为 $\mu$ 可测.

## 问　　题

1) 设 $(f_{mn})$ 是 $X$ 到度量空间 $Y$ 的 $\mu$ 可测映射的二重序列. 假定对每个 $m$，序列 $(f_{mn})_{n\geq 1}$ 几乎处处收敛于函数 $g_m$，而序列 $(g_m)$ 几乎处处收敛于函数 $h$. 试证，存在两个严格递增的整数列 $(m_k)$，$(n_k)$，使得序列 $(f_{m_k n_k})_{k\geq 1}$ 几乎处处收敛于 $h$. (首先证明 $X$ 为紧的情形. 为此注意，对每个 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset X$，使得 $\mu(X-K)\leqslant\varepsilon$，且序列 $(g_m)$ 与每个序列 $(f_{mn})_{n\geq 1}$ 在 $K$ 上一致收敛. 利用对角线方法过渡到一般情形.)

2) a) 设 $f$，$g$ 是两个非负实值函数，且 $g$ 为 $\mu$ 可测，则

$$\mu^*(fg)=\inf \mu^*(ug),$$

其中 $u$ 取遍 $\mu$ 可测且不小于 $f$ 的函数所成的集.

b) 设 $f$，$g$，$h$ 是 $X$ 上的三个非负函数，所取的值可以有限，也可以无限. 设 $g$ 与 $h$ 为 $\mu$ 可测，试证 $\mu^*(f(g+h))=\mu^*(fg)+\mu^*(fh)$(对于乘积 $0\cdot(+\infty)$，我们采用(13.11)的约定).

3) 设 $f$ 是 $X$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的 $\mu$ 可测映射. 对每个有理整数 $n\in \boldsymbol{Z}$，设 $A_n$ 是使得 $2^n\geqslant|f(x)|>2^{n-1}$ 的 $x\in X$ 所成的集. 试证，为使 $f$ 为可积，必须且只须

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^n \mu(A_n) < +\infty.$$

4) 设 $(f_n)$ 是 $X$ 上的可积函数序列，它简单收敛于函数 $f$.

a) 试证，若 $f$ 可积且 $\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在可积集 $A$，非负可积函数 $g$ 与整数 $n_0$，使对一切 $n \geqslant n_0$，有 $\left| \int_{X-A} f_n d\mu \right| \leqslant \varepsilon$；并且对一切 $x \in A$ 有 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$（考虑可积集 $B$，使得 $\int_{X-B} |f| d\mu \leqslant \varepsilon/2$ 且 $f$ 在 $B$ 上有界，并应用 Егоров 定理）.

b) 假定对每个 $\varepsilon > 0$，存在可测集 $A$，非负可积函数 $g$ 与整数 $n_0$，使对一切 $n \geqslant n_0$ 有 $\int_{X-A} |f_n| d\mu \leqslant \varepsilon$ 并且对一切 $x \in A$ 有 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. 试证，在这些条件下，$f$ 是可积的且 $\lim_{n \to \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$. 考虑这个命题的逆.

c) 举例说明，为使 $f$ 可积且

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu,$$

a) 中的条件不是充分的，而 b) 中的条件不是必要的.

5) 试证，若 $A$ 是可测集，则对 $X$ 的任一子集 $B$，有 $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap (X - A))$（若 $\mu^*(B) < +\infty$，则考虑可积集 $B_1 \supset B$，使得 $\mu^*(B) = \mu(B_1)$）. 反之，试证若 $A$ 满足这个条件，则 $A$ 是可测的（参阅 13.8 问题 3）.

6) 假定 $X$ 是紧的. 定义于 $X$ 上的有界实值函数 $f$ 称为在 $X$ 内（关于 $\mu$）是**几乎处处连续的**，如果 $f$ 的不连续点集是可忽略的.

a) 给出这样的例子：函数 $f$ 是几乎处处连续的，但不存在连续函数 $g$，使得 $g$ 几乎处处等于 $f$.

b) 假定 $\mu$ 的支集等于 $X$. 试证，为使定义于 $X$ 上的有界实值函数 $f$ 几乎处处等于 $X$ 上的一个几乎处处连续的函数，必须且只须存在 $X$ 的子集 $A$，使得 $X - A$ 是可忽略的，且限制 $f|A$ 是连续的（为证明所述条件的充分性，注意 $A$ 在 $X$ 内处处稠密，且 $f|A$ 到 $X$ 上的下半连续延拓是在 $A$ 的任何点处均连续的函数）. 由此推断 $f$ 是可测的. 试证，存在 $X$ 上的连续函数序列 $(f_n)$，它在 $X$ 的任何点处都收敛，且其极限几乎处处等于 $f$（参阅 13.11 问题 3）.

c) 试证，在 $\mathbf{R}$ 上，右连续的实值函数 $f$（就是说，对一切 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x+) = f(x)$）除去属于某个至多可数的集的点外是连续的，因而它关于 Lebesgue 测度是

几乎处处连续的(把 3.9 问题 3 应用于使 $f$ 的振幅大于 $1/n$ 的点所成的集 $A_n$).

7) 集 $E$ 的划分 $\varpi=(A_\alpha)$ 称为**精于**划分 $\varpi'=(A'_\beta)$, 如果对每个指标 $\alpha$, 存在指标 $\beta$, 使得 $A_\alpha\subset A'_\beta$. $E$ 的划分对于这个关系构成一个有序集.

a) 假定 $X$ 是紧度量空间,对 $X$ 的每个由可积集组成的有限划分 $\varpi=(A_k)$ 与每个定义于 $X$ 上的有界实值函数 $f$, 令

$$s\varpi(f)=\sum_k(\inf_{x\in A_k}f(x))\mu(A_k)$$

$$S\varpi(f)=\sum_k(\sup_{x\in A_k}f(x))\mu(A_k)$$

(相对于 $f$ 与划分 $\varpi$ 的 Riemann 和). 我们有 $s\varpi(f)\leqslant\mu_*(f)\leqslant\mu^*(f)\leqslant S\varpi(f)$; 若 $\varpi$ 精于 $\varpi'$, 则 $s\varpi'(f)\leqslant s\varpi(f)\leqslant S\varpi(f)\leqslant S\varpi'(f)$.

b) $X$ 的有限划分所成的序列 $(\varpi_n)$ 称为**基本序列**, 如果对每个 $n$, $\varpi_{n+1}$ 精于 $\varpi_n$, 且当 $n\to+\infty$ 时,属于 $\varpi_n$ 的集的直径的最大值趋于 0. 试证, 如果 $f$ 是 $X$ 上的有界可积函数,则存在 $X$ 的有限划分的基本序列 $(\varpi_n)$, 其中每个 $\varpi_n$ 由可积集构成,且使得序列 $(s\varpi_n(f))$ 与 $(S\varpi_n(f))$ 趋于 $\int fd\mu$.

c) 设 $f$ 是在 $X$ 上有界且几乎处处连续(问题 6) 的函数. 试证, 对 $X$ 的有限划分的任一基本序列 $(\varpi_n)$(其中 $\varpi_n$ 由可积集构成), 序列 $(s\varpi_n(f))$ 与 $(S\varpi_n(f))$ 趋于 $\int fd\mu$. (注意, 若 $A_n$ 是使得 $f$ 的振幅(3.14)不小于 $1/n$ 的点 $x\in X$ 组成的闭集,则测度 $\mu(A_n)$趋于 0;每个 $A_n$ 有一个开邻域 $V_n$,使得 $V_n$ 的点到 $A_n$ 的距离小于 $1/n$ 且序列 $(\mu(V_n))$ 趋于 0. 于是, 对于使组成 $\varpi_k$ 的每个集的直径都小于 $1/n$ 的划分 $\varpi_k$, 分别考虑其中与 $V_n$ 相交的那些集以及与 $V_n$ 不相交的那些集.) 设 $f$ 在 $X$ 上有界且下半连续, 试证, 对于可积集的有限划分的任一基本序列 $(\varpi_n)$, $(s\varpi_n(f))$ 都趋于 $\int fd\mu$.

d) 子集 $A\subset X$ 称为(关于 $\mu$ 的)**边界可忽略集**,如果它的特征函数 $\varphi_A$ 几乎处处连续, 或等价地, 如果它的边界是 $\mu$ 可忽略的. 试证每个点 $x_0\in X$ 具有由边界可忽略开邻域组成的基本邻域系. (对 $x_0$ 的每个邻域 $V$, 设 $f$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的连续函数,它在 $x_0$ 处等于 1, 而在 $X-V$ 上等于 0. 对每个 $\alpha\in]0,1[$, 考虑使得 $f(x)>\alpha$ 的 $x\in X$ 的集.) 由此推断, 存在 $X$ 的由开集成可忽略集组成的有限划分的基本序列. 给出非边界可忽略的闭集的例子(13.8, 问题 4a); 参阅 13.21, 问题 2).

e) 设 $(\varpi_n)$ 是 $X$ 的由开集或可忽略集组成的有限划分的基本序列. 对

定义于$X$上的每个有界函数$f$，设$g$是下半连续且不大于$f$的函数中最大的函数，试证$s\tilde{\omega}_n(f)=s\tilde{\omega}_n(g)$. 由此推断，为使序列$(s\tilde{\omega}_n(f))$与$(S\tilde{\omega}_n(f))$收敛于同一极限，必须(且只须)$f$几乎处处连续.

f) 由c)给出这样的例子：$f$是可忽略函数，$(\tilde{\omega}_n)$是由$X$的可积集组成的有限划分的基本序列，而$(s\tilde{\omega}_n(f))$与$(S\tilde{\omega}_n(f))$没有相同的极限.

8) 设$f$是$X$到完备度量空间$E$的可测映射，$K$是$X$的紧子集，则为使$f|K$能由可测阶梯函数一致逼近，必须且只须$f(K)$在$E$内是相对紧的.

9) 假定$X$是紧的，$(f_n)$是$\mu$可测的有限实值函数序列，试证下列陈述是等价的：

1° 存在$(f_n)$的子序列$(f_{n_k})$，它在$X$内几乎处处趋于0.

2° 存在有限实数组成的序列$(t_n)$，使得$\lim\sup_{n\to\infty}|t_n|>0$，且以$t_nf_n(x)$为通项的级数在$X$内几乎处处收敛.

3° 存在有限实数组成的序列$(t_n)$，使得$\sum_n|t_n|=+\infty$，且以$t_nf_n(x)$为通项的级数在$X$内几乎处处绝对收敛.

(为证明1°蕴涵2°与3°，利用 Егоров 定理. 为证明3°蕴涵1°，先证明3°蕴涵下述事实：存在$X$的可积子集递增序列$(A_k)$与$(f_n)$的子序列$(f_{n_k})$，使得$\mu(A_k)$趋于$\mu(X)$，而$\int_{A_k}|f_{n_k}|d\mu$趋于0.)

10) 设$X$，$Y$是两个局部紧空间，$\pi$: $X\to Y$是正常连续映射，$\mu$是$X$上的正测度，$\nu=\pi(\mu)$(13.4问题8).

a) 为使$Y$到某个拓扑空间的映射$g$为$\nu$可测，必须且只须$g\circ\pi$为$\mu$可测.

b) 为使$Y$到$\bar{\mathbf{R}}$的映射$g$为$\nu$可积，必须且只须$g\circ\pi$为$\mu$可积，此时有$\int g d\nu=\int(g\circ\pi)d\mu$.

(利用13.8问题12.)

c) 试证$\nu$的支集是$\pi(\mathrm{Supp}(\mu))$的闭包.

11) 设$X$是局部紧空间，$u$是$X$到它自身的连续映射，$\mu$是$X$上的正测度. 我们假定，对每个$\mu$可忽略集$N$，$u^{-1}(N)$都是$\mu$可忽略的(参阅问题17). 对每个正整数$n$与$X$的每个子集$A$，把$(u^n)^{-1}(A)$记作$u^{-n}(A)$，且令$u^0=1_X$.

对$X$的每个$\mu$可测子集$A$，令$A_{\text{ent}}=\bigcup_{n=0}^{\infty}u^{-n}(A)$("至少有一次落人$A$"

的点所成的集)，$A_{ret}=A\cap u^{-1}(A_{ent})$($A$ 中"至少有一次返回"$A$ 的点所成的集)，$A_{ret\ inf}=A\cap\bigcap_{n=0}^{\infty}u^{-n}(A_{ent})$ ($A$ 中"无穷多次返回"$A$ 的点所成的集). 如果集 $u^{-n}(A)$ ($n\geqslant 0$) 两两互不相交，则 $A$ 称为(关于 $u$ 的)**游荡集**.

$u$ 称为**不可压缩的**，如果对 $X$ 的每个使得 $A\subset u^{-1}(A)$ 的 $\mu$ 可测子集 $A$，集 $u^{-1}(A)-A$ 总是可忽略的. 这与下述说法等价：对 $X$ 的每个使得 $u^{-1}(B)\subset B$ 的 $\mu$ 可测子集 $B$，集 $B-u^{-1}(B)$ 总是可忽略的. 如果 $u$ 不是不可压缩的，则称为**可压缩的**.

a) 试证下述四个性质是等价的：

α) $u$ 是不可压缩的.

β) 对于 $u$ 的游荡集是可忽略的.

γ) 对每个可测集 $A$，$A-A_{ret}$ 是可忽略的.

δ) 对每个可测集 $A$，$A-A_{ret\ inf}$ 是可忽略的.

(注意 $u^{-1}(A_{ent})\subset A_{ent}$，而且 $A-A_{ret}$ 是游荡集.)

b) 试证，为使 $u$ 是可压缩的，必须且只须存在定义于 $X$ 上的可测实值函数 $f$，使对一切 $x\in X$，有 $f(u(x))\geqslant f(x)$，并且使得 $f(u(x))>f(x)$ 的 $x\in X$ 的集具有正测度. (为证明所述条件的充分性，用反证法证明，由这个条件可推断，至少对于一个有理数 $r$，使得 $f(x)<r<f(u(x))$ 的 $x\in X$ 的集不是可忽略的.) 由此推断，如果对某个正整数 $n$，$u^n$ 是不可压缩的，则 $u$ 是不可压缩的.

c) 假定 $X$ 是紧的，测度 $\mu$ 在 $u$ 下不变 (参阅 13.4 问题 8)，试证 $u$ 是不可压缩的 (**Poincaré 常返性定理**).

d) 试证，若 $u$ 是不可压缩的，则在 $X$ 内存在可忽略集 $N$，使对每个 $x\notin N$ 与 $x$ 在 $X$ 内的每个邻域 $V$，存在无穷多个整数 $n$，使得 $u^n(x)\in V$ (考虑集 $U-U_{ret\ inf}$，其中 $U$ 取遍 $X$ 的一个可数开集基.)

12) a) 设 $(t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 是实数序列，$m$ 是不大于 $n$ 的一个整数，$L_m$ 是由具有下述性质的指标 $i$ 组成的集：存在某个整数 $p$，使得 $0\leqslant p\leqslant m$，且

$$t_i+t_{i+1}+\cdots+t_{i+p-1}\geqslant 0.$$

试证 $\sum_{i\in L_m}t_i\geqslant 0$. (注意，如果 $i\in L_m$，且 $p$ 是具有上述性质的最小整数，则 $i+1,\cdots,i+p-1$ 属于 $L_m$.)

b) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$u$ 是 $X$ 到自身的正常连续映射，使得测度 $\mu$ 在 $u$ 下不变(即 $u(\mu)=\mu$). 对每个 $\mu$ 可积函数 $f$，令 $f_0=f$，

$f_k = f\circ u^k (k\geqslant 1)$. 对每个整数 $m$，设 $A_m$ 是满足下述条件的 $x\in X$ 组成的可测集：对于 $p\leqslant m$，和 $f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_p(x)$ 之中有一个大于或等于 0. 试证 $\int_{A_m} f(x)d\mu(x)\geqslant 0$.（对每个正整数 $n$ 与每个 $x\in X$，考虑序列

$$(f_i(x))_{0\leqslant i\leqslant n+m};$$

把 a) 应用到这个序列上，并记 $L_m(x)$ 为相应的指标集；若对每个 $k\leqslant n+m$，设 $B_k$ 是使得 $k\in L_m(x)$ 的 $x\in X$ 所成的集，则由 a) 推出

$$\sum_{k=0}^{n+m}\int_{B_k} f_k(x)d\mu(x)\geqslant 0.$$

另一方面，注意对于 $0\leqslant k\leqslant n$，有 $B_k = u^{-k}(A_m)$，且由此推出，对任意的 $n$，有

$$(n+1)\int_{A_m} f(x)d\mu(x) + m\int|f(x)|d\mu(x)\geqslant 0.)$$

设 $A$ 是这些 $A_m$ 的并，试证 $\int_A f(x)d\mu(x)\geqslant 0$（**极大遍历定理**）.

c) 设 $a$ 是实数，$C$ 是可积集，使对一切 $x\in C$，有

$$a<\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x),$$

试证 $a\mu(C)\leqslant\int|f(x)|d\mu(x)$.（把 b) 应用到函数 $f-a\varphi_C$ 上.）

d) 设 $a, b$ 是两个实数，$a<b$，$E$ 是使得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)<a<b<\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)$$

的 $x\in X$ 的集，试证 $E$ 是 $\mu$ 可忽略的.（首先由 c) 推出 $E$ 是可积的，然后把 b) 应用到函数 $(f-b)\varphi_E$ 与 $(a-f)\varphi_E$ 上，同时注意 $u(E)\subset E$.）由此证明，对几乎一切 $x\in E$，序列

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u^k(x))\right)$$

收敛于一个极限 $f^*(x)$，$f^*$ 是可积的，且 $f^*(u(x)) = f^*(x)$ 几乎处处成立（**G. D. Birkhoff 遍历定理**）.（取前文中的 $a, b$ 为满足 $a<b$ 的所有有理数对.）

e) 此外，试证若 $X$ 为紧，则 $\int f^*d\mu = \int fd\mu$.（归结为 $f$ 非负的情形，并且首先考虑 $f$ 为有界的情形；注意 $\int|f^*|d\mu\leqslant\int|f|d\mu$ 再转向一般情形.）

f) 假定 $X$ 为紧，$\mu(X)=1$，考虑 $\mu$ 可积函数序列 $(g_n)$，使得几乎处处有 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$，此外还假定，存在非负 $\mu$ 可积函数 $G$，使对一切整数 $n$，

$|g_n| \leqslant G$ 几乎处处成立．试证，在这些条件下，序列

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(u^k(x))\right)$$

几乎处处收敛于 $f^*(x)$．（归结为 $f=0$ 的情形．对每个满足 $0<\varepsilon<1$ 的 $\varepsilon$，存在 $\delta>0$，使对 $X$ 的每个满足 $\mu(B)\leqslant\delta$ 的 $\mu$ 可积子集 $B$，有 $\int_B Gd\mu \leqslant \varepsilon^2$ (13.15.5)．另一方面，存在整数 $m$，使得满足

$$\sup_{n\geqslant m}|g_n(x)| \leqslant \varepsilon^2$$

的 $x\in X$ 的集 $A_\varepsilon$ 的测度 $\mu(A_\varepsilon)\geqslant 1-\delta$．设 $G_\varepsilon$ 是在 $A_\varepsilon$ 上等于 $\varepsilon^2$，在 $X-A_\varepsilon$ 上等于 $G$ 的函数；对于 $n\geqslant m$，对一切 $x\in X$，我们可以写

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(u^k(x))\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1} g_k(u^k(x))\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} G_\varepsilon(u^k(x)).$$

于是由 c) 推断，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(u^k(x))\right| \geqslant \varepsilon$$

的 $x\in X$ 的集的测度 $\leqslant 2\varepsilon$．）

13) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$u$ 是 $X$ 到自身的连续映射，满足：对每个 $\mu$ 可忽略集 $N$，$u^{-1}(N)$ 也为 $\mu$ 可忽略的．$X$ 上的可测实值函数 $f$ 称为**关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的**，如果 $f\circ u$ 与 $f$ 关于 $\mu$ 几乎处处相等．$X$ 的 $\mu$ 可测子集 $A$ 称为关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的，如果它的特征函数关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的．

a) 试证，为使可测函数 $f$ 关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的，必须且只须对每个有理数 $r$，使得 $f(x)\geqslant r$ 的 $x\in X$ 所成的集关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的．（为证明所述条件的充分性，考虑使得 $f(u(x))\neq f(x)$ 的 $x\in X$ 的集．）

b) 以下我们假定 $u$ 是正常的，测度 $\mu$ 在 $u$ 下不变．映射 $u$ 称为关于 $\mu$ 是**遍历映射**（或 $\mu$ 关于 $u$ 是**遍历测度**），如果关于 $u$ 为 $\mu$ 不变的 $\mu$ 可测函数只能是几乎处处等于一个常值的函数．此时，对 $X$ 上每个 $\mu$ 可积函数 $f$，函数

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u^k(x))\right)$$

几乎处处等于一个常数；如果 $X$ 是紧的，则此常数等于

$$(1/\mu(X))\int f(x)d\mu(x).$$

反之，如果 $X$ 是紧的且对每个 $\mu$ 可积函数 $f$，$f^*$ 几乎处处等于一个常数，则 $u$ 是遍历的．

c) 取 $X$ 为 $\mathbf{C}$ 内的圆周 $U$: $|z|=1$, $\mu$ 为 Lebesgue 测度在 $[0,1]$ 到 $U$ 上的映射 $t\to e^{2\pi it}$ 下的象测度. 试证,如果 $\theta$ 是无理数, 则映射 $u$: $z\to e^{2\pi i\theta}z$ 保持 $\mu$ 不变且关于 $\mu$ 是遍历的(利用 Bohl 定理, 13.4 问题 7).

d) 假定 $X$ 是紧的, $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的. 如果 $A$ 与 $B$ 是两个 $\mu$ 可测子集, 试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(u^{-k}(A)\cap B)=\mu(A)\mu(B)/\mu(X).$$

反之, 如果这个关系对 $X$ 的一切可测子集对 $A$, $B$ 成立, 则 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的.

e) 假定 $X$ 是紧的, $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的. 试证,如果非负可测函数 $f$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(u^k(x))$$

几乎处处存在,则 $f$ 是可积的(把 $f$ 看作有界函数递增序列的极限).

f) 假定 $X$ 是紧的, $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的,且 $\mathrm{Supp}(\mu)=X$, 试证对几乎一切 $x\in X$, $u^n(x)(n\geqslant 0)$ 所成的集在 $X$ 内是稠密的.

14) 设 $X$ 是紧空间, $u$ 是 $X$ 到自身的连续映射, $\mu$ 是 $X$ 上在 $\mu$ 下为不变的正测度,且 $\mu(X)=1$, $A$ 是 $X$ 的 $\mu$ 可测子集. 对每个 $x\in A$, 以 $n(x)$ 表示使得 $u^n(x)\in A(n\geqslant 1)$ 的最小整数 $n$. 如果令 $A_n=u^{-n}(A)$, $B_n=u^{-n}(X-A)$, 则使得 $n(x)=m$ 的 $x\in A$ 的集是 $A_0\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{m-1}\cap A_m$; 因而函数 $x\to n(x)$ 是可测的.

a) 令 $\alpha_0=1$, $\alpha_m=\mu(B_0\cap B_1\cap\cdots\cap B_{m-1})$, 试证,对于 $m\geqslant 0$, 有

$$\mu(A_0\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{m-1}\cap B_m\cap A_{m+1})=\alpha_m-2\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}.$$

b) 试证通项为 $\alpha_m-\alpha_{m+1}$ 的级数收敛,且它的项形成一个递减序列(把 $\alpha_m-\alpha_{m+1}$ 看作一个集的测度); 由此推出 $\lim\limits_{m\to\infty}m(\alpha_m-\alpha_{m+1})=0$.

c) 设 $B_\infty$ 是所有 $B_n$ 的交,试证

$$\int_A n(x)d\mu(x)=1-\mu(B_\infty)\quad(\textbf{Kac 定理}).$$

(利用 a) 与 b).) 考虑 $u$ 关于 $\mu$ 为遍历且 $\mu(A)$ 大于 0 的情形.

d) 假定 $u$ 是双射,且 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的, $\mu(A)>0$. 设 $E_m$ 是使得

$$n(x)=m$$

的 $x\in A$ 所成的集,试证 $E_m(m\geqslant 1)$ 的并在 $A$ 内的余集是可忽略的(参阅问题 11a)). 并证明, 对于满足 $m\geqslant 1$ 与 $0\leqslant p\leqslant m$ 的所有数偶 $(p,m)$, 集 $u^p(E_m)$ 两两不相交, 并且这些集的并在 $X$ 内的余集是可忽略的 (**"角谷静夫摩天**

楼”).

15) 设 $f$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的下半连续(或上半连续)实值函数，$X$ 是局部紧空间，$u_1, \cdots, u_n$ 是普遍可测的有限实值函数，试证 $f(u_1, \cdots, u_n)$ 是普遍可测的(参阅问题 17).

16) 记号同 12.7 的问题 3，试证存在 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的 $n$ 个普遍可测映射 $t \to z_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$，使得

$$P_t(X) = X^n + t_1X^{n-1} + \cdots + t_n = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k(t)).$$

(就次数 $n$ 进行归纳，并利用问题 15.)

17) 设 $f$ 是 4.2 问题 2d) 中所定义的在 $I = [0, 1]$ 上连续的函数，使得 $f$ 在 $K$ (Cantor 三分集)上的限制是 $K$ 到 $I$ 上的一个双射. 设 $g$ 是由 $g(x) = x + f(x)$ 所定义的函数，则 $g$ 是 $I$ 到 $2I = [0, 2]$ 上的一个同胚，使得 $g(K)$ 是(关于 Lebesgue 测度)测度为 1 的紧集(然而 $K$ 是可忽略的). 若 $h(x) = g^{-1}(2x)$，则 $h$ 是 $I$ 到自身的同胚，使得 $h^{-1}(K)$ 关于 Lebesgue 测度不是可忽略的. 此外，若 $A$ 是关于 Lebesgue 测度的不可测集，且含在 $g(K)$ 内，则集 $B = h\left(\frac{1}{2} A\right)$ 是可忽略的，因而是可测的；尽管 $h$ 连续且 $\varphi_B$ 是可测的，但是函数 $\varphi_B \circ h$ 却是不可测的(参阅 (16.23)).

18) a) 设 $f$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上有定义且连续的有限实值函数，试证存在定义于 $\boldsymbol{R}$ 上的普遍可测实值函数 $g$，使对一切 $x \in f(\boldsymbol{R})$，有 $f(g(x)) = x$ (参阅 12.7 问题 1).

b) 我们假定存在 $I = [0, 1]$ 分解为族 $(H_n)_{n \in \boldsymbol{Z}}$ 的一个划分，其中每个 $H_n$ 关于 Lebesgue 测度都是不可测的，且具有连续统的基数. 又设 $F$ 是集 $K + n$ (对于 $n \in \boldsymbol{Z}$) 的并，其中 $K$ 是 Cantor 三分集 (4.2 问题 2)，则 $F$ 是关于 Lebesgue 测度为可忽略的闭集. 试证，存在 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的双射 $f$，使得 $F \cap ]n, n+1[$ 在 $f$ 下的象是 $H_n$，且 $f$ 在 $\complement F$ 的每个连通分支区间上是线性的. 因而 $f$ 关于 Lebesgue 测度是可测的，然而它的逆映射却是不可测的.

19) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$D$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 内处处稠密的可数集. 试证，为使 $X$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $f$ 为 $\mu$ 可测，必须且只须对每个 $r \in D$，使得 $f(x) \geqslant r$ 的 $x \in X$ 的集为 $\mu$ 可测.

20) 假定 $\mu$ 是有界的且 $\mu(X) = 1$，试证，对每个非负可积函数 $f$，函数 $\sqrt{1 + f^2}$ 是可积的，若令 $A = \int f d\mu$，则

$$\sqrt{1+A^2} \leqslant \int \sqrt{1+f'^2}\, d\mu \leqslant 1 + A$$

(利用 13.8 问题 14a)).

21) 设 $X, Y, Z$ 是三个局部紧空间,若 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 是两个普遍可测映射，试证 $g \circ f$ 是普遍可测映射. (为证明 $g \circ f$ 关于 $X$ 上任一正测度 $\mu$ 为可测，把它归结到 $X$ 为紧的情形,于是在 $Y$ 上考虑测度 $f(\mu)$ (13.4, 问题 8).) 特别是,如果 $B \subset Y$ 为普遍可测,则 $f^{-1}(B)$ 为普遍可测.

22) 设 $X$ 是局部紧空间，$Y$ 是紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)_{n \geqslant 0}$ 是 $X$ 到 $Y$ 的 $\mu$ 可测映射序列. 试证存在 $N \times X$ 到 $N$ 的映射 $(p, x) \to \sigma_p(x)$, 具有下列性质: 1° 对每个正整数 $p$ 与每个正整数 $n$, 集 $\sigma_p^{-1}(n)$ 是 $\mu$ 可测的; 2° 对每个 $x \in X$,序列 $(f_{\sigma_p(x)}(x))_{p \geqslant 0}$ 在 $Y$ 内收敛. (可以如下进行: 在 $Y$ 上取一个距离，定义满足 4.2 问题 3a) 中条件 (i) 与 (ii) 的普遍可测集 $A_s \subset Y$, 且使得 $A_{s'} \cap A_{s''} = \phi$ (使用与该题相同的记号). 然后用归纳法按下面的方式定义集 $B_s \subset X$: 假定已定义了 $B_s$, 使对每个 $x \in B_s$, 序列 $(f_n(x))$ 有无穷多项属于 $A_s$, 则我们定义 $B_{s'}$ 为使得序列 $(f_n(x))$ 有无穷多项属于 $A_{s'}$ 的 $x \in B$ 所成的集，而 $B_{s''}$ 是 $B_{s'}$ 在 $B_s$ 内的余集. 于是设 $x \in X$, 且设 $(\varepsilon_p)_{p \geqslant 0}$ 是已经定义好的序列，它由 0 或 1 构成，使得若 $s_p = (\varepsilon_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$, 则对一切 $p$, $x$ 都属于 $B_{s_p}$. 用归纳法按下面的方式定义 $\sigma_p(x)$: $\sigma_0(x)$ 是使得 $f_n(x) \in A_{s_0}$ 的最小整数 $n$, 而 $\sigma_p(x)$ 是使得 $f_n(x) \in A_{s_p}(n > \sigma_{p-1}(x))$ 的最小整数 $n$. 利用问题 21 证明这样定义的 $\sigma_p(x)$ 是所提问题的解.)

23) 设 $\mu$ 是 $X$ 上的有界正测度，$f$ 是非负的 $\mu$ 可积函数，试证存在下半连续函数 $g$, 使得 $g \geqslant 1/f$ (约定 $1/0 = +\infty$) 且 $gf$ 可积(约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$). (归结到 $f$ 为有界的情形; 考虑使得 $f(x) \leqslant 1/n$ 的 $x \in X$ 所成的集 $A_n$, 把 (13.7.9) 应用于这些集以构造 $g$.)

24) 设 $X, Y$ 是两个局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的有界正测度，$\pi$ 是 $X$ 到 $Y$ 的 $\mu$ 可测映射. 对每个函数 $f \in \mathscr{K}_R(Y)$, 试证 $f \circ \pi$ 为 $\mu$ 可积,并且映射

$$f \mapsto \int (f \circ \pi)\, d\mu$$

还是 $Y$ 上的正测度 $\nu$, 这个正测度 $\nu$ 称为 $\mu$ 在 $\pi$ 下的**象**，记作 $\pi(\mu)$. 推广 13.8 问题 12 与 13.9 问题 10 到 14 的结果.

25) 设 $X$ 是紧空间, $(\varpi_n)$ 是 $X$ 的可积集的有限划分序列,使当 $m > n$ 时, $\varpi_m$ 精于 $\varpi_n$ (问题 7). 非负可积函数序列 $(f_n)$ 称为关于序列 $(\varpi_n)$ 的**基本鞅**, 如果:

1° $f_n$ 在 $\tilde{\omega}_n$ 的每个集上等于常数；

2° 若 $m>n$，则对每个集 $A\in\tilde{\omega}_n$，有 $\int_A f_n d\mu=\int_A f_m d\mu$（用形象的语言说，就是在 $\tilde{\omega}_n$ 的每个集 $A$ 上，$f_n$ 所取的值等于 $f_m$ 在 $A$ 上的平均值）.

a）设 $a$，$b$ 是两个实数，$0\leqslant a<b$，$E_{ab}$ 是使得

$$\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)<a<b<\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x)$$

的 $x\in X$ 所成的可积集，试证 $E_{ab}$ 是可忽略的.（用反证法，假定 $\mu(E_{ab})>0$. 对每个正整数 $p$，设 $F_p$ 是满足下述条件的集 $A$ 的并：$A$ 属于划分 $\tilde{\omega}_n(n\geqslant p)$ 之一，且 $A\cap E_{ab}$ 非空. 若 $F=\bigcap_p F_p$，则 $\mu(F)\geqslant\mu(E_{ab})>0$. 利用鞅的定义证明，对每个整数 $p$ 与每个使得 $A\cap E_{ab}\neq\phi$ 的 $A\in\tilde{\omega}_n$（这里 $n$ 是大于或等于 $p$ 的整数），$b\mu(A\cap F_q)\leqslant a\mu(A)$ 对一切 $q\geqslant n$ 成立；先令 $q$ 趋于 $+\infty$，再令 $p$ 趋于 $+\infty$，由此即可导出矛盾.）

b）由 a）推断，序列 $(f_n)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $f$（取 $a$，$b$ 为有理数并利用 Fatou 引理）.

c）给出 $\int f d\mu$ 不等于（常）值 $\int f_n d\mu$ 的例子（取 $X=[0,1]$，$\mu$ 为 Lebesgue 测度，而 $\tilde{\omega}_n$ 为由区间 $[0,2^{-n}[$，$[2^{-n},2^{-n+1}[$，…，$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 所构成的划分）.

d）设 $F(x)=\sup_n f_n(x)$，试证存在常数 $C>0$，使对每个 $\alpha>0$，若设 $B_\alpha$ 是使得 $F(x)>\alpha$ 的 $x$ 的集，则 $\mu(B_\alpha)\leqslant C/\alpha$（注意 $B_\alpha$ 是 $B_{\alpha,n}$ 的并，这里 $B_{\alpha,n}$ 是使得 $f_n(x)>\alpha$ 的 $x\in X$ 的集）.

26）采用与问题 25）相同的假定，并设 $\sigma$ 是 $X$ 分解为 $\mu$ 可积集的另一有限划分. 对每个 $x\in X$ 与每个整数 $n$，设 $B\in\sigma$ 与 $A\in\tilde{\omega}_n$ 是划分 $\sigma$ 与 $\tilde{\omega}_n$ 的集中 $x$ 所属的集. 若 $\mu(A)=0$，令 $f_n(x)=0$；若 $\mu(A)>0$，令

$$f_n(x)=\mu(B\cap A)/\mu(A).$$

试证序列 $(f_n(x))$ 几乎处处收敛于一个极限 $f(x)\leqslant 1$，且序列 $(f_n)$ 平均收敛于 $f$.（注意，对每个集 $B\in\sigma$，函数 $\varphi_B f_n$ 形成关于测度 $\varphi_B\cdot\mu$ 的基本鞅，并利用问题 25.）

27）设 $X$ 是紧空间，其测度 $\mu(X)=1$，$\alpha=(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $X$ 分解为可积集的有限划分；对每个 $x\in X$，设 $A_i\in\alpha$ 是 $x$ 所属的集，数 $i(\alpha;x)=-\log\mu(A_i)$ 称为点 $x$ 对应于划分 $\alpha$ 的信息；数

$$H(\alpha)=\int i(\alpha;x)d\mu(x)=-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\log\mu(A_i)\geqslant 0$$

(约定 $t=0$ 时 $t\log t=0$)，称为划分 $\alpha$ (关于测度 $\mu$) 的**熵** (对应于 $\alpha$ 的信息的"平均值")．

设 $\beta=(B_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ 是 $X$ 分解为可积集的另一有限划分，数

$$H(\alpha/\beta)=-\sum_{i,k}\mu(A_i\cap B_k)\log(\mu(A_i\cap B_k)/\mu(B_k))\geqslant 0$$

称为 **$\alpha$ 关于 $\beta$ 的熵**，这里和式中相应于 $\mu(B_k)=0$ 的项代之以 0．若 $\omega$ 是仅由一个集 $X$ 所成的划分，则 $H(\alpha/\omega)=H(\alpha)$．

a) 若 $(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 $X$ 分解为可积集的有限划分的有限序列，以 $\bigvee\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$ 表示精于所有 $\alpha_j$ 的最粗划分，换言之，它是由形如 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 的非空集 (其中每个 $A_j$ 属于 $\alpha_j$) 所构成的划分；这个划分也记作 $\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_n$．

若 $\alpha,\beta,\gamma$ 是 $X$ 分解为可积集的三个有限划分，试证

$$H((\alpha\vee\beta)/\gamma)=H(\alpha/\gamma)+H(\beta/(\alpha\vee\gamma)),$$

特别有

$$H(\alpha\vee\beta)=H(\alpha)+H(\beta/\alpha).$$

由此推断，若 $\alpha$ 粗于 $\beta$，则 $H(\alpha/\gamma)\leqslant H(\beta/\gamma)$，特别有 $H(\alpha)\leqslant H(\beta)$．

b) 采用同样的记号，试证若 $\beta$ 粗于 $\gamma$，则

$$H(\alpha/\beta)\geqslant H(\alpha/\gamma)$$

(利用函数 $t\mapsto t\log t$ 在 $[0,1]$ 上为凸这一事实)．特别有 $H(\alpha)\geqslant H(\alpha/\gamma)$；对任意的 $\alpha,\beta$ 与 $\gamma$，有 $H((\alpha\vee\beta)/\gamma)\leqslant H(\alpha/\gamma)+H(\beta/\gamma)$，特别有 $H(\alpha\vee\beta)\leqslant H(\alpha)+H(\beta)$．

28) 设 $X$ 是紧空间，其测度 $\mu(X)=1$，$u$ 是 $X$ 到自身的 $\mu$ 可测映射，满足 $u(\mu)=\mu$ (问题 24)．设 $\alpha$ 是 $X$ 分解为可积集的有限划分；若

$$\alpha=(A_k)_{1\leqslant k\leqslant m},$$

则以 $u^{-1}(\alpha)$ 表示由集 $u^{-1}(A_k)$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ 所构成的划分．

a) 采用问题 27 的记号，试证极限

$$h(u,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}u^{-j}(\alpha)\right)$$

存在且有限．(若 $a_n=H\left(\bigvee\limits_{j=0}^{n-1}u^{-j}(\alpha)\right)$，利用问题 27b) 证明 $a_{m+n}\leqslant a_m+a_n$，然后作如同证明 (15.2.7，(i)) 时的推理．) $h(u,\alpha)$ 称为 **$u$ 关于 $\alpha$ 的熵**．试证 $h(u,\alpha)\leqslant H(\alpha)$ (利用问题 27)．

b) 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 是 $X$ 分解为可积集的两个有限划分，试证

$$h(u,\alpha\vee\beta)\leqslant h(u,\alpha)+h(u,\beta),$$

$$h(u,\alpha) \leqslant h(u,\beta) + H(\alpha/\beta).$$

此外，若 $\alpha$ 粗于 $\beta$，则 $h(u,\alpha) \leqslant h(u,\beta)$（利用问题 27）.

c）试证

$$h(u,\alpha) = \lim_{n\to\infty} H\left(\alpha \,/ \bigvee_{j=1}^{n} u^{-j}(\alpha)\right).$$

（利用问题 27，对 $n$ 作归纳法证明

$$H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} u^{-j}(\alpha)\right) = H(\alpha) + \sum_{j=0}^{n-1} H\left(\alpha/\left(\bigvee_{k=1}^{j} u^{-k}(\alpha)\right)\right).\Big)$$

d）试证，对任何正整数 $m$，有

$$h(u,\alpha) = h\left(u, \bigvee_{j=0}^{m} u^{-j}(\alpha)\right)$$

（注意右边等于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{m+n-1} u^{-j}(\alpha)\right)$$

并利用问题 27）. 若再假定 $u$ 是双射且 $u^{-1}$ 为 $\mu$ 可测，则对任何正整数 $m$，有

$$h(u,\alpha) = h\left(u, \bigvee_{j=-m}^{m} u^{j}(\alpha)\right)$$

（方法相同）.

e）令 $h(u) = \sup\limits_{\alpha} h(u,\alpha)$，其中 $\alpha$ 取遍 $X$ 的所有由可积集构成的有限划分，并把 $h(u)$ 称为 $u$（关于测度 $\mu$）的**熵**. 试证，对任何正整数 $m$，有

$$h(u^m) = mh(u)$$

（注意

$$h(u^m,\alpha) \leqslant h\left(u^m, \bigvee_{j=0}^{m-1} u^{-j}(\alpha)\right) = mh(u,\alpha)).$$

若再假定 $u$ 是双射且 $u^{-1}$ 为 $\mu$ 可测，则 $h(u^{-1}) = h(u)$.

f）试证，若 $u$ 是恒等映射 $1_X$，则 $h(1_X) = 0$. 由此推断，若存在正整数 $p$，使得 $u^p = 1_X$，则 $h(u) = 0$.

## 10. 向量值函数的积分

首先考虑 $X$ 到有限维实向量空间 $E$ 的映射 $\boldsymbol{f}$. 设 $(\boldsymbol{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ 是 $E$ 的一个基，且对每个 $x \in X$，令 $\boldsymbol{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\boldsymbol{e}_i$. 于是，如果

每个实值函数 $f_i$ 为 $\mu$ 可积，则称 $\boldsymbol{f}$ 为（关于 $\mu$）**可积的**或 **$\mu$ 可积的**，且令

$$(13.10.1)\qquad \int \boldsymbol{f}(x)d\mu(x)=\sum_{i=1}^{m}\left(\int f_i(x)d\mu(x)\right)\boldsymbol{e}_i.$$

易见这个定义不依赖于基的选取．又如果 $\|\boldsymbol{z}\|$ 是定义 $E$ 的拓扑的范数，则有下面的准则：

**(13.10.2)** 为使 $X$ 到 $E$ 的映射 $\boldsymbol{f}$ 可积，必须且只须 $\boldsymbol{f}$ 可测且

$$\int^{*}\|\boldsymbol{f}(x)\|d\mu(x)<+\infty.$$

此时函数 $x\rightarrow\|\boldsymbol{f}(x)\|$ 是可积的．

事实上，根据(13.9.6)，$\boldsymbol{f}$ 为可测等价于 $f_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都可测；另一方面，存在两个常数 $a$，$b$，使得 $a\sum_i|f_i(x)|\leqslant\|\boldsymbol{f}(x)\|\leqslant b\sum_i|f_i(x)|$ (5.9.1)，因而由(13.9.13)与(13.9.6)即得所需的结论．

特别是，为使复值函数 $f$ 在 $X$ 上可积，必须且只须 $\mathscr{R}f$ 与 $\mathscr{I}f$ 都可积，此时有

$$\int fd\mu=\int(\mathscr{R}f)d\mu+i\int(\mathscr{I}f)d\mu,$$

由此立即得到

$$\int\bar{f}d\mu=\overline{\int fd\mu}.$$

$X$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的 $\mu$ 可积映射所成的集 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{C}}(X,\mu)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间，而 $f\rightarrow\int fd\mu$ 是这个向量空间上的线性形式．此外，对任一可积复值函数 $f$，$|f|$ 必是可积的，且有

$$(13.10.3)\qquad \left|\int fd\mu\right|\leqslant\int|f|d\mu.$$

事实上，由于 $|f|=((\mathscr{R}f)^2+(\mathscr{I}f)^2)^{1/2}$，所以 $|f|$ 可测(13.9.6)且有

$$\mu^*(|f|)\leqslant\mu^*(|\mathscr{R}f|)+\mu^*(|\mathscr{I}f|),$$

由此由 (13.9.13) 即得第一个论断. 另一方面,存在复数 $\zeta$, 使得 $|\zeta| = 1$ 且 $\zeta\mu(f) = |\mu(f)|$, 从而

$$|\mu(f)| = \mathscr{R}(\mu(\zeta f)) = \mu(\mathscr{R}(\zeta f)) \leqslant \mu(|f|),$$

这就证明了 (13.10.3).

设 $E'$ 是有限维向量空间 $E$ 的对偶空间, 则所有 $f_i$ 可积等价于, 对每个 $\mathbf{z}' \in E'$, 映射 $x \to \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{z}' \rangle$ 可积 (因为它是 $f_i$ 的线性组合). 对此可作如下推广: 给定集 $I$, 把 $X$ 到向量空间 $K^I$ (这里 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 的映射 $x \to f_x$ 称为**纯量 $\mu$ 可积**,如果对每个 $\alpha \in I$, 函数 $x \to f_x(\alpha)$ 为 $\mu$ 可积.

**(13.10.4)** 设 $E$ 是 Fréchet 空间, $E'$ 是它的对偶空间 (12.15), $x \to \mathbf{f}_x$ 是 $X$ 到 $E'$ 的**纯量可积**映射, 使对 $E$ 中的每个收敛序列 $(\mathbf{a}_n)$, 存在定义于 $X$ 上的非负函数 $g$, 使得 $\mu^*(g) < +\infty$, 且对一切 $n$, $|\mathbf{f}_x(\mathbf{a}_n)| \leqslant g(x)$ 在 $X$ 内几乎处处成立. 这时, 在 $E$ 上存在连续线性形式 $\mathbf{z}' \in E'$, 使对每个 $\mathbf{z} \in E$, 有

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle = \int \mathbf{f}_x(\mathbf{z}) d\mu(x).$$

由 (3.13.14), 只须证明, 若 $(\mathbf{a}_n)$ 是 $E$ 中趋于 $\mathbf{z}$ 的点列, 就有 $\int \mathbf{f}_x(\mathbf{z}) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_x(\mathbf{a}_n) d\mu(x)$, 而这可由 (13.8.4) 得到.

这样定义的线性形式 $\mathbf{z}'$ 称为函数 $x \to \mathbf{f}_x$ 关于 $\mu$ 的**积分**(或**弱积分**),记作 $\int \mathbf{f}_x d\mu(x)$. 于是对一切 $\mathbf{z} \in E$, 有

**(13.10.5)** $$\langle \mathbf{z}, \int \mathbf{f}_x d\mu(x) \rangle = \int \mathbf{f}_x(\mathbf{z}) d\mu(x).$$

特别当 $E$ 是 Hilbert 空间时, 由于 $E$ 到它的对偶 $E'$ 上有一个半线性等距 $\mathbf{z} \to j(\mathbf{z})$(12.15),因而可以定义 $X$ 到 $E$ 的**纯量可积**映射 $x \to \mathbf{f}(x)$的概念.这是指对每个 $\mathbf{z} \in E$,复值函数 $x \to (\mathbf{f}(x) | \mathbf{z})$ 可积;如果函数 $x \to \|\mathbf{f}(x)\|$ 可积, 则根据 (13.10.4), 存在 $E$ 的唯一元素,把它记作 $\int \mathbf{f}(x) d\mu(x)$ 并称为 $\mathbf{f}$ 的**积分** (或**弱积分**),满足: 对一切 $\mathbf{z} \in E$, 有

$$(13.10.6)\quad \left(\int f(x)d\mu(x)\,|\,z\right)=\int (f(x)\,|\,z)d\mu(x).$$

## 问　　题

1）如果 $X$ 到 $R^I$ 的映射 $x\to f_x$ 是纯量 $\mu$ 可积的，则把 $R^I$ 的元

$$\alpha\to\int f_x(\alpha)d\mu(x)$$

称为所给映射的**积分**，记作 $\int f_x d\mu(x)$. 如果对一切 $x\in X$, $f_x$ 属于 $R^I$ 内的一个弱闭凸集 $A$，且如果 $X$ 可积，$\mu(X)=1$，则积分 $\int f_x d\mu(x)$ 也属于 $A$（利用 12.15 问题 13）.

2）设 $E$ 是可分实 Fréchet 空间，$E'$ 是它的对偶空间（12.15） 基于 Hahn-Banach 定理（12.15 问题 4），把每个 $z\in E$ 对应到 $E'$ 上的线性形式 $z'\to\langle z,z'\rangle$ 的线性映射 $c_E$ 是 $E$ 到 $R^{E'}$ 的单射，当赋予 $R^{E'}$ 积拓扑时，$c_E$ 是连续的. 如果 $K$ 是 $E$ 的紧子集，则 $c_E$ 在 $K$ 上的限制是 $K$ 到 $R^{E'}$ 的子空间 $c_E(K)$ 上的一个同胚（12.3.6）.

a）假定 $K$ 是 $E$ 的紧凸子集，$X$ 到 $K$ 的映射 $f$ 称为**纯量 $\mu$ 可积的**，如果对每个 $z'\in E'$，实值函数 $x\to\langle f(x),z'\rangle$ 是 $\mu$ 可积的. 应用前文与问题 1，试证存在唯一的向量 $z\in K$，使对一切 $z'\in E'$，有 $\langle z,z'\rangle=\int\langle f(x),z'\rangle d\mu(x)$；我们把这个向量记作 $\int f d\mu$ 或 $\int f(x)d\mu(x)$，并称它为 $f$ 的**积分**.

特别是，如果 $X=K$，$f$ 是恒等映射 $1_K$，则对 $K$ 上的每个总质量等于 1 的正测度 $\mu$，$K$ 的元

$$b_\mu=\int z d\mu(z)$$

称为 $\mu$ 的**重心**.

b）设 $H$ 是 $E$ 的紧子集，试证 $H$ 的闭凸包 $K$ 是紧的（证明它是准紧的），它等于总质量为 1 且其支集包含在 $H$ 内的正测度的重心 $b_\mu$ 所成的集.（注意，当 $\mu$ 取遍总质量为 1 的正测度所成的集 $P\subset M_+(H)$ 时，映射 $\mu\to b_\mu$ 关于 $P$ 上的粗疏拓扑与 $R^{E'}$ 的积拓扑在 $K$ 上的诱导拓扑是连续的，并利用 13.4 问题 12.）

3）设 $E$ 是可分实 Fréchet 空间，$A$ 是 $E$ 内的闭凸集，试证每个在 $A$ 内下半连续的凸函数（13.9，问题 14）$f$ 是一个函数族的上包络（12.7），这个族

中的函数是$E$上的连续仿射线性函数(即形如$z\to a+u(z)$的函数，这里$u$是$E$上的连续线性形式,而$a\in \boldsymbol{R}$)在$A$上的限制.(把 Hahn-Banach 定理应用到满足$z\in A$与$\zeta\geqslant f(z)$的$(z,\zeta)\in E\times\boldsymbol{R}$所成的闭凸集上.)

4) 设$E$是可分实 Fréchet 空间,$K$是$E$的紧凸子集，$\mu$是$K$上的总质量为1的正测度，$b_\mu$是$\mu$的重心(问题2). 试证，对每个在$K$上为下半连续的非负实值凸函数$f$，有$f(b_\mu)\leqslant\int^* f d\mu$(利用问题3).

5) a) 设$E$是可分 Fréchet 空间,$K$是$E$的紧凸子集，$z$是$K$中的点. 试证$K$上的每个总质量为1且以$z$为其重心的正测度$\mu$必属于如下的集的粗疏闭包：这个集由所有总质量为1，具有有限支集并以$z$为重心的正测度所组成.(设$U$是$\mu$关于粗疏拓扑的邻域,它由$K$上满足下述条件的测度$\nu$组成：对某些函数$f_i\in\mathscr{C}_C(K)$，有$|\mu(f_i)-\nu(f_i)|\leqslant\delta$. 证明存在有限个点$a_j\in K$，且对每个$j$，在$K$内存在$a_j$的凸紧邻域$W_j$,使得这些$W_j$覆盖$K$，且对一切$i$与一切$y\in W_j$，有

$$|f_i(y)-f_i(a_j)|\leqslant\delta/2.$$

试证(应用单位连续分解)，可写$\mu=\sum_j \alpha_j\mu_j$，其中$\mu_j$是总质量为1且其支集包含在$W_j$内的一个正测度,而$\alpha_j\geqslant 0$，$\sum_j \alpha_j=1$. 如果$z_j$是$\mu_j$的重心，证明$\nu=\sum_j \alpha_j\varepsilon_{z_j}$的重心是$z$且$\nu\in U$.)

b) 设$K'$是$K$的紧子集，使得$K$是$K'$的闭凸包. 为使$z\in K$是$K$的端点(12.15,问题5),必须且只须$\varepsilon_z$是$K'$上唯一的总质量为1且以$z$为其重心的正测度(利用a)证明所述条件的必要性).

6) 设$E$是可分实 Fréchet 空间,$K$是$E$的紧凸子集,试证在$K$上存在一个严格凸的连续实值函数.($E$上的连续仿射线性函数在$K$上的限制所成的集$\mathscr{A}$是可分可度量化空间$\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(K)$的一个子空间，因而包含一个处处稠密序列$(h_n)$. 利用 Hahn-Banach 定理证明,对于适当的纯量$\alpha_n>0$，函数

$$\sum_n \alpha_n h_n^2$$

是所提问题的解.)

7) 设$E$是可分实 Fréchet 空间,$K$是$E$的紧凸子集,$u$是$K$上的连续实值凸函数，$G\subset E\times\boldsymbol{R}$是$u$的图象,$S$是$G$在$E\times\boldsymbol{R}$内的闭凸包.

a) 设$v$是具有下述性质的$w$的下包络：$w$是$E$上的连续仿射线性函数,且在$K$上有$w(z)\geqslant u(z)$；试证$S$是满足$z\in K$与$u(z)\leqslant\zeta\leqslant v(z)$的点

$(x, \xi) \in E \times \boldsymbol{R}$ 组成的集. (根据 Hahn-Banach 定理, $S$ 的点 $(x, \xi)$ 是具有下述性质的点: 对于在 $E \times \boldsymbol{R}$ 上连续的每个仿射线性函数 $h$, 只要 $h$ 满足: 若对一切 $y \in K$ 有 $h(y, u(y)) \geqslant 0$, 就有 $h(x, \xi) \geqslant 0$. 利用问题 5.)

b) 试证,如果 $u$ 在 $K$ 上是严格凸的,则对每个不是 $K$ 中的端点的 $x \in K$, 有 $u(x) < v(x)$.

c) 试证, 对每个点 $x \in K$, 存在 $K$ 上的正测度 $\mu$, 它以 $x$ 为重心且使得 $v(x) = \int u(y) d\mu(y)$ (把问题 2b) 应用到 $E \times \boldsymbol{R}$ 内的紧集 $G$ 的闭凸包 $S$ 上). 由问题 4 推断,在 $K$ 内关于 $\mu$ 几乎处处有 $u(x) = v(x)$.

8) 设 $E$ 是可分实 Fréchet 空间, $K$ 是 $E$ 的紧凸子集.

a) 试证 $K$ 的端点集 $M$ 是 $K$ 的开子集的一个序列的交, 因而是普遍可测的. (在空间 $K \times K \times [0, 1]$ 中考虑三元组 $(x', x'', \lambda)$ 的集,其中 $x' \neq x''$ 且 $0 < \lambda < 1$, 并考虑它在映射 $(x', x'', \lambda) \to \lambda x' + (1-\lambda)x''$ 下的象 $K - M$.)

b) 试证 $K$ 的每个点是 $K$ 上的一个正测度 $\mu$ 的重心, $\mu$ 的总质量是 1, 且使得 $\mu(K - M) = 0$ (**Choquet 定理**)(利用问题 6 与 7).

9) 把问题 2 到 8 的结果推广到 $M_+(X)$ 的凸的且粗疏紧子集 $K$ 的情形, 这里 $X$ 是紧空间(参阅 12.15. 问题 13).

## 11. $L^1$ 空间与 $L^2$ 空间

在本章中, 以下我们约定把函数 $(x, y) \to xy$ 延拓到整个 $\bar{\boldsymbol{R}} \times \bar{\boldsymbol{R}}$: 当因子 $x, y$ 之一为 0 而另一为 $\pm\infty$ 时, 令 $xy = 0$ (这个延拓当然不是连续的). 在这样的约定下,对 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 内任何 $x, y, z$, 仍然有 $x(yz) = (xy)z$, 且关系 $x \leqslant y$, $z \geqslant 0$ 蕴涵 $xz \leqslant yz$.

对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$, 令

**(13.11.1)**
$$N_1(f) = \int^* |f| \, d\mu,$$
$$N_2(f) = \left(\int^* |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = N_1(|f|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**(13.11.2)** 对 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任何非负映射 $f, g$, 对于 $p$ 等于 1 或 2,都有

(**13.11.2.1**) $$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g).$$

对于 $p=1$，本命题已被证明(13.5.6)。对于 $p=2$，我们首先证明**广义 Cauchy-Schwarz 不等式**

(**13.11.2.2**) $$N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g).$$

(这里我们采用上面引进的关于 $\boldsymbol{R}$ 上乘积的约定。)

如果此式右边两个因子之一是 0，则此不等式为真。因为，例如设 $N_2(g)=0$，则 $g^2$ 是可忽略的，从而 $g$ 也是可忽略的(13.6.3)，故由所作的约定，$fg$ 也是可忽略的(13.6.3)，于是(13.11.2.2)的两边都等于 0。如果此式右边两个因子之一是 $+\infty$，则此不等式仍然成立(按照同样的推理)。这样我们可以假定(13.11.2.2)右边的两个因子都为有限且不等于 0，而这就推出(13.6.4) $f$ 与 $g$ 几乎处处有限。现在注意到，对于两个非负实数 $a, b$，不等式

$$2ab \leqslant ta^2 + t^{-1}b^2$$

对任何纯量 $t>0$ 成立。鉴于(13.6.5)与(13.5.6)，由此推出

$$2\int^* fg\,d\mu \leqslant \int^* (tf^2 + t^{-1}g^2)\,d\mu \leqslant t\int^* f^2\,d\mu + t^{-1}\int^* g^2\,d\mu,$$

取 $t = N_2(g)/N_2(f)$，即得(13.11.2.2)。

于是，为对 $p=2$ 证明(13.11.2.1)，仍可限于 $N_2(f)$ 与 $N_2(g)$ 为有限且 $f$ 与 $g$ 为非负的情形。由于 $(f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2)$，首先可推出 $N_2(f+g)$ 为有限。我们也能限于 $N_2(f+g) \neq 0$ 的情形。此外，由本节开始的约定，有 $(f+g)^2 = f(f+g) + g(f+g)$，因而((13.5.6)与(13.11.2.2))

$$\begin{aligned}(N_2(f+g))^2 = N_1((f+g)^2) &\leqslant N_1(f(f+g)) \\ &\quad + N_1(g(f+g)) \\ &\leqslant N_2(f)N_2(f+g) + N_2(g)N_2(f+g),\end{aligned}$$

用 $N_2(f+g) \neq 0$ 除上式两边，即得(13.11.2.1)。

(**13.11.3**) 对于非负函数的任一序列 $(f_n)$，当 $p$ 等于 1 或 2 时，有

(**13.11.3.1**) $$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

对于 $p=1$，本命题已被证明(13.5.8)。对于 $p=2$，推理是类似的。由 $g_n=\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^2$ 构成的序列是递增的，且以

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^2$$

为其上包络。由(13.11.2.1)并对 $n$ 用归纳法，即有

$$N_1(g_n)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} N_2(f_k),$$

因而只须把(13.5.7)应用于序列 $(g_n)$ 即可。

我们已经定义了 $\mu$ 可积(有限)实值函数所成的集 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^1(X,\mu)$ (13.7.3)，并已看到这是一个向量空间。同样，使得 $f^2$ 为可积的 $\mu$ 可测有限实值函数 $f$ 所成的集形成一个向量空间 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^2(X,\mu)$ (也记作 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^2(\mu)$ 或 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^2$)。事实上，只须注意，如果 $f$ 与 $g$ 可测且 $f^2$ 与 $g^2$ 可积，则 $f+g$ 可测，且据(13.11.2.1)，由(13.9.13)即知 $(f+g)^2$ 可积。

要注意，可以有这样的函数 $f$，它是不可测的，但 $f^2$ 却是可积的(问题 2)。

在用语随便时，我们说 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^2(X,\mu)$ 是**平方 $\mu$ 可积函数**空间。由于对 $p=1$ 或 $p=2$，$N_p(af)=|a|\,N_p(f)$ 对一切纯量 $a\neq 0$ 成立，所以由(13.11.2.1)得知，$N_p$ 是 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^p(X,\mu)$ 上的半范数。在这两种情形下，使得 $N_p(f)=0$ 的函数 $f$ 的集 $\mathscr{N}$ 是可忽略(有限)实值函数组成的向量子空间(13.6.3)；对于由半范数 $N_p$ 所定义的拓扑，空间 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^p(X,\mu)$ 一般不是分离的。商空间 $L_{\boldsymbol{R}}^p(X,\mu)=\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^p(X,\mu)/\mathscr{N}$ (也记作 $L_{\boldsymbol{R}}^p(\mu)$ 或 $L_{\boldsymbol{R}}^p$)，对于 $p=1$ 是可积函数的等价类 $\tilde{f}$ 所成的空间，而对于 $p=2$ 是平方可积函数的等价类 $\tilde{f}$ 所成的空间(13.6)。只在 $X$ 内几乎处处有定义且有限的函数，如果它的类属于 $L_{\boldsymbol{R}}^2$，也称为**平方可积函数**。

对于属于同一类 $\tilde{f}\in L_{\boldsymbol{R}}^p$ 的函数 $f$，数 $N_p(f)$ 都是相同的，把它记作 $N_p(\tilde{f})$。由(12.14.8)得知 $\tilde{f}\to N_p(\tilde{f})$ 是 $L_{\boldsymbol{R}}^p$ ($p=1$ 或 $p=2$) 上的一个范数。

**(13.11.4) (Fischer-Riesz 定理)**. 对于 $p=1$ 或 $p=2$，赋范空间 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}(X,\mu)$ 是完备的(即是 Banach 空间)．更精确地说：

(i) 设 $(g_n)$ 是函数序列，$g_n$ 所属的类属于 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(g_n) < +\infty,$$

则以 $g_n(x)$ 为通项的级数在 $\boldsymbol{R}$ 内几乎处处绝对收敛，如果令

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

则(几乎处处有定义的)函数 $g$ 所属的类 $\tilde{g}$ 属于 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$，且在赋范空间 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$ 中有 $\tilde{g}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n$.

(ii) 设 $(f_n)$ 是函数序列，使得 $f_n$ 所属的类构成的序列 $(\tilde{f}_n)$ 是 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$ 中的 Cauchy 序列，则存在子序列 $(f_{n_k})$，使得 $(f_{n_k}(x))$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中几乎处处有极限 $f(x)$；对于每个具有这种性质的子序列 $(f_{n_k})$，$f$ 所属的类 $\tilde{f}$ 属于 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$，且是序列 $(\tilde{f}_n)$ 在赋范空间 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$ 中的极限．

(iii) 设 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^{p}(X,\mu)$ 的函数组成的序列，使得序列 $(f_n(x))$ 几乎处处收敛于极限 $f(x)$，且假定存在函数 $h\in\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^{p}(X,\mu)$，使对一切 $n$，几乎处处有 $|f_n(x)|\leqslant h(x)$，则类 $\tilde{f}$ 属于 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$，且是序列 $(\tilde{f}_n)$ 在赋范空间 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$ 中的极限．

为证明 $L_{\boldsymbol{R}}^{p}$ 是完备的，显然只须证明 (i) 与 (ii)．对于 $p=1$，论断 (i) 已被证明 (13.8.5)．对于 $p=2$，由假定与 (13.11.3.1) 得知，函数 $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ 几乎处处有限 (13.6.4)，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中几乎处处收敛．故 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中几乎处处收敛，且由于几乎处处有 $|g(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$，所以由 (13.11.3.1)，有 $N_2(g)<+\infty$．此外，$g$ 是可测的 (13.9.11)，因而它所属的类属于 $L_{\boldsymbol{R}}^{2}$．由于对一切 $n$ 与几乎一切 $x\in X$ 有

$$\left|g(x)-\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|g_k(x)|,$$

根据 (13.11.3.1) 推出

$$N_2\left(g-\sum_{k=1}^{n}g_k\right)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}N_2(g_k),$$

当 $n$ 充分大时，它可以任意小，这就证明了关系式 $\tilde{g}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n$.

关于(ii)，为证明第一个论断，只须证明，对于一个适当的子序列 $(f_{n_k})$，级数 $f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$ 几乎处处收敛，且如果 $f(x)$ 是它的和 ($f(x)$ 几乎处处有定义)，则在 $L_R^p$ 中有 $\tilde{f}=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n$. 为此，根据假定，我们可以用归纳法定义序列 $(n_k)$，使对一切 $k\geqslant 1$，有

$$N_p(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})\leqslant 2^{-k}$$

$(n_1=1)$. 于是由 (i) 得知，级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$$

几乎处处收敛，且如果 $f(x)$ 是此级数的和，则在 $L_R^p$ 中有

$$\tilde{f}=\lim_{k\to\infty}\tilde{f}_{n_k}.$$

由于 $(\tilde{f}_n)$ 是 Cauchy 序列，因而在 $L_R^p$ 内也有 $\tilde{f}=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n$ (3.14.2). 为证明第二个论断，只须用子序列 $(f_{n_k})$ (假定它几乎处处有极限) 代替序列 $(f_n)$ 并应用上面的推理即可.

现在来证明 (iii). 对每个 $n$，考虑函数 $g_n=\sup_{h>0,k>0}|f_{n+h}-f_{n+k}|$，它是非负可测的 (13.9.11)，且由于 $|g_n|\leqslant 2h$，所以 $g_n$ 属于 $\mathscr{L}_R^p$ (13.9.13). 序列 $(g_n)$ 是递减的，且由假定，它几乎处处趋于 0，因而 $\lim_{n\to\infty}N_p(g_n)=0$ (13.8.1). 这表明序列 $(\tilde{f}_n)$ 是 $L_R^p$ 中的 Cauchy 序列，由 (ii) 与假定，此序列收敛于 $\tilde{f}$.

如果 $\mathscr{L}_R^p$ 中的序列 $(f_n)$ 关于由半范数 $N_p$ 定义的拓扑收敛于

$f\in\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}$,则当 $p=1$ 时,称它**平均收敛**于 $f$,而当 $p=2$ 时,称它**均方收敛**于 $f$. 注意,可能发生这样的情形: 对任何 $x\in X$,序列 $(f_n(x))$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中都不收敛(问题 1).

**(13.11.5)** 设 $\mathscr{E}\subset\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}$ 是在 $\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}$ 内处处稠密(关于由半范数 $N_p$ 所定义的拓扑)的函数集,于是对每个函数 $f\in\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}$,存在属于 $\mathscr{E}$ 的函数的序列 $(g_n)$,使得序列 $(g_n(x))$ 几乎处处收敛于 $f(x)$,且序列 $(g_n)$ 在 $\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}$ 中以 $f$ 为其极限.

这由(13.11.4),与下述事实立即得到: 在度量空间 $L^p_{\boldsymbol{R}}$ 中,存在 $\mathscr{E}$ 中的函数所属的类组成的序列 $(\tilde{g}_n)$,它以 $\tilde{f}$ 为极限(3.13.3).

特别用于 $\mathscr{E}=\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的情形,就有:

**(13.11.6)** (i) 当 $p=1$ 与 $p=2$ 时,子空间 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 在

$$\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$$

内处处稠密.

(ii) 对 $X$ 的每个紧子集 $K$,由 $\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$ 的拓扑在 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$ 上所诱导的拓扑粗于由范数 $\|f\|$ 所定义的拓扑.

(iii) Banach 空间 $L^p_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$ 是可分的 ($p=1$ 或 2).

对于 $p=1$,论断 (i) 已被证明(13.7.2). 为证明 $p=2$ 的情形,可以限于证明: $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{R}}$ 的每个非负函数 $f$ 属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的闭包. 根据(13.7.2),对每个 $\varepsilon>0$,存在函数 $u\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$,使得 $N_1(f^2-u)\leqslant\varepsilon$. 又由于 $|f^2-u^+|\leqslant|f^2-u|$,故不妨假定 $u$ 为非负,因而可设 $u=v^2$,其中 $v\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 且非负. 然而此时我们有 $|f-v|^2\leqslant|f^2-v^2|$,于是得到

$$(N_2(f-v))^2=N_1(|f-v|^2)\leqslant N_1(|f^2-v^2|)\leqslant\varepsilon.$$

为证明 (ii),只须注意,对每个函数 $g\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K)$,有

$$N_p(g)\leqslant\|g\|(\mu(K))^{1/p}.$$

最后,设 $(K_n)$ 是紧集的递增序列,它形成 $X$ 的覆盖,且使得 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 是所有 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K_n)$ 的并 (3.18.3). 已知对每个 $n$,在 Banach 空间 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K_n)$ 中存在处处稠密的序列 $(g_{mn})_{m\geqslant1}$ ((7.4.4)与(3.10.9)),于是由(i)与(ii)得到,二重序列 $(g_{mn})_{n\geqslant1,m\geqslant1}$ 在 $\mathscr{L}^p_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$ 内处处稠密.

注意，如果 $f\in\mathscr{L}^1_R(X,\mu)$，不一定总能求得等价于 $f$ 的函数 $f'$ 与属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的函数的序列 $(f_n)$，使得序列 $(f_n(x))$ 在 $X$ 内处处收敛于 $f'(x)$（问题 3）。

我们已经定义可积复值函数所成的向量空间 $\mathscr{L}^1_C(X,\mu)$ (13.10)。同样，用 $\mathscr{L}^2_C(X,\mu)$（或 $\mathscr{L}^2_C(\mu)$，或 $\mathscr{L}^2_C$）来表示使得 $|f|^2$ 为 $\mu$ 可积的 $\mu$ 可测复值函数 $f$ 所成的集。此外，对每个复值函数 $f$，用 (13.11.1) 定义 $N_1(f)$ 与 $N_2(f)$。由于复值函数 $f$ 为可测等价于 $\mathscr{R}f$ 与 $\mathscr{I}f$ 都可测，且因

$$\sup(|\mathscr{R}f|,|\mathscr{I}f|)\leqslant|f|\leqslant|\mathscr{R}f|+|\mathscr{I}f|,$$

故

$$\mathscr{L}^2_C(X,\mu)=\mathscr{L}^2_R(X,\mu)\oplus i\mathscr{L}^2_R(X,\mu).$$

上面证明的 $\mathscr{L}^p_R(X,\mu)$ 的所有性质均可直接推广到 $\mathscr{L}^p_C(X,\mu)$ ($p=1$ 或 2) 的情形，同样可定义 Banach 空间 $L^2_C(X,\mu)$，也记作 $L^2_C(\mu)$ 或 $L^2_C$。

此外还有：

**(13.11.7)** 设 $f$ 与 $g$ 是属于 $\mathscr{L}^2_R(X,\mu)$（相应地，$\mathscr{L}^2_C(X,\mu)$）的两个函数，则乘积 $fg$ 属于 $\mathscr{L}^1_R(X,\mu)$（相应地，$\mathscr{L}^1_C(X,\mu)$）。空间 $L^2_R(X,\mu)$（相应地，$L^2_C(X,\mu)$）对于 Hermite 形式

**(13.11.7.1)** $$(\tilde{f},\tilde{g})\to(\tilde{f}|\tilde{g})=\int f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$$

是可分 Hilbert 空间，而相应的范数是 $N_2(\tilde{f})$。

事实上我们已经知道此时 $fg$ 是可测的 (13.9.8.1)，因而第一个论断由 (13.9.13) 与 (13.11.2.2) 得到。第二个论断由第一个论断以及 Fischer-Riesz 定理 (13.11.4) 与 (13.11.6) 得到。

## 问　　题

1) 设 $\lambda$ 是 $I=[0,1[$ 上的 Lebesgue 测度。对每个整数 $n=2^k+h(0\leqslant h<2^k)$，设 $f_n$ 是在区间 $[h2^{-k},(h+1)2^{-k}[$ 上等于 1，而在此区间外等于 0 的函数，试证序列 $(f_n)$ 平均收敛且均方收敛于 0，然而对任何 $x\in I$，$(f_n(x))$ 均不收敛。

2) 设 $A$ 是包含在 $I=[0,1]$ 内的关于 Lebesgue 测度的不可测集，$f$ 是

在 $A$ 上等于1，在 $I-A$ 上等于 $-1$ 的函数，则函数 $f^2$ 可积，然而 $f$ 却不可测.

3）考虑 13.8 问题 4b）中定义的序列 $(A_n)$，设 $H$ 是集 $A_{2n+1}$ 当 $n$ 取遍正整数时的并，试证，对每个非空开区间 $J\subset I$，集 $J\cap H$ 与 $J\cap(I-H)$ 都具有正测度. 设 $f$ 是几乎处处等于 $\varphi_H$ 的函数，试证不存在 $I$ 上的连续函数的序列 $(f_n)$，使得它在 $I$ 的任何点处收敛且其极限等于 $f$.（注意 $f$ 必在 $I$ 的每个点处间断，并利用 12.16 问题 3.）

4）假定 $\mu$ 是有界测度，且其总质量为 1；设 $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 是 $X$ 的可积子集的有限序列，使对每个 $k$ 都有 $\mu(A_k)=c>0$.

若 $nc>1$ 且 $\varepsilon>c(1-c)/(n-1)$，试证存在两个不同的指标 $i,j$，使得 $\mu(A_i\cap A_j)\geqslant c^2-\varepsilon$.（利用 Cauchy-Schwarz 不等式并用反证法.）

5）设 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ $(p=1$ 或 $2)$ 的函数组成的序列，它几乎处处收敛于函数 $f$.

a）试证，如果对一切 $n$ 有 $N_p(f_n)\leqslant a$，则函数 $f$ 属于 $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 且 $N_p(f)\leqslant a$（利用 Fatou 引理）. 给出一个例子，使得 $p=1$ 而 $N_p(f_n)$ 不趋于 $N_p(f)$.

b）进一步假定序列 $(N_p(f_n))$ 趋于 $N_p(f)$，试证此时 $N_p(f-f_n)$ 趋于 0.（证明对每个 $\varepsilon>0$，存在 $X$ 的紧子集 $K$ 与整数 $n_0$，使对 $n\geqslant n_0$，有

$$\int_{X-K}|f_n|^p d\mu\leqslant\varepsilon.\text{ )}$$

6）设 $I=]0,1]$，$\lambda$ 是 Lebesgue 测度，在空间 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(I,\lambda)$ 中考虑函数 $t^\alpha$（$\alpha$ 是实数），当 $\alpha>-\frac{1}{2}$ 时，它属于这个空间.

设 $(\alpha_n)$ 是由互不相同的指数 $\left(这些指数均>-\frac{1}{2}\right)$ 组成的序列，则为使相应的函数 $t^{\alpha_n}$ 在 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(I,\lambda)$ 内形成一个全序列，必须且只须它满足下面三个条件之一：

1° 存在 $(\alpha_n)$ 的收敛子序列，且其极限大于 $-\frac{1}{2}$；

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-\frac{1}{2}$ 且 $\sum\limits_n|\alpha_n+\frac{1}{2}|=+\infty$；

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$ 且 $\sum\limits_n\alpha_n^{-1}=+\infty$.

（对每个正整数 $m$，利用 Weierstrass 定理计算 $N_2(t^m-f(t))$ 的最小值，其中 $f$ 取遍前 $n$ 个函数 $t^{\alpha_k}$ 的线性组合的集；为此利用 6.6 问题 3b）与公式

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)=\frac{\prod\limits_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod\limits_{i,j}(a_i+b_j)},$$

其中 $(a_i)$, $(b_i)$ 是两个由互不相等的正数组成的任意序列 (**Cauchy 行列式**).) 由此推断，为使由 1 与这些 $t^{\alpha_n}$ 组成的函数序列(这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$) 在空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 中是全序列,必须且只须 $\sum\limits_n \alpha_n^{-1}=+\infty$ (**Müntz 定理**).

7) 在 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 或 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 中,称函数序列 $(f_n)$ 为**正规正交的**,如果这些函数所属的类 $\tilde{f}_n$ 构成的序列在相应的 Hilbert 空间中是正规正交的.

a) 设 $(f_n)$ 是正规正交的无限序列，且在 $X$ 上一致有界,试证,如果 $\mu$ 有界,则存在正测度集 $A$, 使对 $A$ 的每个点 $x$, 有 $\sum\limits_n |f_n(x)|^2=+\infty$. (用反证法，注意序列 $(f_n)$ 不可能几乎处处趋于 0.)

b) 假定 $\mu$ 有界,$(f_n)$ 是一致有界的正规正交无穷序列,试证，如果纯量序列 $(a_n)$ 使得以 $a_nf_n(x)$ 为通项的级数几乎处处收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (应用 Егоров 定理于序列 $(|a_nf_n|^2)$) 上,证明存在纯量序列 $(b_n)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0,$$

且在一个正测度集上，有 $\sum\limits_n |b_n|^2|f_n(x)|^2=+\infty$. (取序列 $(b_n)$, 使得 $\sum\limits_n |b_n|^2=+\infty$, 应用 Егоров 定理于 $\sum\limits_n |b_n|^2|f_n|^2$ 的部分和，并进行反证法推理.)

c) 设 $(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^2$ 中的序列,试证下列三个陈述是等价的:

$\alpha$) 对于每个使得通项为 $a_nf_n(x)$ 的级数在一个正测度集上收敛的序列 $(a_n)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

$\beta$) 对于每个使得通项为 $a_nf_n(x)$ 的级数在一个正测度集上绝对收敛的序列 $(a_n)$, 有 $\sum\limits_n |a_n|<+\infty$.

$\gamma$) 对于 $X$ 内每个测度为正的可测集 $A$, 有 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_A|f_n|\,d\mu>0$.

(利用 Егоров 定理证明 $\gamma$) 蕴涵 $\alpha$) 与 $\beta$), 用反证法证明相反的论断，此时考虑子序列 $(n_k)$, 使得 $\int_A|f_{n_k}|\,d\mu<(1/k^3)$, 并取 $a_{n_k}=k$, 而对 $n\neq n_k$, 取 $a_n=0$. )

d) 假定 $\mu$ 有界，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^2$ 中的一个序列，试证下列三个陈述是等价

的：

α) 对于每个使得通项为 $a_n f_n(x)$ 的级数几乎处处收敛的序列 $(a_n)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

β) 对于每个使得通项为 $a_n f_n(x)$ 的级数几乎处处绝对收敛的序列 $(a_n)$，有 $\sum\limits_n |a_n| < +\infty$。

γ) 存在 $\delta > 0$，使对每个其余集的测度 $\leqslant \delta$ 的可测集 $A$，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n| d\mu > 0.$$

(与 c) 的方法相同)．由此推断，如果序列 $(f_n)$ 是正规正交且一致有界的，则它满足这三个条件；从而以 $a_n f_n(x)$ 为通项的级数几乎处处绝对收敛的一个必要充分条件是 $\sum\limits_n |a_n| < +\infty$（利用 b)）。

8) a) 设 $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 是 $\mathscr{L}_C^2(X, \mu)$ 中的正规正交有限序列，则存在不依赖于 $n$ 的常数 $c$，使对每个复数有限序列 $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$，有

$$\int \sup_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \left| \sum_{k=i}^{j} a_k f_k \right|^2 d\mu \leqslant c(\log n)^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

(先假定 $n = 2^r$。对每个 $j \leqslant n$，设 $s_j = \sum\limits_{k=1}^{j} a_k f_k$。对应于数 $j$ 的二进展开式，把这个和分解为至多 $r+1$ 个部分和，使得 $s_j = \sum\limits_{q=0}^{r} p_q$，这里对每个 $q$，或者 $p_q = 0$，或者 $p_q$ 形如

$$\sum_{h\cdot 2^q \leqslant k < (h+1)2^q} a_k f_k, \quad 0 \leqslant h < 2^{r-q}.$$

利用 Cauchy 不等式

$$|s_j|^2 \leqslant r \sum_{q=0}^{r} |p_q|^2$$

证明

$$\int |s_j|^2 d\mu \leqslant r(r+1) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

当 $2^r \leqslant n < 2^{r+1}$ 时，取指标 $k > n$ 的 $a_k$ 等于 0.)

b) 设 $(w(n))_{n\geqslant 1}$ 是趋于 $+\infty$ 的正整数递增序列，$(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathscr{L}_C^2(X, \mu)$ 中的正规正交序列，试证，如果序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $\sum\limits_n w(n)|a_n|^2 < +\infty$，且 $(n_k)$ 是使得 $k \leqslant w(n_k) < k+1$ 的一个整数序列，则 $s_{n_k} = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n_k} a_j f_j$ 所成的序

列在 $X$ 中几乎处处收敛．（设 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 对于正规正交系 $(f_n)$ 的系数是 $a_n$(6.5.2)，估计 $N_2(f-s_{n_k})=r_{n_k}$；写 $r^2_{n_k}=(k+1-k)r^2_{n_k}$，借助 Abel 部分和方法(13.21 问题 6)以得出通项为 $r^2_{n_k}$ 的级数收敛．）

c) 假定序列 $(a_n)$ 使得 $\sum\limits_n |a_n|^2(\log n)^2<+\infty$，试证级数 $\sum\limits_n a_nf_n$ 几乎处处收敛（**Rademacher-Меньшов 定理**）．（首先由 b) 推出 $s_{2^k}$ 所成的序列几乎处处收敛，然后利用 a) 证明，如果令 $\delta_k=\sup\limits_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}|s_n-s_{2^k}|$，则通项为 $\int\delta_k^2d\mu$ 的级数收敛．）

9) 假定测度 $\mu$ 有界，因而 $L^2(X,\mu)\subset L^1(X,\mu)$，此外还假定 $\mu(X)=1$．设 $U$ 是 $L^1$ 的一个范数小于或等于 1 的连续自同态("收缩")，使得它在 $L^2$ 上的限制也是一个收缩(换言之，在 $L^2$ 中，有 $N_2(U\cdot\tilde{f})\leqslant N_2(\tilde{f})$)．设 $P$ 是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U^k$$

的强极限(12.15 问题 12)，这是 $L^2$ 的一个自同态，使得 $P=PU=UP=P^2$，试证 $P$ 能连续扩张为 $L^1$ 的一个自同态，它满足同样的关系式，且对一切 $\tilde{f}\in L^1$ 有

$$P\cdot\tilde{f}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U^k\cdot\tilde{f}$$

(利用 $L^2$ 在 $L^1$ 内稠密与 $N_1(f)\leqslant N_2(f)$ 这一事实)．

10) 假定测度 $\mu$ 有界且 $\mu(X)=1$，$u$ 是 $X$ 到自身的 $\mu$ 可测映射，它使 $\mu$ 保持不变(13.9 问题 24)．这时，对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1(X,\mu)$，$U\cdot f=f\circ u$ 所属的类只依赖于 $f$ 所属的类，因而定义了 $L^1$ 的一个自同态，仍把它记作 $\tilde{f}\to U\cdot\tilde{f}$，它使得 $N_1(U\cdot\tilde{f})=N_1(\tilde{f})$．$U$ 在 $L^2$ 上的限制是 $L^2$ 上的酉算子．

a) 设 $P$ 是 $L^2$ 到它的在 $U$ 下为不变的向量所成的子空间上的正交投影，这里 $U$ 如问题 9 中所定义，试证对一切 $\tilde{f}\in L^2$ 有 $N_1(\tilde{f})^2\leqslant(\tilde{f}|P\cdot\tilde{f})$．

b) 试证对每个 $\tilde{f}\in L^1$ 与每个 $\varepsilon>0$，存在整数 $n$，使对一切正整数 $m$，有

$$N_1\left(P\cdot\tilde{f}-\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{m+n-1}U^k\cdot\tilde{f}\right)\leqslant\varepsilon.$$

c) 由此推断，对每个可测集 $A\subset X$ 与每个 $\varepsilon>0$，存在正整数 $n$，使对每个正整数 $m$，存在整数 $k$，满足条件 $m\leqslant k\leqslant m+n-1$，并且 $\mu(A\cap u^{-k}(A))\geqslant(\mu(A))^2-\varepsilon$（**Хинчин 统计常返性定理**）．

d) 对每个函数 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}$ 与整数 $n$，令

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k \cdot f,$$

试证极限

$$F_n(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} ((U^k \cdot f_n)(x) - (P \cdot f)(x))^2$$

几乎处处存在且有 $\lim_{n\to\infty}\int F_n d\mu = 0$，这里 $P \cdot f$ 表示属于类 $P \cdot \tilde{f}$ 的一个函数（利用 Birkhoff 遍历定理）.

e) 设 $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$，且几乎处处有 $f(x) \geqslant 0$，试证在几乎一切点 $x \in X$ 处，有 $f(x) = 0$ 或 $(P \cdot f)(x) > 0$（考虑使得 $(P \cdot f)(x)$ 没有定义或等于零的 $x \in X$ 所成的集 $N$）.

11) 设 $X$ 是可度量化的紧空间，$u$ 是 $X$ 到自身的同胚，$I$ 是 $X$ 上满足下述条件的非负测度所成的集：这些测度的总质量为 1，且在 $u$ 下不变；此时 $I$ 是 $M(X)$ 的一个非空粗疏紧子集（13.4 问题 8）. $x \in X$ 称为（关于 $u$ 的）**拟正则点**，如果当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，测度

$$\rho_{n,x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(\varepsilon_x)$$

组成的序列粗疏收敛（于一个测度 $\mu_x \in I$）. 我们把 $X$ 的拟正则点所成的集记作 $Q$. 点 $x \in Q$ 称为（关于 $u$ 的）**遍历点**，如果测度 $\mu_x$ 是遍历的（13.9 问题 13）；把这样的点组成的集记作 $E$. 点 $x \in Q$ 称为**稠密点**，如果 $x$ 属于 $\mu_x$ 的支集；把这样的点组成的集记作 $D$. $R = E \cap D$ 的点称为（关于 $u$ 的）**正则点**.

a) 试证 $R$ 的余集（从而 $Q$, $E$ 或 $D$ 的余集）关于任一不变测度 $\nu \in I$ 是可忽略的.（为证明对任一测度 $\nu \in I$，$Q$ 的测度均等于 1，应用 Birkhoff 遍历定理于在 $\mathscr{C}(X)$ 内稠密的一个序列中的函数上. 为证明 $D$ 的测度为 1，考虑 $X$ 的拓扑的一个可数基 $(U_n)$，且对于使得 $\bar{U}_m \subset U_n$ 的每对 $(m, n)$，考虑 $X$ 到 $[0, 1]$ 的连续映射 $g_{mn}$，使在 $U_m$ 上 $g_{mn}(x) = 1$ 而在 $X - U_n$ 上 $g_{mn}(x) = 0$；对每个这样的函数应用问题 10e）. 最后，为证明 $E$ 的测度为 1，应用问题 10d) 证明（使用与问题 10 相同的记号），对于一个测度 $\nu \in I$，

$$\int ((P \cdot f)(y) - P \cdot f(x))^2 d\mu_x(y) = 0$$

对几乎一切 $x$ 与一切 $f \in \mathscr{C}(X)$ 成立；取 $f$ 为在 $\mathscr{C}(X)$ 内稠密的一个序列中的各个函数.）

b) 试证，对于 $M(X)$ 上的粗疏拓扑，在（13.10）的意义下，对每个测度

$\nu \in I$，有

$$\nu = \int_R \mu_x d\nu(x),$$

且 $I$ 的端点关于 $u$ 是遍历测度（参阅 13.10 问题 9）.

c）对每个遍历测度 $\nu \in I$，设 $Q_\nu$（相应地，$R_\nu$）是使得 $\mu_x = \nu$ 的 $x \in Q$（相应地，$x \in R$）的集，则测度 $\nu$ 集中在 $R_\nu$ 上（13.18）；$Q_\nu$ 与 $R_\nu$ 分别称为对应于 $\nu$ 的**拟遍历集与遍历集**. 这些 $Q_\nu$（相应地，$R_\nu$）形成 $Q$（相应地，$R$）的一个划分，且有 $u(Q_\nu) = Q_\nu$，$u(R_\nu) = R_\nu$. 试证，对于每个使得 $u(F) = F$ 的闭集 $F$，有 $F \cap R_\nu = R_\nu$ 或 $F \cap R_\nu = \phi$.

d）试证，对于每个使得 $u(F) = F$ 的非空闭集 $F$，有 $R \cap F \neq \phi$（考虑对于 $u|F$ 为正则的那些点）.

e）设 $\mu$ 是由 $1_X$ 与 $u$ 生成的广群，试证对每个关于 $\mu$ 的极小闭轨道 $Z$（12.10 问题 6），有 $u(Z) = Z$，从而 $R \cap Z \neq \phi$. 由此推断，对每个 $x \in X$，$x$ 关于 $\mu$ 的闭轨道（同上面所引题号）$O(x)$ 与 $R$ 相交，并且 $O(x) \cap R$ 是遍历集 $R_\nu$ 的并.

f）对每个 $x \in X$，设 $\mu$ 是一个测度，它是 $M(X)$ 中的序列 $(\rho_{n,x})$ 的触值，试证 $\mu(O(x)) = 1$.

g）试证，为使测度 $\mu \in I$ 是遍历的，必须且只须存在遍历集 $R_\nu$，使得 $\mu(R_\nu) = 1$；此时还有 $\mu = \nu$（利用 b）证明所述条件是充分的）.

h）试证，如果 $x \in X$ 使得 $O(x)$ 只包含一个遍历集，则 $x$ 是一个遍历点（利用 f）与 g））.

i）假定 $I$ 只含有一个测度 $\nu_0$，则 $Q = X$，且 $R = D$ 是 $\nu_0$ 的支集（利用 b）），并且它是关于 $\mathscr{M}$ 的唯一的极小闭轨道. 此外，对每个函数 $f \in \mathscr{C}(X)$，数列 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u^k(x))\right)$ 对于 $x \in X$ 一致收敛于 $\int f d\nu_0$.（注意对每个 $n$，$X$ 到 $M(X)$ 的映射 $x \to \rho_{n,x}$ 关于粗疏拓扑是连续的，并利用（7.5.6）.）

12）对于每个实数 $p$（$0 < p < +\infty$）与 $X$ 到 $\bar{R}$ 的每个映射 $f$，令

$$N_p(f) = \left(\int^* |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

a）对 $p > 1$，令 $q = p/(p-1)$. 试证，对于 $X$ 到 $\bar{R}$ 的两个映射 $f$，$g$，有 $N_1(fg) \leqslant N_p(f)N_q(g)$（**Hölder 不等式**）.（证明使得 $t_1 \geqslant 0$，$t_2 \geqslant 0$ 与 $t_1^{1/p}t_2^{1/q} \geqslant 1$ 的点 $(t_1, t_2) \in R^2$ 所成的集是凸的，并且利用（13.5.6）作类似于 13.8 问题 14c）中所用的推理. 注意（13.11.2.2）的证明只是这个推理的特殊情形.）

b）试证，如果 $f \geqslant 0$，$g \geqslant 0$，$p > 1$，则 $N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g)$

(**Minkowski 不等式**). (考虑使得 $t_1\geqslant 0$, $t_2\geqslant 0$, $t_1^{1/p}+t_2^{1/p}\geqslant 1$ 的点 $(t_1, t_2)$ 所成的集,方法相同.)

c) 把(13.11)的结果推广到 $p$ 是满足 $1<p<+\infty$ 的任一实数的情形.

d) 假定 $p>1$, 设 $f\in\mathscr{L}_{R}^{p}$, $g\in\mathscr{L}_{R}^{q}$ 是两个非负函数,则为使

$$N_1(fg)=N_p(f)N_q(g)$$

成立,必须且只须存在两个常数 $\alpha>0$, $\beta>0$, 使得几乎处处有 $\alpha(f(x))^p=\beta(g(x))^q$.

e) 假定测度 $\mu$ 是有界的且 $\mu(X)=1$. 试证,对每个 $r>0$ 与每个使得 $f^r$ 为可积的非负可测函数 $f$, 映射 $p\to N_p(f)$ 在区间 $]0, r]$ 上是递增的(利用 Hölder 不等式). 当 $p\to 0$ 时,它的极限是 $\exp\left(\int^* \log|f|d\mu\right)$, 但当

$$\int^* \log|f|d\mu=-\infty$$

时,这个表达式应当用 0 代替. 如果这个极限 $\neq 0$, 则几乎处处有 $f(x)\neq 0$. 如果 $\exp\left(\int^* \log|f|d\mu\right)=\int|f|d\mu$, 则函数 $|f|$ 几乎处处等于常数.

f) 设 $f$ 是非负 $\mu$ 可测函数;对每个 $\alpha>0$, 设 $A_\alpha$ 是使得 $f(x)\geqslant\alpha$ 的 $x\in X$ 组成的集. 如果 $f\in\mathscr{L}_{C}^{p}$, 则 $\alpha^p\mu(A_\alpha)\leqslant\int f^p d\mu$. 反之,如果测度 $\mu$ 有界,并且存在两个常数 $C>0$, $\varepsilon>0$, 使得 $\mu(A_\alpha)\leqslant C\alpha^{-p-\varepsilon}$ 对一切 $\alpha>0$ 成立,则 $f\in\mathscr{L}_{C}^{p}$ (参阅 13.9 问题 3).

13) 设 $f$ 是 $R_+^*=]0, +\infty[$ 上的非负实值函数,它关于 Lebesgue 测度可测,且使得 $|f|^p$ 可积 $(1<p<\infty)$.

a) 函数 $f$ 在 $[0, +\infty[$ 的每个紧子集上可积;特别是,对每个 $x>0$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 有定义(利用 Hölder 不等式). 当 $x$ 趋于 0 或趋于 $+\infty$ 时,商 $F(x)/x^{(p-1)/p}$ 趋于 0 (用同样的方法).

b) 试证函数 $F(x)/x$ 在 $]0, +\infty[$ 上 $p$ 幂可积,且有 (**Hardy 不等式**)

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{+\infty}(f(x))^p dx.$$

(首先考虑 $f\in\mathscr{K}(R_+^*)$ 的情形;对每个紧区间 $[a, b]\subset R_+^*$, 利用分部积分法与 Hölder 不等式求出积分 $\int_a^b\left(\frac{F(t)}{t}\right)^p dt$ 的上界.)

14) 设 $p$ 是一个正数, $f$ 是满足下列条件的 $\mu$ 可测复值函数: 1° $|f|^p$ 是

$\mu$ 可积的；$2^\circ$ 对 $0<t<t_0$，$e^{t|f|}$ 是 $\mu$ 可积的．试证当 $t$ 趋于 0 时，

$$N_p(t^{-1}(e^{tf}-1)-f)$$

趋于 0．（设 $f=u+iv$，其中 $u$，$v$ 是实函数；注意如果令 $w_t=e^{tu}-1-tu$，则当 $0\leqslant s\leqslant t$ 时，有 $w_s/s\leqslant w_t/t$．如果 $0<p<1$，利用初等不等式

$$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p,$$

这里 $a$，$b$ 是非负的数．最后，应用（13.8.1）与（13.8.4）．）

15）设 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ 是严格递增的正整数列，$h$ 是有理整数．对每个正整数 $N$，令

$$f_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ih\lambda_n x},$$

试证级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1|f_{m^2}(x)|^2dx$$

收敛．另一方面，注意对于 $m^2\leqslant N<(m+1)^2$，我们有

$$\left|f_N(x)-\frac{m^2}{N}f_{m^2}(x)\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{N}},$$

并由此推断，对几乎一切（关于 Lebesgue 测度）$x\in[0,1]$，序列 $(f_N(x))_{N\geqslant 1}$ 收敛于 0．由此得到，对几乎一切 $x\in[0,1]$，$t_n=\lambda_n x-[\lambda_n x]$ 所成的序列关于 Lebesgue 测度是等度分配的（13.4 问题 7）．

16）设 $U$ 是空间 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1(X,\mu)$ 的一个范数 $\leqslant 1$（即使得 $N_1(U\cdot\tilde{f})\leqslant N_1(\tilde{f})$）的连续自同态，且使得关系 $\tilde{f}\geqslant 0$ 蕴涵 $U\cdot\tilde{f}\geqslant 0$（13.6）．对属于类 $\tilde{f}$ 的每个函数 $f$，以 $U\cdot f$ 表示属于类 $U\cdot\tilde{f}$ 的一个函数．

a）设 $(f_n)$ 是由属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 的函数组成的序列，它几乎处处收敛于函数 $f$，并且存在函数 $h\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$，使对一切 $n$，有 $|f_n|\leqslant h$．试证在这些条件下，序列 $(U\cdot f_n)$ 几乎处处收敛于 $U\cdot f$（可以只限于 $f=0$ 的情形；并考虑函数 $g_n=\sup\limits_p|f_{n+p}|$ 所成的序列）．

b）对每个实数有限序列 $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$，令

$$s_n(t_1,\cdots,t_n)=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}(t_1+\cdots+t_k)^+.$$

如果 $s_n(t_1,\cdots,t_n)>0$，则也有 $s_n(t_1,\cdots,t_n)=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_1+\cdots+t_k)$．试证，如果 $s_n(t_1,\cdots,t_n)>0$，则对每个 $t_{n+1}\in\boldsymbol{R}$，有

(1) $$t_1+s_n(t_2,\cdots,t_{n+1})\geqslant s_n(t_1,\cdots,t_n).$$

c）对每个函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$，试证几乎处处有

$$s_n(U \cdot f, \cdots, U^{n+1} \cdot f) \leqslant U \cdot s_n(f, \cdots, U^n \cdot f).$$

(利用 1) 与下述事实：对于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 中的 $n$ 个函数 $f_1, \cdots, f_n$，几乎处处有

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} U \cdot f_k \leqslant U \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k. \ )$$

d) 设 $E(f)$ 是满足下述条件的 $x \in X$ 组成的可测集：存在正整数 $n$，使得 $f(x) + (U \cdot f)(x) + \cdots + (U^{n-1} \cdot f)(x) > 0$. 试证

$$\int_{E(f)} f d\mu \geqslant 0$$

(**E. Hopf 极大遍历定理**). (对正整数 $n$，设 $E_n(f)$ 是满足下述条件的 $x$ 组成的集：对某个整数 $k$，$0 \leqslant k \leqslant n-1$，有 $f(x)+(U \cdot f)(x) + \cdots + (U^k \cdot f)(x) > 0$，利用 c) 证明 $\int_{E_n(f)} f d\mu \geqslant 0$. ) 由此推出 13.9 问题 12 中的极大遍历定理.

17) 假定 $U$ 满足问题 16 的条件，此外还假定，对每个 $t>0$，关系

$$|f(x)| \leqslant t$$

在 $X$ 上几乎处处成立蕴涵 $|(U \cdot f)(x)| \leqslant t$ 几乎处处成立. 当 $\mu$ 为有界且对于常数 $c$ 恒有 $U \cdot c = c$ 时，这些条件必满足

a) 试证，对每个函数 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 与每个 $t>0$，几乎处处有

$$(1) \qquad (U \cdot f - t)^+ \leqslant U \cdot (f - t)^+.$$

(考虑这样的函数：当 $|f(x)| \leqslant t$ 时等于 $f$，当 $f(x) > t$ 时等于 $t$，而当 $f(x) < -t$ 时等于 $-t$.)

b) 试证，对每个函数 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1 \cap \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^\infty$，函数 $U \cdot f$ 属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$，且有

$$N_p(U \cdot f) \leqslant N_p(f).$$

(由 (13.21.9) 推出，对 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1 \cap \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^\infty$，函数 $(x,t) \to t^{p-2}(f(x) - t)^+$ 关于 $\mu$ 与 $]0, +\infty[$ 上 Lebesgue 测度的乘积测度是可积的，并且有积分不等式

$$t^{p-2}(U \cdot f - t)^+ \leqslant t^{p-2}(f - t)^+. \ )$$

由此推出 $U$ 可延拓为每个 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p$ 空间的范数不大于 1 的自同态(仍把它记作 $U$).

c) 设对某个 $p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$，$f$ 是属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p$ 的函数. 对每个 $t > 0$ 与每个非负整数 $n$，以 $E_{n,t}(f)$ 表示使得

$$f(x) + (U \cdot f)(x) + \cdots + (U^{n-1} \cdot f)(x) > nt$$

的 $x \in X$ 组成的集，以 $E_t(f)$ 表示这些 $E_{n,t}(f)$ 的并，试证各个 $E_{n,t}(f)$ 均可积且

$$\int_{E_{n,t}(f)} (f - t) d\mu \geqslant 0.$$

(注意 $E_{n,t}(f)$ 包含在满足下述条件的 $x\in X$ 组成的集内：对于 $0\leqslant k\leqslant n-1$，$n$ 个关系 $(U^k\cdot f)(x)>t$ 中有一成立；然后作类似于问题 16 的推理，为此注意几乎处处有

$$(U\cdot f+U^2\cdot f+\cdots+U^{k+1}\cdot f-(k+1)t)^+$$
$$\leqslant U\cdot(f+U\cdot f+\cdots+U^k\cdot f-(k+1)t)^+.)$$

d) 若 $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$，由 c) 推断，对每个 $t>0$，有

$$\mu(E_t(f))\leqslant\frac{1}{t}N_1(f).$$

18) 假定 $U$ 满足问题 16 的条件，设 $f$，$g$ 是属于 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$ 的两个非负函数.

a) 设 $\varepsilon$ 是一个正数，$A_n$ 是使得

$$(U^n\cdot f)(x)>\varepsilon(g(x)+(U\cdot g)(x)+\cdots+(U^n\cdot g)(x))$$

的 $x\in X$ 组成的集，试证级数 $\varphi_{A_1}g+\varphi_{A_2}g+\cdots+\varphi_{A_n}g+\cdots$ 几乎处处收敛.（注意，几乎处处有

$$\varphi_{A_n}g+\left(U^n\cdot f-\sum_{k=0}^{n}U^k\cdot g\right)^+\leqslant U\cdot\left(U^{n-1}\cdot f-\sum_{k=0}^{n-1}U^k\cdot g\right)^+,$$

积分此不等式的两边并借助 (13.8.5) 得到所需的结论.)

b) 设 $B$ 是满足下述条件的 $x\in X$ 组成的可测集：至少对一个非负整数 $n$，有 $(U^n\cdot g)(x)>0$. 试证函数

$$U^n\cdot f/(g+U\cdot g+\cdots+U^n\cdot g)$$

所成的序列在 $B$ 内几乎处处趋于 0.（由 a) 推断 $\bigcap\limits_n A_n$ 与使得 $g(x)>0$ 的 $x$ 的集的交是可忽略的，连续地用 $U^m\cdot g$ 与 $U^m\cdot f(m\geqslant1)$ 代替 $g$ 与 $f$ 以得到所需的结论.)

c) 设 $B_0$ 是使得 $g(x)>0$ 的 $x\in X$ 组成的可测集. 对每个 $x\in B_0$，令

$$R_n(f,g)(x)=\frac{f(x)+(U\cdot f)(x)+\cdots+(U^{n-1}\cdot f)(x)}{g(x)+(U\cdot g)(x)+\cdots+(U^{n-1}\cdot g)(x)},$$

$R^*(f,g)=\sup\limits_n|R_n(f,g)|$. 试证，对几乎一切 $x\in B_0$，有 $R^*(f,g)(x)<+\infty$.（对每个 $t>0$，设 $A_t$ 是使得 $R^*(f,g)(x)>t$ 的 $x\in B_0$ 的集，把问题 16d) 应用于 $|f|-tg$ 以证明 $t\int_{A_t}g\,d\mu\leqslant N_1(f)$.)

d) 设 $\Phi$ 是属于 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$ 的函数，使对一切 $x\in X$ 有 $\Phi(x)>0$（参阅 (13.15.7)）. 试证使得

$$\Phi(x)+(U\cdot\Phi)(x)+\cdots+(U^n\cdot\Phi)(x)+\cdots=+\infty$$

的 $x\in X$ 组成的集 $X_\infty$ 不依赖于 $\Phi$ 的选取而只依赖于 $U$.

若对每个 $x \in X$，令 $G_n(x) = \Phi(x) + (U \cdot \Phi)(x) + \cdots + (U^{n-1} \cdot \Phi)(x)$，$G(x) = \lim\limits_{n\to\infty} G_n(x)$（因而在 $X_\infty$ 上 $G(x) = +\infty$），试证对每个可积集 $A \subset X_\infty$，$t \cdot (U \cdot \varphi_A) \leqslant G$ 对一切 $t > 0$ 成立，因而函数 $U \cdot \varphi_A$ 在 $X_0 = \complement X_\infty$ 上几乎处处为零.（注意，若 $A_n$ 是使得 $G_n(x) > t$ 的 $x \in A$ 的集，则 $t \cdot \varphi_{A_n} \leqslant G_n$.）

## 12. $L^\infty$ 空 间

给定 $X$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的映射 $f$，我们把使得 $f(x) \leqslant a$（相应地，$f(x) \geqslant a$）关于 $\mu$ 几乎处处成立的实数 $a$ 的下确界（相应地，上确界）称为 $f$ 在 $X$ 上（关于测度 $\mu$）的**依测度最大值**（相应地，**依测度最小值**），记作 $M_\infty(f)$，$\text{ess.sup}\, f$ 或 $\underset{x\in X}{\text{ess.sup}}\, f(x)$（相应地，$m_\infty(f)$，$\text{ess.inf}\, f$ 或 $\underset{x\in X}{\text{ess.inf}}\, f(x)$）。由定义立即得到 $m_\infty(f) = -M_\infty(-f)$.

设 $M_\infty(f) < +\infty$，则对每个 $a > M_\infty(f)$，使得 $f(x) > a$ 的 $x \in X$ 的集是可忽略的；而使得 $f(x) > M_\infty(f)$ 的 $x \in X$ 的集是使 $f(x) > r_n$ 的 $x$ 组成的集的并，这里 $(r_n)$ 是趋于 $M_\infty(f)$ 的一个递减序列. 因而我们看到 (13.6.2)，在 $X$ 上几乎处处有

$$m_\infty(f) \leqslant f(x) \leqslant M_\infty(f).$$

由此推出，若 $\mu \neq 0$，则 $m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f)$（若 $\mu = 0$，则有

$$m_\infty(f) = +\infty, \quad M_\infty(f) = -\infty).$$

当 $\mu \neq 0$ 时，关系式 $m_\infty(f) = M_\infty(f)$ 相当于 $f$ 与一个常数等价. 此外，在 $\mu \neq 0$ 的情形，我们有

$$\inf_{x\in X} f(x) \leqslant \underset{x\in X}{\text{ess.inf}}\, f(x) \leqslant \underset{x\in X}{\text{ess.sup}}\, f(x) \leqslant \sup_{x\in X} f(x).$$

若两个函数 $f$，$g$ 等价，则有

$$m_\infty(f) = m_\infty(g), \quad M_\infty(f) = M_\infty(g).$$

这就使我们能当 $f$ 仅在 $X$ 上几乎处处有定义时定义 $m_\infty(f)$ 与 $M_\infty(f)$，即定义它们为类 $\tilde{f}$ 中任意一个处处有定义的函数 $g$ 的 $m_\infty(g)$ 与 $M_\infty(g)$ 的值.

若 $f$、$g$ 是使得 $f + g$ 几乎处处有定义的两个函数，则由定义立即得到，当 $M_\infty(f) + M_\infty(g)$ 有定义时，有

(13.12.1) $$M_\infty(f+g) \leqslant M_\infty(f) + M_\infty(g).$$
同样地，如果 $f$ 与 $g$ 是两个非负函数，则在（13.11）中关于乘积的约定下，恒有
$$M_\infty(fg) \leqslant M_\infty(f)M_\infty(g).$$
几乎处处有定义的取值于 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 中的函数 $f$ 称为（关于 $\mu$）**依测度有界的**或**本性有界的**，如果
$$M_\infty(|f|) < +\infty;$$
此时 $f$ 必定几乎处处有限．有界函数必是依测度有界的．

**(13.12.2)** （**平均值不等式**）设 $f$ 是 $X$ 到 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 的可测且依测度有界映射，则对每个非负可积函数 $g$，函数 $fg$（它几乎处处有定义且有限）是可积的，且有

(13.12.2.1) $$m_\infty(f)\int gd\mu \leqslant \int fgd\mu \leqslant M_\infty(f)\int gd\mu.$$
此外，只当在使得 $g(x) \neq 0$ 的 $x \in X$ 所成的（可测）集 $S$ 上几乎处处有 $f(x) = M_\infty(f)$ 或几乎处处有 $f(x) = m_\infty(f)$ 时，(13.12.2.1) 中的后两项或前两项才能相等．

我们知道 $fg$ 是可测的（13.9.8.1），并且不等式 $m_\infty(f)g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_\infty(f)g(x)$ 几乎处处成立，因而 $fg$ 可积（13.9.13）且有不等式(13.12.2.1)．另一方面，函数 $M_\infty(f)g - fg$ 几乎处处有定义且等于 $(M_\infty(f) - f)g$，因而它在 $X$ 上几乎处处非负，所以仅当 $(M_\infty(f) - f)g$ 为可忽略时，才有关系式
$$\int (M_\infty(f) - f)gd\mu = 0.$$
这就完成了证明．

特别是，对任意可积集 $A$，有

(13.12.2.2) $$m_\infty(f)\mu(A) \leqslant \int_A fd\mu \leqslant M_\infty(f)\mu(A).$$
对取值于 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 中的任一映射 $f$，若 $\mu \neq 0$，令
$$N_\infty(f) = M_\infty(|f|),$$
若 $\mu = 0$，令 $N_\infty(f) = 0$．根据(13.12.1)，定义于 $X$ 上的可测且满足 $N_\infty(f) < +\infty$ 的有限实值（相应地，复值）函数 $f$ 组成的集

$\mathscr{L}_{R}^{\infty}(X,\mu)$（相应地，$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(X,\mu)$）是一个实（相应地，复）向量空间，而且 $N_\infty$ 是这个空间上的一个半范数．$\mathscr{L}_{R}^{\infty}(X,\mu)$（相应地，$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(X,\mu)$）也记作 $\mathscr{L}_{R}^{\infty}(\mu)$ 或 $\mathscr{L}_{R}^{\infty}$（相应地，$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(\mu)$ 或 $\mathscr{L}_{C}^{\infty}$）．使得 $N_\infty(f)=0$ 的函数 $f$ 的集还是可忽略函数所成的向量子空间 $\mathscr{N}$；因而 $\mathscr{L}_{R}^{\infty}(X,\mu)$（相应地，$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(X,\mu)$）对于这个子空间的商空间是依测度有界的可测函数的等价类 $\tilde{f}$ 所成的空间，我们把它记作 $L_{R}^{\infty}(X,\mu)$，或简记作 $L_{R}^{\infty}(\mu)$，$L_{R}^{\infty}$（相应地，记作 $L_{C}^{\infty}(X,\mu)$，或简记作 $L_{C}^{\infty}(\mu)$，$L_{C}^{\infty}$）．对属于同一个类 $\tilde{f}\in L_{R}^{\infty}$（相应地，$\tilde{f}\in L_{C}^{\infty}$）的所有函数 $f$，数 $N_\infty(f)$ 都相同，把它记作 $N_\infty(\tilde{f})$，而 $\tilde{f}\to N_\infty(\tilde{f})$ 就是 $L_{R}^{\infty}$（相应地，$L_{C}^{\infty}$）上的一个范数．显然有

$$L_{C}^{\infty}=L_{R}^{\infty}\oplus iL_{R}^{\infty}.$$

**(13.12.3)** 为使 $\mathscr{L}_{R}^{\infty}$（相应地，$\mathscr{L}_{C}^{\infty}$）中的序列 $(f_n)$ 收敛于 $f$，必须且只须在一个可忽略集的余集上，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$．

所述条件显然是充分的．反之，若

$$\lim_{n\to\infty}N_\infty(f-f_n)=0,$$

则对每个整数 $m$，都存在可忽略集 $H_m$ 与整数 $n_0$，使得对于一切 $n\geqslant n_0$，不等式 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant 1/m$ 对所有 $x\in \complement H_m$ 成立．这些 $H_m$ 的并 $H$ 是可忽略的，而序列 $(f_n(x))$ 在 $\complement H$ 上一致收敛于 $f(x)$．

**(13.12.4)** 赋范空间 $L_{R}^{\infty}(X,\mu)$（相应地，$L_{C}^{\infty}(X,\mu)$）是完备的（换言之，它是 Banach 空间）．

事实上，设 $(f_n)$ 是一个序列，它使得 $(\tilde{f}_n)$ 是 $L_{R}^{\infty}$（相应地，$L_{C}^{\infty}$）中的 Cauchy 序列．对每个正整数 $n$，存在整数 $k_n$，使对 $r\geqslant k_n$ 与 $s\geqslant k_n$，有 $N_\infty(f_r-f_s)\leqslant 1/n$．对满足 $r\geqslant k_n$ 与 $s\geqslant k_n$ 的每个数偶 $(r,s)$，设 $A_{rsn}$ 是使得

$$|f_r(x)-f_s(x)|>1/n$$

的 $x\in X$ 组成的集，$A$ 是集 $A_{rsn}$ $(n\geqslant 1, r\geqslant k_n, s\geqslant k_n)$ 的并，它是一个可忽略集．显见在 $X-A$ 上，序列 $(f_n(x))$ 一致收敛于极限 $f(x)$．几乎处处有定义的函数 $f$ 是可测的 (13.9.10) 且在 $X-$

$A$ 上有界，因而 $\tilde{f} \in L_R^\infty$（相应地，$\tilde{f} \in L_C^\infty$），而且显然当 $r \geqslant k_n$ 时，有 $N_\infty(f-f_r) \leqslant 1/n$，故 $\tilde{f}$ 是 $(\tilde{f}_n)$ 的极限.

**(13.12.5)** 设 $f \in \mathscr{L}_C^p(X,\mu)$（其中 $p=1$ 或 2），$g \in \mathscr{L}_C^\infty(X,\mu)$，则 $fg \in \mathscr{L}_C^p(X,\mu)$ 且 $N_p(fg) \leqslant N_p(f)N_\infty(g)$.

事实上，$fg$ 是可测的(13.9.8.1)，并且几乎处处有 $|f(x)g(x)| \leqslant |f(x)|N_\infty(g)$，由此即得所述命题.

**(13.12.6)** 附注. 显然，我们有 $\mathscr{C}_R^\infty(X) \subset \mathscr{L}_R^\infty(X,\mu)$. 然而一般地说，$\mathscr{C}_R^\infty(X)$ 在 $L_R^\infty(X,\mu)$ 内的典则象在赋范空间 $L_R^\infty(X,\mu)$ 内不是处处稠密的，而且空间 $L_R^\infty(X,\mu)$ 一般是不可分的(问题1).

## 问　　题

1) 设 $\lambda$ 是 Lebesgue 测度，试证 $L_R^\infty(R,\lambda)$ 不是可分的(设 $(A_n)$ 是两两不相交的不可忽略的可测集的一个无穷序列，考虑在每个 $A_n$ 上都取常值且只取值 $\pm 1$ 的函数).

2) a) 对 $X$ 的每个 $\mu$ 可积子集 $A$ 与每个数 $\delta>0$，以 $V(A,\delta)$ 表示满足下述条件的 $\mu$ 可测实值函数 $f$ 所成的集：使得 $|f(x)|>\delta$ 的点 $x\in A$ 的集 $M$ 满足 $\mu(M)\leqslant\delta$. 试证，在 $\mu$ 可测（有限）实值函数所成的实向量空间 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 上，集 $V(A,\delta)$ 形成 0 关于一个协调于该向量空间结构的拓扑的基本邻域系(12.14 问题 1)；我们把这个拓扑称为(关于 $\mu$ 的)**依测度收敛拓扑**，而把关于这个拓扑趋于极限 $f$ 的序列 $(f_n)$ 称为**依测度收敛**于 $f$.

b) 试证这些邻域 $V(A,\delta)$ 的交是由可忽略函数组成的子空间 $\mathscr{N}$，且商空间 $S(X,\mu)=\mathscr{S}(X,\mu)/\mathscr{N}$ 是可度量化的.

c) 试证，如果 $(f_n)$ 是 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 中的任一序列，它使得 $(\tilde{f}_n)$ 是 $S(X,\mu)$ 中的 Cauchy 序列(12.9)，则存在子序列 $(f_{n_k})$，使得序列 $(f_{n_k}(x))$ 对几乎一切 $x\in X$ 收敛. 由此推断可度量化向量空间 $S(X,\mu)$ 是完备的.

d) 几乎处处趋于函数 $f$ 的可测实值函数序列 $(f_n)$ 依测度收敛于 $f$.

e) 试证，对每个有限数 $p\geqslant 1$，空间 $\mathscr{L}_R^p(X,\mu)$ 在 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 内是处处稠密的，且依测度收敛拓扑在 $\mathscr{L}_R^p(X,\mu)$ 上的诱导拓扑粗于由半范数 $N_p$ 所定义的拓扑.

f) 假定 $X$ 是紧的，而测度 $\mu$ 是扩散的(13.18)，试证对 0 在 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 内的每个邻域 $V$ 与函数 $f\in\mathscr{S}(X,\mu)$，存在整数 $n$，使得所有函数 $af$($a$ 是任意实数)

属于 $V+V+\cdots+V$($n$ 项). 由此推断 $\mathscr{S}(X,\mu)$上的任何连续线性形式都恒等于零,因而 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 内每个余维数为有限的向量子空间在 $\mathscr{S}(X,\mu)$ 内是处处稠密的.

3) 假定 $X$ 是紧的而测度 $\mu$ 是扩散的(13.18).

a) 设 $(\tilde{f}_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $L^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 的一个 Hilbert 基,试证,对于每个 $\delta>0$,存在 $X$ 的紧子集 $Y$, 使得 $\mu(X-Y)\leqslant\delta$, 并且 $(\tilde{f}_n)_{n\geqslant 2}$ 在 $L^2_{\mathbf{R}}(Y,\mu_Y)$ 内是全序列. (利用问题 2c)与 2f) 证明,存在由 $f_n$(指标 $n\geqslant 2$) 的线性组合组成的序列,它依测度收敛于 $f_1$,然后利用问题 2c)与 Егоров 定理.)

b) 试证.存在可测且有界函数 $h$, 使得 $(\widetilde{hf}_n)_{n\geqslant 2}$ 在 $L^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 内是全序列. (选取 $h>0$, 使得 $f_1/h$ 不属于 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$, 然后证明任何不可忽略的函数都不可能与所有 $hf_n$($n\geqslant 2$)正交.)

4) 设 $p$ 是不小于 1 的有限数, $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 的子集 $H$ 称为**等度可积集**,如果对每个 $\varepsilon>0$,存在:1° $X$ 的紧子集 $K$,使对一切 $f\in H$,有$\int_{X-K}|f|^p d\mu\leqslant\varepsilon$; 2°数 $\delta>0$,使对一切满足 $\mu(A)\leqslant\delta$ 的可积集 $A$,不等式 $\int_A|f|^p d\mu\leqslant\varepsilon$ 对一切 $f\in H$ 成立.

a) 试证在等度可积集 $H$ 上,依测度收敛拓扑与由半范数 $N_p$ 所定义的拓扑是相同的. 如果只假定 $H$在 $\mathscr{L}^p$ 内有界,同样的结论是否成立?

b) 为使 $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 中的序列 $(f_n)$ 收敛, 必须且只须它是等度可积且依测度收敛的.

c) 假定测度 $\mu$ 有界且 $\mu(X)=1$. 设 $(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}$ 中的函数序列且假定

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int|\mathscr{R}f_n|d\mu=1,\ \lim_{n\to\infty}N_1(1-|f_n|)=0,$$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int|\mathscr{I}f_n|d\mu=0$ (利用 b)).

d) 设加予 $\mu$ 的假定与 c)中相同,$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}$ 中的函数序列,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu=\lim_{n\to\infty}\int|f_n|^{1/2}d\mu=1.$$

试证在这些条件下,有 $\lim\limits_{n\to\infty}N_1(1-f_n)=0$. (利用 Cauchy-Schwarz 不等式,归结为 c)中所考虑的情形. 写

$$|1-f_n|\leqslant|1-|f_n||+||f_n|-f_n|$$

与

$$|1-|f_n||=|1-|f_n|^{1/2}|\cdot|1+|f_n|^{1/2}|.)$$

5) 设 $F$ 是在$\mathbf{R}$上以 1 为周期的实值函数,且在$I=[0,1]$上关于Lebesgue

测度可积

a) 试证对 $[0,1]$ 上任一有界可测函数 $f$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)F(nt)dt = \left(\int_0^1 F(t)dt\right)\left(\int_0^1 f(t)dt\right).$$

进而如果 $F$ 在 $[0,1]$ 上还是有界的，则上述关系式对 $[0,1]$ 上任一可积函数 $f$ 都成立。(从 $F$ 为有界的情形开始；首先考虑 $f$ 在 $[0, 1]$ 上连续的情形，然后用连续函数逼近 $\mathscr{L}^1$ 中的 $f$。当 $F$ 无界时，归结为 $F$ 非负的情形，并用有界函数的递增序列逼近 $F$.)

b) 由 a) 推出，对于每个在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[a,b]$ 上可积的函数 $f$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos nt dt = 0.$$

c) 设 $\varphi$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上的典则映射，$\mu$ 是 $\boldsymbol{T}$ 上的测度，它是 $I$ 上的 Lebesgue 测度在 $\varphi|I$ 下的象，则 $\mu$ 在紧群 $\boldsymbol{T}$ 中的平移下是不变的（参阅 (14.4)）。对每个正整数 $k$，设 $u$ 是 $\boldsymbol{T}$ 到自身的连续映射，使对 $t\in I$ 有 $u(\varphi(t)) = \varphi(kt)$，则 $u$ 不是单射，但测度 $\mu$ 在映射 $u$ 下是不变的。由 a) 推断 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的(利用13.9问题 13 b))。由此推断 $\limsup\limits_{n\to\infty} F(k^n t)$ 几乎处处等于常数 $\operatorname{ess.sup}\limits_{t\in I} F(t)$，而且同样的结论对 $\sup\limits_{n\geqslant 1} F(nt)$ 也成立.

6) 设 $f$ 是属于 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{C}}^1(\mu)$ 的函数。试证，为使 $\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu$ 成立，必须且只须存在绝对值为 1 的常数 $c$，使得 $f(x) = c|f(x)|$ 几乎处处成立.

7) 假定 $\mu$ 有界且 $\mu(X) = 1$，设 $f$ 是属于 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{C}}^1$ 的函数。试证，如果对每个复数 $\zeta$ 有 $\int |1 + \zeta f| d\mu \geqslant 1$，则 $\int f d\mu = 0$。(对于固定的 $\zeta$，考虑 $(1/t)(|1 + t\zeta f| - 1)$ 当 $t$ 取正值趋于 0 时的极限.)

8) a) 若 $1\leqslant p < r < +\infty$，则 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty\subset L_{\boldsymbol{C}}^p\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$，$L_{\boldsymbol{R}}^r\cap L_{\boldsymbol{R}}^\infty\subset L_{\boldsymbol{R}}^p\cap L_{\boldsymbol{R}}^\infty$。在 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 上，函数 $N_{r,\infty} = N_r + N_\infty$ 是一个范数，空间 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 关于这个范数是完备的。举出 $N_{p,\infty}$ 在 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 上所诱导的范数不等价于 $N_{r,\infty}$ 的例子(在 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 上，恒有 $N_{r,\infty}(\tilde{f})\leqslant 2N_{p,\infty}(\tilde{f})$)。对于13.6中所定义的乘积 $\tilde{f}\tilde{g}$，$L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 是一个 Banach 代数；只当 $\mu$ 有界时，$L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 才有单位元（在这种情形下它恒等于 $L_{\boldsymbol{C}}^\infty$).

b) 代数 $L_{\boldsymbol{C}}^r\cap L_{\boldsymbol{C}}^\infty$ 中的幂等元所成的集 $I(X,\mu)$ (或 $I(\mu)$) 不依赖于 $r$，且形成类 $\tilde{\varphi}_A$，这里 $A$ 取遍 $X$ 的可积子集所成的集。对 $X$ 的两个可积子集 $A$ 与 $B$，$\tilde{\varphi}_A = \tilde{\varphi}_B$ 意味着集 $D(A,B) = A\cup B - A\cap B$ (13.8问题 15)是可忽略的；关系 $\mu(D(A,B)) = 0$ 是 $X$ 的可积子集所成的集上的一个等价关系，且这个

集对于此等价关系的商集等同于 $I(X,\mu)$. 我们也把 $\tilde{\varphi}_A$ 写作 $\tilde{A}$. 所有范数 $N_{p,\infty}$ 在 $I(X,\mu)$ 上诱导出相同的拓扑，因而它由距离 $d(\tilde{A},\tilde{B})=N_1(\varphi_A-\varphi_B)=\mu(D(A,B))$ 定义，$I(X,\mu)$ 关于这个拓扑是完备空间，映射

$$(\tilde{A},\tilde{B})\to\sup(\tilde{A},\tilde{B})=(A\cup B)^{\sim}$$

与

$$(\tilde{A},\tilde{B})\to\inf(\tilde{A},\tilde{B})=(A\cap B)^{\sim}$$

关于这个拓扑是连续的.

c) 设 $Y$ 是另一个局部紧空间，$\nu$ 是 $Y$ 上的正测度，如果存在 $I(X,\mu)$ 到 $I(Y,\nu)$ 上的等距 $U$，使得 $U(\tilde{\phi})=\tilde{\phi}$，则测度 $\mu$ 与 $\nu$ 称为**等距的**. 此时对满足 $1\leqslant p<+\infty$ 的每个数 $p$，存在 $L^p_C(X,\mu)$ 到 $L^p_C(Y,\nu)$ 上的唯一的线性等距 $U_p$，它是 $U$ 的延拓. (证明 $U$ 能唯一地延拓为 $E(X,\mu)$ 到 $E(Y,\nu)$ 上的线性双射，这里 $E(X,\mu)$ 是 $X$ 上的 $\mu$ 可积阶梯函数的类所成的空间，而 $E(Y,\nu)$ 是 $Y$ 上的 $\nu$ 可积阶梯函数的类所成的空间. 为证明这一点，首先，若 $\inf(\tilde{A},\tilde{B})=\tilde{\phi}$，则也有 $\inf(U(\tilde{A}),U(\tilde{B}))=\tilde{\phi}$ 与 $U(\sup(\tilde{A},\tilde{B}))=\sup(U(\tilde{A}),U(\tilde{B}))$；然后由此推断，若 $\tilde{A}\leqslant\tilde{B}$，则有 $U(\tilde{A})\leqslant U(\tilde{B})$；最后，对任意的 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，有

$$U(\inf(\tilde{A},\tilde{B}))=\inf(U(\tilde{A}),U(\tilde{B})),\ U(\sup(\tilde{A},\tilde{B}))=\sup(U(\tilde{A}),U(\tilde{B})).$$

注意，对于 $\tilde{f}\in E(X,\mu)$，有 $N_p(U(\tilde{f}))=N_p(\tilde{f})$. ) 试证 $L^p_C(X,\mu)\cap L^\infty_C(X,\mu)$ 在 $U_p$ 下的象是 $L^p_C(Y,\nu)\cap L^\infty_C(Y,\nu)$，且 $U_p$ 在 $L^p_C(X,\mu)\cap L^\infty_C(X,\mu)$ 上的限制是一个 Banach 代数同构.

d) 反之，对于满足 $1\leqslant p<+\infty$ 的 $p$，设 $V$ 是 $L^p_C(X,\mu)$ 到 $L^p_C(Y,\nu)$ 上的线性等距，使得 $V$ 在 $L^p_C(X,\mu)\cap L^\infty_C(X,\mu)$ 上的限制是到 $L^p_C(Y,\nu)\cap L^\infty_C(Y,\nu)$ 上的一个代数同构，则 $V$ 在 $I(X,\mu)$ 上的限制是到 $I(Y,\nu)$ 上的把 $\tilde{\phi}$ 变换为 $\tilde{\phi}$ 的同构.

9) 设 $X$ 是紧空间，$\mu(X)=1$. 又设 $\mathfrak{T}$ 是 $X$ 的可积子集所成的一个集. 满足：关系 $A\in\mathfrak{T}$ 与 $B\in\mathfrak{T}$ 蕴涵 $X-A\in\mathfrak{T}$ 与 $A\cap B\in\mathfrak{T}$. 此外还假定，当 $A$ 取遍 $\mathfrak{T}$ 时，类 $\tilde{A}$ 所成的集在度量空间 $I(X,\mu)$ (问题8)内稠密.

a) 设 $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 $X$ 的一个有限划分，其中 $C_j$ 是 $\mu$ 可积集. 试证，对每个 $\varepsilon>0$，存在由属于 $\mathfrak{T}$ 的集所构成的划分 $(A_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$，使对 $1\leqslant j\leqslant n$，有 $\mu(D(C_j,A_j))\leqslant\varepsilon$. (注意，如果对 $1\leqslant j\leqslant n-1$ 有

$$\mu(D(C_j,B_j))\leqslant\delta,$$

则对 $1\leqslant j\leqslant k<n-1$ 有 $\mu(B_j\cap B_k)\leqslant2\delta$；令 $N$ 是 $B_j\cap B_k$ (1$\leqslant j\leqslant k<$

$n-1$) 的并，考虑集 $A_j = B_j - N(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 与 $A_n = X - \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$.)

b) 由 a) 推断，对 $X$ 的每个有限划分 $\gamma = (C_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$（这里 $C_i$ 都是可积集）与每个 $\varepsilon > 0$，存在由属于 $\mathfrak{T}$ 的集所成的有限划分 $\alpha = (A_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$，使得

$$H(\alpha/\gamma) + H(\gamma/\alpha) \leqslant \varepsilon$$

（这里使用了 13.9 问题 27 中的记号）.（归结为所有 $C_i$ 都不可忽略的情形并利用函数 $t \to t\log t$ 在点 $t=1$ 处等于零且连续这个真实.）

10) 设 $X$ 是紧空间，$\mu(X) = 1$，$u$ 是 $X$ 到自身的 $\mu$ 可测映射且满足 $u(\mu) = \mu$.

a) 设 $\alpha$ 是 $X$ 分解为可积集的一个有限划分，$\mathfrak{T}$ 是由 $X$ 的属于划分 $\bigvee_{j=1}^{n} u^{-j}(\alpha)$ 之一的子集的有限并所成的集，并假定当 $A$ 取遍 $\mathfrak{T}$ 时类 $\tilde{A}$ 的集在 $I(X,\mu)$（问题 8）内稠密，试证 $h(u) = h(u,\alpha)$.（只须证明，对 $X$ 分解为可积集的任一有限划分 $\beta$，有 $h(u,\beta) \leqslant h(u,\alpha)$. 注意 $h(u,\beta) \leqslant h(u, \bigvee_{j=0}^{n} u^{-j}(\alpha)) + H\left(\beta/\bigvee_{j=0}^{n} u^{-j}(\alpha)\right)$，然后利用 13.9 问题 28 d) 与上面的问题 9.）

b) 在 a) 的假定下，试证，如果再设 $u$ 是双射且 $u^{-1}$ 是 $\mu$ 可测的，则 $h(u) = 0$.（注意当 $A$ 取遍 $\mathfrak{T}$ 时，类 $(u^{-1}(A))^{\sim}$ 所成的集仍在 $I(X,\mu)$ 内稠密，同时利用 13.9 问题 28 c).）

c) 假定 $u$ 是双射且 $u^{-1}$ 是 $\mu$ 可测的，令 $\mathfrak{T}'$ 是 $X$ 的属于划分 $\bigvee_{j=-n}^{n} u^{j}(\alpha)$ 之一的子集的有限并所成的集，并假定当 $A$ 取遍 $\mathfrak{T}'$ 时类 $\tilde{A}$ 所成的集在 $I(X,\mu)$ 内稠密，试证 $h(u) = h(u,\alpha)$（Колмогоров-Sinai 定理；证法与 a) 中所用方法相同）.

d) 取 $X$ 为圆周 $U: |z| = 1$，$\mu$ 为 Lebesgue 测度在 $[0,1]$ 到 $U$ 上的映射 $t \to e^{2\pi i t}$ 下的象，$u$ 为映射 $z \to e^{2\pi i\theta}z$，试证 $h(u) = 0$.（按照 $\theta$ 是有理数还是无理数分为两种情形，在第二种情形，取 $\alpha$ 是分解为两个半开半圆周的划分以利用 b).）

11) 设 $X$，$Y$ 是两个紧空间，$\mu$（相应地，$\nu$）是 $X$（相应地，$Y$）上的正测度，满足 $\mu(X) = 1$（相应地，$\nu(Y) = 1$），$X$（相应地，$Y$）到自身的满足

$u(\mu)=\mu$（相应地，$v(\nu)=\nu$）的 $\mu$ 可测（相应地，$\nu$ 可测）映射 $u$（相应地，$v$），定义了 $L^1_{\mathbf{C}}(X,\mu)$（相应地，$L^1_{\mathbf{C}}(Y,\nu)$）的一个自同态 $U:\tilde{f}\to(f\circ u)^\sim$（相应地，$V:\tilde{g}\to(g\circ v)^\sim$）(13.11，问题 10)．$u$ 与 $v$ 称为**共轭的**，如果存在 $I(X,\mu)$ 到 $I(Y,\nu)$（问题 8）上的一个等距 $T$，使得 $V\circ T=T\circ U$．试证 $h(u)=h(v)$．

12）假定测度 $\mu$ 有界，$p$ 是满足 $1\leqslant p<+\infty$ 的数．设 $(U_n)$ 是 $L^p_{\mathbf{R}}(X)$ 到空间 $S(X,\mu)$（问题 2）的连续线性映射所成的序列；对每个函数 $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$，以 $U_n\cdot f$ 表示属于类 $U_n\cdot\tilde{f}$ 的函数，且令

$$(U^*_N\cdot f)(x)=\sup_{n\leqslant N}|(U_n\cdot f)(x)|,\quad (U^*\cdot f)(x)=\sup_n|(U_n\cdot f)(x)|.$$

对每个 $\alpha>0$，以 $E_{\alpha,N}(f)$ 表示使得 $(U^*_N\cdot f)(x)>\alpha$ 的 $x\in X$ 的集，而以 $E_\alpha(f)$ 表示使得 $(U^*\cdot f)(x)>\alpha$ 的 $x\in X$ 的集．

a）试证对每个 $\varepsilon>0$，使得 $\mu(E_{\alpha,N}(f))\leqslant\varepsilon$ 的 $\tilde{f}\in L^p_{\mathbf{R}}$ 的集是闭的．

b）假定对每个函数 $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$，函数 $U^*\cdot f$ 几乎处处有限．试证在这些条件下，数

$$C(\alpha)=\sup_{N_p(f)\leqslant 1}\mu(E_\alpha(f)).$$

当 $\alpha$ 趋于 $+\infty$ 时趋于 0（**Banach 原理**）．（在完备空间 $L^p_{\mathbf{R}}$ 中利用 Baire 定理．）

c）在 b）的假设下，试证使得序列 $((U_n\cdot f)(x))$ 在 $X$ 内几乎处处收敛的 $\tilde{f}$ 所成的集 $H$ 在 $L^p_{\mathbf{R}}$ 内是闭的．（如果令

$$R(f)(x)=\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{m\geqslant r,n\geqslant r}|(U_m\cdot f)(x)-(U_n\cdot f)(x)|\right),$$

则对 $\tilde{g}\in H$，几乎处处有 $R(f)(x)=R(f-g)(x)$，同时利用 b)．）

## 13. 以 $\mu$ 为基的测度

**(13.13.1)** 设 $g$ 是 $X$ 到 $\mathbf{C}$ 或 $\bar{\mathbf{R}}$ 的映射，则下列陈述是等价的：

a）对每个 $x\in X$，存在 $x$ 在 $X$ 内的邻域 $V$，使得 $g\varphi_V$ 可积．

b）函数 $g$ 可测，且对每个紧集 $K\subset X$，有

$$\int^*|g|\varphi_K d\mu<+\infty.$$

c）对每个函数 $h\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，函数 $gh$ 可积．

由于我们能把 $g$ 写成 $g=g_1+ig_2$，其中 $g_1$ 与 $g_2$ 在 $\bar{\mathbf{R}}$ 中取

值，又由于 $g_1 = g_1^+ - g_1^-$，$g_2 = g_2^+ - g_2^-$，因而可以把它归结为((13.9.6) 与 (13.10)) $g$ 是 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的非负映射的情形．为证明 a) 蕴涵 b)，用有限个开集 $V_j$（它们满足，对每个 $j$，$g\varphi_{V_j}$ 均可积）覆盖 $K$，于是 $\sup_j (g\varphi_{V_j})$ 可积 (13.7.4)，因而 $g\varphi_K = \varphi_K \cdot \sup_j(g\varphi_{V_j})$ 也可积 (13.9.14)；根据 (13.9.13) 即得 b)．为证明 b) 蕴涵 c)，首先注意 $g$ 几乎处处有限（因为 $X$ 是紧集的可数并），因而 $gh$ 可测 (13.9.8.1)．又若 $L = \text{Supp}(h)$，则有 $|gh| \leqslant |g\varphi_L| \cdot \|h\|$，所以由 b) 与(13.9.13)即得 $gh$ 可积．最后，为证明 c) 蕴涵 a)，对于点 $x \in X$，考虑 $x$ 的紧邻域 $V$ 与 $X$ 到$[0, 1]$的连续映射 $h$，使得 $h$ 在 $V$ 上等于 1 且具有紧支集((3.18.2) 与 (4.5.2))；由假定，$gh$ 可积，因而 $g\varphi_V = (gh)\varphi_V$ 同样可积(13.9.14)．

如果 $g$ 满足 (13.13.1) 中的等价条件，则称 $g$ 为(关于 $\mu$ 的)**局部可积函数**或**局部 $\mu$ 可积函数**．显然任何可积函数都是局部可积的．任何满足下述条件的可测函数都是局部可积的：它在 $X$ 的每个紧子集上的限制几乎处处有界；特别是，属于 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^{\infty}$ 或 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{C}}^{\infty}$ 的任何函数是局部可积的．根据 (13.11.7)，属于 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}^{2}$ 与 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{C}}^{2}$ 的任何函数是局部可积的．任何等价于局部可积函数的函数是局部可积的．在 (13.13.1) 的证明中，我们已经注意到任何局部可积函数是几乎处处有限的．$\boldsymbol{R}$ 上如下定义的下半连续实值函数关于 Lebesgue 测度不是局部可积的：当 $x \neq 0$，它等于$1/|x|$；当 $x = 0$，它等于 0．

为使复值函数 $g$ 局部可积，必须且只须 $\mathscr{R}g$ 与 $\mathscr{I}g$ 局部可积；为使实值函数 $g$ 局部可积，必须且只须 $g^+$ 与 $g^-$ 都局部可积．

设 $g$ 是局部 $\mu$ 可积函数，由于 $f \to \int fg d\mu$ 在整个 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 上有定义，所以它是复向量空间 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 上的线性形式；而且这个线性形式是 $X$ 上的(复)测度，这是因为，对于每个紧集 $K \subset X$，根据(13.10.3)，对一切函数 $f \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X;K)$，有

$$\left|\int fg d\mu\right| \leqslant \|f\| \int |g\varphi_K| d\mu.$$

这样定义的测度称为**关于 $\mu$ 以 $g$ 为密度的测度**，记作 $g \cdot \mu$；当 $g$

为连续时，我们又回到(13.1.5)中的定义．形如 $g\cdot\mu$ 的测度也称为**以 $\mu$ 为基的测度**． 由这个定义立即得到，如果 $g$ 在 $\bar{R}$ 中取值(相应地，几乎处处非负)，则测度 $g\cdot\mu$ 是实的(相应地，正的)；再者，当用一个(关于 $\mu$ 的)等价函数代替 $g$ 时，$g\cdot\mu$ 不变，因而可以限于 $g$ 处处有限且为普遍可测(13.9.12)的情形．

若 $g_1$ 与 $g_2$ 是两个局部可积函数，则 $g_1+g_2$ 同样是局部积的，且对每个复纯量 $a$，$ag_1$ 也是局部可积的，并有

**(13.13.2)**

$$(g_1+g_2)\cdot\mu=g_1\cdot\mu+g_2\cdot\mu,(ag_1)\cdot\mu=a(g_1\cdot\mu).$$

对每个局部可积复值函数 $g$，我们有

**(13.13.3)**

$$\overline{g\cdot\mu}=\bar{g}\cdot\mu,\ \mathscr{R}(g\cdot\mu)=(\mathscr{R}g)\cdot\mu,\ \mathscr{I}(g\cdot\mu)=(\mathscr{I}g)\cdot\mu.$$

**(13.13.4)** 局部 $\mu$ 可积有限实值(相应地，复值)函数所成的集 $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},R}(X,\mu)$ (相应地，$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},C}(X,\mu)$) 是一个实(相应地，复)向量空间，我们也常把它记作 $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$，$\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mu)$，$\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X)$ 或 $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$．对 $X$ 的每个紧子集 $K$，映射 $p_K: g\to\int|g\varphi_K|d\mu$ 是这个空间上的半范数；以后我们总是假定赋予 $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$ 由这些半范数所定义的拓扑．显然，若 $(K_n)$ 是 $X$ 的紧子集的递增序列，使得这些 $K_n$ 的并是 $X$ 且 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$ (3.18.3)，则相应的半范数 $p_{K_n}$ 就定义了 $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$ 的拓扑． 特别，若 $X$ 是紧的，则 $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},R}(X,\mu)$ (相应地，$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},C}(X,\mu)$) 恒等于 $\mathscr{L}^1_R(X,\mu)$ (相应地，$\mathscr{L}^1_C(X,\mu)$)．使 $p_K(g)=0$ 对任何紧集 $K$ 均成立的局部可积有限实值函数所成的集就是 $\mu$ 可忽略函数所成的空间 $\mathscr{N}$．令

$$L^1_{\mathrm{loc},R}(X,\mu)=\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},R}(X,\mu)/\mathscr{N},$$

并同样地定义 $L^1_{\mathrm{loc},C}(X,\mu)$．半范数 $p_K(g)$ 只依赖于 $g$ 所属的类 $\tilde{g}$；若令 $p_K(\tilde{g})=p_K(g)$，我们就得到定义这些空间的拓扑的半范数族，因而这些空间是局部凸的与可度量化的．

**(13.13.5)** 若 $g$ 是局部 $\mu$ 可积的，则 $|g|$ 也是局部 $\mu$ 可积的，并且 $|g\cdot\mu|=|g|\cdot\mu$．

第一个论断由 (13.13.1) 与 (13.7.4) 立即得到． 为证明第二

个论断，首先注意，若 $f$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的非负函数，$u$ 是属于 $\mathscr{K}_C(X)$ 且满足 $|u| \leqslant f$ 的函数，则 $\left|\int ug\,d\mu\right| \leqslant \int |u| \cdot |g|\,d\mu \leqslant \int f|g|\,d\mu$ (13.10.3)，因而 (13.3.2.1) $|g\cdot\mu| \leqslant |g|\cdot\mu$。为证明相反的不等式，以 $L$ 表示 $f$ 的紧支集。设 $A$ 是使得 $g(x) \neq 0$ 的 $x \in L$ 的集，则这个集是可积的 ((13.9.9) 与 (13.9.2))，因而 (13.9.1) 存在 $A$ 的紧子集的递增序列 $(K_n)$，使得 $A - \bigcup_n K_n$ 是 $\mu$ 可忽略的。由此得知 (13.8.4)，对每个 $\varepsilon > 0$，存在整数 $n$，使得 $\int_{A-K_n} f|g|\,d\mu \leqslant \varepsilon$。利用 $g$ 的可测性与 (13.8.4)，同样的推理表明，存在紧集 $K_n' \subset K_n$，使得 $g|K_n'$ 连续且 $\int_{A-K_n'} f|g|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon$。现在在 $K_n'$ 上考虑连续函数 $x \to |g(x)|/g(x)$，把 (3.18.2) 与 Tietze-Урысон 定理 (4.5.1) 应用于这个函数的实部与虚部，首先我们看到，存在函数 $w \in \mathscr{K}_C(X)$，使得在 $K_n'$ 上有

$$w(x) = |g(x)|/g(x).$$

于是函数 $v = w \cdot \inf(1, 1/|w|)$（此处约定 $1/0 = +\infty$）在 $X$ 上连续，因而它属于 $\mathscr{K}_C(X)$，并且使得

$$v(x) = |g(x)|/g(x)$$

在 $K_n'$ 上成立，且在 $X$ 上有 $|v(x)| \leqslant 1$。故 $|fv| \leqslant f$ 并且

$$\int fvg\,d\mu = \int_{K_n'} fvg\,d\mu + \int_{A-K_n'} fvg\,d\mu.$$

然而

$$\int_{K_n'} fvg\,d\mu = \int_{K_n'} f|g|\,d\mu,$$

且

$$\left|\int_{A-K_n'} fvg\,d\mu\right| \leqslant \int_{A-K_n'} f|g|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon,$$

于是最后得到

$$\left|\int fvg\,d\mu\right| \geqslant \int f|g|\,d\mu - 4\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，所以所述命题得证。

## 问　　题

1）试证局部凸可度量化空间 $L^1_{\text{loc},R}(X,\mu)$（相应地，$L^1_{\text{loc},C}(X,\mu)$）是完备的(换言之,它是 Fréchet 空间)。

2）设 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}^1_{\text{loc},R}$ 的向量子空间，它包含 $\mu$ 可忽略函数所成的子空间 $\mathscr{N}$．假定对商空间 $H=\mathscr{H}/\mathscr{N}$ 赋予实 Hilbert 空间结构，并用 $(\tilde{f}|\tilde{g})$ 表示这个空间中的纯量积，用 $|\tilde{f}|$ 表示范数．我们还假设，对每个紧集 $K\subset X$，存在非负常数 $a_K$，使对一切函数 $u\in\mathscr{H}$，有

(A)
$$\int_K |u|\,d\mu\leqslant a_K|\tilde{u}|$$

（参阅15.11问题26）．当 $u$ 与 $v$ 属于 $\mathscr{H}$ 时，也把 $(\tilde{u}|\tilde{v})$ 与 $|\tilde{u}|$ 分别记作 $(u|v)$ 与 $|u|$．以 $\mathscr{L}^\infty_C$ 表示 $X$ 上具有紧支集的有界可测函数的集。

a）试证，对每个函数 $f\in\mathscr{L}^\infty_C$，存在函数 $U^f\in\mathscr{H}$，使对一切函数 $u\in\mathscr{H}$，有

$$(U^f|u)=\int uf\,d\mu;$$

而且 $U^f$ 在 $H$ 中所属的类完全由 $f$ 的类所确定．$U^f$ 称为 $f$ 的**位势**．试证位势 $U^f$ 的类所成的集在 Hilbert 空间 $H$ 内稠密（利用（6.3.2））．若 $f,g$ 是 $\mathscr{L}^\infty_C$ 的两个元，则 $(U^f|U^g)=\int gU^f d\mu=\int fU^g d\mu$。

b）当 $f$ 取遍属于 $\mathscr{L}^\infty_C$ 的非负函数所成的集时，$U^f$ 所成的集是 $\mathscr{H}$ 内的一个凸锥．以 $\mathscr{P}$ 记这个凸锥（关于由 $\mathscr{H}$ 上的半范数 $|\tilde{u}|$ 所定义的拓扑）的闭包，而这个闭包的元称为**纯位势**．以 $P$ 记 $\mathscr{P}$ 在 $H$ 中的象．对每个元 $\tilde{u}\in H$，设 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{u}$ 在 $P$ 上的投影（12.15问题3a)），试证 $|\tilde{v}|^2=(\tilde{v}|\tilde{u})$，几乎处处有 $v(x)\geqslant u(x)$，并且 $\tilde{v}$ 是 $P$ 中满足这些条件的唯一元，且有 $|\tilde{v}|\leqslant|\tilde{u}|$。

由此推断，对每个 $\tilde{u}\in H$，0 在下述闭凸集上的投影属于 $P$：这个闭凸集由使得 $v(x)\geqslant u(x)$ 几乎处处成立的 $\tilde{v}\in H$ 所组成。

c）由 b）推断，为使元 $v\in\mathscr{H}$ 属于 $\mathscr{P}$，必须且只须对于使得 $w(x)\geqslant 0$ 几乎处处成立的一切 $w\in\mathscr{H}$，都有 $(v|w)\geqslant 0$（考虑 $\tilde{v}$ 与它在 $P$ 上的投影的差）．这个条件等价于，对于使得 $w(x)\geqslant 0$ 几乎处处成立的一切 $w\in\mathscr{H}$，有 $|\tilde{v}+\tilde{w}|\geqslant|\tilde{v}|$。

d）假定对一切 $u\in\mathscr{H}$ 有 $|u|\in\mathscr{H}$ 与 $|(|u|)^\sim|\leqslant|\tilde{u}|$，试证任何纯位势 $u$ 都是几乎处处非负的（利用 c)），并证明，若 $u$，$v$ 是两个纯位势，则

$\inf(u,v)$ 也是纯位势.（在 $\mathscr{H}$ 内成为 $\inf(u,v)$ 的上界的元中，考虑一个元 $w$，使得 $|\tilde{w}|$ 极小. 由 b) 得知 $w$ 是纯位势，且有 $(u+w|u-w)\leqslant(u+w||u-w|)$. 由此推断 $|\inf(u,w)^{\sim}|\leqslant|\tilde{w}|$（计算 $|(\inf(u,w)^{\sim}|^2)$，同样有 $|(\inf(v,w)^{\sim}|\leqslant|\tilde{w}|$，并由此推断 $w=\inf(u,w)=\inf(v,w)$ 几乎处处成立.）

e) 取与 d) 相同的假定，试证，如果 $f\in\mathscr{L}_C^{\infty}$ 且几乎处处非负，$u\in\mathscr{P}$ 并且在使得 $f(x)>0$ 的点 $x$ 的集上，几乎处处有 $U^f(x)\leqslant u(x)$，则在 $X$ 上几乎处处有 $U^f(x)\leqslant u(x)$（**优势原理**）.（注意 $v=\inf(U^f,u)$ 是纯位势，并且 $(U^f|U^f-v)=0$，$(v|U^f-v)\geqslant 0$，由此推断 $v=U^f$ 几乎处处成立.）

f) 设 d) 中的假定得到满足，而且假定对于每个 $u\in\mathscr{H}$，有 $\inf(u,1)\in\mathscr{H}$ 与 $|(\inf(u,1))^{\sim}|\leqslant|\tilde{u}|$. 试证，此时若 $u$ 是纯位势，则 $\inf(u,1)$ 也是纯位势（类似于 d) 中的推理）. 由此推断，若 $u$ 与 $v$ 是纯位势，则 $\inf(u,v+1)$ 也是纯位势；为此只须注意 $v+\inf(u,1)$ 是纯位势并应用 d). 最后证明，若 $f\in\mathscr{L}_C^{\infty}$ 且几乎处处非负，$u\in\mathscr{P}$ 并且在使得 $f(x)$ 大于 0 的点 $x$ 的集上，几乎处处有 $U^f(x)\leqslant u(x)+1$，则在 $X$ 上几乎处处有 $U^f(x)\leqslant u(x)+1$（**完全最大值原理**；推理与 e) 中所用的相同）.

## 14. 关于以 $\mu$ 为基的正测度的积分

**(13.14.1)** 设 $g$ 是 $X$ 上的局部 $\mu$ 可积非负函数，$\nu=g\cdot\mu$，则对 $X$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的任何非负映射 $f$，有

**(13.14.1.1)**
$$\int^* f d\nu=\int^* fg d\mu;$$

按照定义，上式右边的 $fg$ 在两个因子 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之一等于 0 而另一个等于 $+\infty$ 的点 $x\in X$ 处取值 0 (13.11).

我们分几步来证明.

**(13.14.1.2)** 先假定 $f\in\mathscr{I}$，于是由 (12.7.8)，存在属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的函数的递增序列 $(f_n)$，使得 $f=\sup\limits_n f_n$. 考虑到关于乘积所作的约定，由于 $g$（关于 $\mu$）几乎处处有限，这就推出序列 $(f_n g)$ 是递增的且 $fg$ 等价于 $\sup\limits_n(f_n g)$. 再者，函数 $f_n g$ 是 $\mu$ 可积的 (13.13.1) 且 $\int f_n g d\mu=\int f_n d\nu$. 于是由 (13.5.7) 得到

$$\int^* f d\nu = \sup_n \int f_n d\nu = \sup_n \int f_n g d\mu = \int^* f g d\mu.$$

**(13.14.1.3)** 每个 $\mu$ 可忽略集 $N$ 也是 $\nu$ 可忽略的.

首先假定 $N$ 是相对紧的，此时((3.18.2)与(13.7.9))存在相对紧开集的递减序列 $(U_n)$，使得每个 $U_n$ 都包含 $N$，并且 $\inf_n \mu(U_n) = 0$. 基于(13.13.1)，$g\varphi_{U_n}$ 是 $\mu$ 可积的，所以根据(13.14.1.2)与(13.7.7)，有 $\int g\varphi_{U_n} d\mu = \nu(U_n)$. 然而由(13.8.4)，若 $N' \supset N$ 是所有 $U_n$ 的交，则

$$\inf_n \int g\varphi_{U_n} d\mu = \int g\varphi_{N'} d\mu = 0;$$

由于对一切 $n$ 均有 $\nu(N) \leqslant \nu(U_n)$，故 $\nu(N) = 0$.

现在设 $N$ 是任意的 $\mu$ 可忽略集，$(K_n)$ 是 $X$ 的一个可数覆盖，其中每个 $K_n$ 都是紧集，则由上面已证明的结果得知，集 $N \cap K_n$ 是 $\nu$ 可忽略的，因而它们的并 $N$ 也是 $\nu$ 可忽略的.

**(13.14.1.4)** 现在假定 $K = \mathrm{Supp}(f)$ 是紧的，$f|K$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内取值并且是连续的（因而 $f|K$ 有界(3.17.10)），则存在由 $K$ 的相对紧邻域组成的递减序列 $(U_n)$，使得 $K = \bigcap_n U_n$ (3.18.2)．另一方面，由 Tietze-Урысон 定理(4.5.1)，对每个 $n$，存在函数 $f_n \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$，使得它的支集包含在 $U_n$ 内，$f_n$ 是 $f$ 的延拓，且有 $\|f_n\| = \|f\|$. 因而对一切 $n$ 有 $\int f_n d\nu = \int f_n g d\mu$. 鉴于(13.13.1)，由(13.8.4)推出 $f$ 是 $\nu$ 可积的，$fg$ 是 $\mu$ 可积的，并且 $\int f d\nu = \int f g d\mu$.

**(13.14.1.5)** 使得 $g(x) = 0$ 的 $x \in X$ 的集 $A$ 是 $\nu$ 可忽略的.

事实上，由于 $g$ 为 $\mu$ 可测(13.13.1)，故 $A$ 为 $\mu$ 可测(13.9.9)，因而它是一个紧集序列 $(K_n)$ 与一个 $\mu$ 可忽略集 $N$ 的并．应用(13.14.1.4)于 $f = \varphi_{K_n}$，就有 $\nu(K_n) = \int g\varphi_{K_n} d\mu = 0$，而根据(13.14.1.3)，$\nu(N) = 0$，因而 $\nu(A) = 0$.

**(13.14.1.6)** 现在考虑 $\mathrm{Supp}(f) = K$ 为紧且 $f|K$ 在 $K$ 上为下半连续的情形．此时由(12.7.8)得知，存在在 $K$ 上连续且非负的有限实值函数序列 $(u_n)$，使得 $f|K = \sup_n u_n$. 设 $f_n$ 是这样的函数：它在

$K$上等于$u_n$，在$X-K$上等于0，则$f=\sup_n f_n$。鉴于(13.5.7)与(13.14.1.4)，考虑到基于对乘积所作的约定，并考虑到$g$关于$\mu$几乎处处有限，于是$fg$(关于$\mu$)等价于$\sup_n f_n g$，所以有

$$\int^* f d\nu = \sup_n \int^* f_n d\nu = \sup_n \int^* f_n g d\mu = \int^* f g d\mu.$$

**(13.14.1.7)** 现在来完成证明.对满足$f \leqslant v$的每个函数$v \in \mathscr{I}$，有$fg \leqslant vg$，根据(13.14.1.2)，有$\int^* v d\nu = \int^* v g d\mu$，因而$\int^* fg d\mu \leqslant \int^* v g d\mu = \int^* v d\nu$；由上积分的定义，即得$\int^* fg d\mu \leqslant \int^* f d\nu$。剩下要证明不等式

**(13.14.1.8)**
$$\int^* f d\nu \leqslant \int^* f g d\mu.$$

设函数$h \in \mathscr{I}$满足$h \geqslant fg$，则只须证明

**(13.14.1.9)**
$$\int^* f d\nu \leqslant \int^* h d\mu.$$

集$X-A$是紧集递增序列$(H_n)$与一个$\mu$可忽略集$N$的并，这里对每个$n$，$g|H_n$都连续、有限且大于0。用下面的方式定义$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的映射$u$：在这些$H_n$的并上，$u=h/g$，在$N$与$A$上，$u(x)=+\infty$。这样，在每个$H_n$上有$ug=h$，根据(13.14.1.6)，

$$\int^*_{H_n} u d\nu = \int^*_{H_n} u g d\mu = \int^*_{H_n} h d\mu.$$

另一方面，根据(13.14.1.3)，$\nu(N)=0$，又由(13.14.1.5)，$\nu(A)=0$，由于$h \geqslant 0$ (13.5.7)，所以

$$\int^* u d\nu = \sup_n \int^*_{H_n} u d\nu = \sup_n \int^*_{H_n} h d\mu \leqslant \int^* h d\mu.$$

然而由于$f \leqslant u$，故得(13.14.1.9)。证毕.

**(13.14.2)** 设$g$是$X$上的非负局部$\mu$可积函数，$S$是使得$g(x)>0$的$x \in X$所成的$\mu$可测集，$\nu = g \cdot \mu$。设$f$是$X$到$\bar{\boldsymbol{R}}$的映射，则下列陈述(采用(13.11)中关于乘积的约定)是等价的；

a) $f$是$\nu$可测的；

b) $f\varphi_S$ 是 $\mu$ 可测的；

c) $fg$ 是 $\mu$ 可测的.

可以假设 $g$ 为有限. 由所作的约定，我们有

$$fg=(f\varphi_S)(g\varphi_S),$$

又由于右边两个因子中不会同时有一项取值 0 而另一项取值 $\pm\infty$，故由(13.9.8.1)得到 b) 蕴涵 c). 另一方面，在 $S$ 上等于 $g^{-1}$ 而在 $X-S$ 上等于 0 的函数 $g'$ 是 $\mu$ 可测的：事实上，存在 $S$ 的(相应地，$X-S$ 的)一个划分，它由紧集序列 $(L_n)$（相应地，$(M_n)$）与 $\mu$ 可忽略集 $P$（相应地，$Q$）组成，使得每个 $g|L_n$ 连续，由此得到 $g'|L_n$ 与 $g'|M_n$ 连续. 再加 $(fg)g'=f\varphi_S$，于是由同样的推理可知 c) 蕴涵 b). 剩下要证明 a) 与 b) 等价.

先假定 $f\varphi_S$ 为 $\mu$ 可测. 基于(13.14.1.5)，集 $\complement S$ 是 $\nu$ 可忽略的；另一方面，由 $f\varphi_S$ 为 $\mu$ 可测的假定推出，存在 $S$ 的划分，它由紧集序列 $(L_n)$ 与 $\mu$ 可忽略集 $N$ 组成，使得每个函数 $f|L_n$ 都连续. 我们已知 $N$ 也是 $\nu$ 可忽略的 (13.14.1.3)，因而 $f$ 是 $\nu$ 可测的.

反之，假定 $f$ 为 $\nu$ 可测，于是存在 $X$ 的划分，它由紧集序列 $(H_n)$ 与 $\nu$ 可忽略集 $N$ 组成，使得每个 $f|H_n$ 连续. 另一方面，存在 $S$ 的划分，它由 $\mu$ 可忽略集 $L$ 与紧集序列 $(K_n)$ 组成，使得每个 $g|K_n$ 连续(且大于0). 对每个 $n$，有 $\inf\limits_{x\in K_n} g(x)=a_n>0$. 最后，也存在 $X-S$ 的划分，它由 $\mu$ 可忽略集 $L'$ 与紧集序列 $(K'_n)$ 组成. 显然 $f\varphi_S$ 在每个集 $H_n\cap K_m$ 与 $K'_m$ 上的限制是连续的，因此只须证明 $N\cap S$ 是 $\mu$ 可忽略的. 可是，如果 $\mu^*(N\cap K_n)>0$，则由此可推出 $\int^*_{N\cap K_n} g\,d\mu\geq a_n\mu^*(N\cap K_n)>0$，而这是不可能的，因为根据(13.14.1)，有 $0=\nu(N\cap S)=\int_{N\cap S} g\,d\mu$. 这样每个集 $N\cap K_n$ 都是 $\mu$ 可忽略的，从而 $N\cap S$ 同样是 $\mu$ 可忽略的，故 $f\varphi_S$ 是 $\mu$ 可测的.

**(13.14.3)** 设 $g$ 是 $X$ 上的非负局部 $\mu$ 可积函数，$\nu=g\cdot\mu$. 为使 $X$ 到 $\bar{R}$ 的映射 $f$ 为 $\nu$ 可积，必须且只须（采用(13.11) 中的约定）

$fg$ 为 $\mu$ 可积；此时还有

**(13.14.3.1)** $$\int f d\nu = \int fg d\mu.$$

为使 $f$ 为 $\nu$ 可积，必须且只须 $f^+$ 与 $f^-$ 为 $\nu$ 可积(13.7.4)。另一方面，由于在(13.11)中关于乘积的约定下有 $(fg)^+ = f^+g$，$(fg)^- = f^-g$，因而只须证明当 $f$ 为非负时的(13.14.3)。此时所述的第一个论断是(13.14.1)，(13.14.2)与(13.9.13)的推论，而关系式(13.14.3.1)就是(13.14.1.1)。

**(13.14.4)** 在(13.14.3)的假定下，为使 $\nu$ 有界，必须且只须 $g$ 为 $\mu$ 可积；为使 $\nu = 0$，必须且只须 $g$ 为 $\mu$ 可忽略。

**(13.14.5)** 设 $g_1$，$g_2$ 是 $X$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的两个映射，$g_1$ 是非负且局部 $\mu$ 可积的，则为使 $g_2$ 是局部 $(g_1 \cdot \mu)$ 可积的，必须且只须(采用(13.11)中关于乘积的约定) $g_2 g_1$ 是局部 $\mu$ 可积的，且此时有

**(13.14.5.1)** $$g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu) = (g_2 g_1) \cdot \mu.$$

通过考虑 $g_2^+$ 与 $g_2^-$，就可归结为 $g_2$ 非负的情形。$g_2$ 为局部 $(g_1 \cdot \mu)$ 可积意味着(13.13.1)，对每个函数 $f \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$，$g_2 f$ 为 $(g_1 \cdot \mu)$ 可积，或者等价地(13.14.3)，$g_2 g_1 f$ 为 $\mu$ 可积，而这意味着 $g_2 g_1$ 为局部 $\mu$ 可积。令 $\nu = g_1 \cdot \mu$，$\lambda = g_2 \cdot (g_1 \cdot \mu)$，则有 $\int f d\lambda = \int f g_2 d\nu = \int f g_2 g_1 d\mu$ (13.14.3)，这就证明了(13.14.5.1)。

## 问　　题

1) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(X, \mu)$ 中的序列；令 $\mu_n = f_n \cdot \mu$，并对任何 $\mu$ 可测集 $A$，令 $\mu_n(A) = \int_A f_n d\mu$.

a) 试证，若 $X$ 非紧，则可能序列 $(\tilde{f}_n)$ 在 $L^1$ 中无界，但序列 $(\mu_n)$ 却粗疏有界。

b) 假设对 $X$ 的每个单点子集 $A$，且对每个满足下述条件的开集 $A \subset X$：$\mu$ 在 $A$ 的边界上诱导的测度具有有限支集，序列 $(\mu_n(A))$ 有界，试证此时序列 $(\tilde{f}_n)$ 在 $L^1$ 中有界。(首先证明，每个点 $x_0 \in X$ 有一个开邻域 $U$，使得数列 $(|\mu_n|(U))$ 有界。为此用反证法，证明在相反的情形下，就能定义一个严格递增的整数列 $(n_k)$，$x_0$ 的开邻域的递减序列 $(U_k)$ 与关于 $\mu$ 为边界可忽

略的(13.9,问题7)开集所成的序列 $(W_k)$,它们具有下述性质: $\bar{U}_k \subset U_{k-1}$, $\alpha(U_k - \{x_0\}) \leqslant 1/k$, 对 $i < k$ 有 $|\mu_{n_i}|(U_k - \{x_0\}) \leqslant 1$, $\bar{W}_k \subset U_k - \bar{U}_{k+1}$, 最后,有

$$|\mu_{n_k}(W_k)| > k + \sum_{i<k} |\mu_{n_i}(W_i)|.$$

为导出矛盾,考虑这些 $W_k$ 的并$W$(“**滑动驼峰法**”). 然后用类似的推理证明,存在$X$的紧子集$K$,使得序列$(|\mu_n|(X-K)$有界.)

c) 由b)推断,如果对每个开集 $A \subset X$,序列 $(\mu_n(A))$ 有界,则序列 $(\tilde{f}_n)$ 在 $L^1$ 内有界.

d) 在区间$[0,1]$上,如果取 $\mu_n$ 是由点0处质量为$n$,点$1/n$处质量为$-n$所确定的测度,则对每个关于所有测度 $|\mu_n|$ 均为边界可忽略的开集 $A$,序列 $(\mu_n(A))$ 有界,然而范数序列 $(\|\mu_n\|)$ 却无界. 同样,如果取 $\mu_n$ 是由点 $1/n$ 处质量为 $n$,点$1/(n+1)$ 处质量为$-n$ 所确定的测度,则对每个包含在$[0,1]$内的区间 $A$(因而也对每个包含在$[0,1]$内的有限子集$A$),序列$(\mu_n(A))$有界,然而序列$(\|\mu_n\|)$ 却无界.

2) 对每个正整数 $n$,设 $E_n$ 是由 $I = ]0, 1[$ 的至多可数个点组成的闭集,并设 $\mathfrak{I}_n$ 是 $I - E_n$ 的连通分支区间所成的族,还假定当$1/n$趋于0时,区间 $J \in \mathfrak{I}_n$ 的最大长度 $d_n$ 也趋于0. 设 $\lambda$ 是 $I$ 上的 Lebesgue 测度, $A$ 是 $I$ 的一个 $\lambda$ 可测子集. 假定存在数 $k$, $0 < k < 1$, 使对一切 $n$ 与一切 $J \in \mathfrak{I}_n$,有

$$\lambda(A \cap J) < k\lambda(J).$$

试证 $\lambda(A) = 0$. (通过利用(13.7.9),证明对每个 $\varepsilon > 0$,有$\lambda(A) \leqslant \varepsilon + k \cdot (\lambda(A) + \varepsilon)$.)

3) 对每个正整数 $n$, $n$ 阶 **Farey 序列**是满足下述条件的有理数所成的集 $F_n$: 把它们写成既约分数 $p/q$ 时,有 $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. 而且把这些有理数按递增顺序排列,因而 $F_n$ 中相继两项的距离$\leqslant 1/n$.

a) 试证,如果两个有理数 $r = p/q$与$r' = p'/q'$满足 $qp' - pq' = \pm 1$,则每个整数偶$(p'', q'')$ 可以写成这样的形式: $p'' = px + p'y$, $q'' = qx + q'y$,这里 $x$, $y$ 是整数. 为使分数 $p''/q''$ 属于以 $r$,$r'$ 为端点的闭区间,必须且只须 $x$, $y$ 同号.

b) 由 a) 推断,若 $r = p/q$, $r' = p'/q'$ 是属于$[0,1]$的两个有理数,满足 $q > 0$, $q' > 0$ 与 $qp' - pq' = \pm 1$, 则 $r$ 与 $r'$ 是 Farey 序列 $F_{\sup(q,q')}$ 中相继的两项;再者,使得以 $r$,$r'$ 为端点的开区间含有 $F_m$ 的一个点的最小整数 $m$ 是 $q+q'$,且在这个区间内只有 $F_{q+q'}$ 的一个点,就是$(p+p')/(q+q')$.

c) 反之,若 $r, r'$ 是 $F_n$ 中相继的两项,试证 $qp' - pq' = \pm 1$ (对 $n$ 用归纳法)。

4) 对属于区间 $I = ]0, 1]$ 的每个 $x$, 令 $\rho(x) = (1/x) - [1/x]$ (其中 $[t]$表示实数 $t$ 的整数部分); 如果 $\rho^n(x) = \rho(\rho^{n-1}(x))$ 有定义且不等于 0, 则令 $q_{n+1}(x) = [1/\rho^n(x)]$ (令 $q_1(x) = [1/x]$)。

a) 试证,对于使 $\rho^n(x)$ 有定义的每个 $n$, 有

$$x = \frac{A_{n-1}(x)\rho^n(x) + A_n(x)}{B_{n-1}(x)\rho^n(x) + B_n(x)},$$

其中 $A_n(x)$ 与 $B_n(x)$ 是不小于 $n-1$ 的整数; $A_{n-1}(x)/B_{n-1}(x)$ 与 $A_n(x)/B_n(x)$是一个 Farey 序列(问题 3)的相继的两项且 $x$ 属于以 $A_{n-1}(x)/B_{n-1}(x)$ 与 $A_n(x)/B_n(x)$ 为端点的闭区间. 由此推断, 为使 $\rho^n(x)$ 对任何正整数 $n$ 都有定义,必须且只须 $x$ 是无理数.

序列 $(q_n(x))$ (有限或无穷)称为 $x$ 的**连分数展开**,而 $A_n(x)/B_n(x)$ 称为 $x$ 的**渐近分数**. $A_n(x)$ 与 $B_n(x)$ 在 $\rho^{n+1}(x)$ 没有定义的点 $x$ 所成的可数闭集 $F_n$ 的余集上是常数,而在余集 $I - E_n$ 的每个连通分支区间上, $\rho^n(x)$ 是单调的且从 0 变到1.

b) 设 $\lambda$ 是 $I$ 上的 Lebesgue 测度, $A$ 是 $I$ 的一个 $\lambda$ 可测子集, 它包含在无理数集内. 假定 $\varphi_A$ 关于 $\rho$ 是 $\lambda$ 不变的(13.9 问题 13 与 24), 试证此时必有 $\lambda(A) = 0$ 或1. (假定 $d = \lambda(A)$ 满足 $0 < d < 1$, 证明对于 $I - E_n$ 的每个连通分支区间 $J$, 有 $\lambda(A \cap J) \leqslant (2d/(1+d))\lambda(J)$. 为此利用 a) 与 13.21 问题 1c), 证明对满足 $ps - qr = \pm 1$ 的整数 $p, q, r, s$, 可以写

$$\int_J \varphi_A(x)dx = \int_0^1 \varphi_A\left(\frac{pt+q}{rt+s}\right)\frac{dt}{(rt+s)^2} = \int_0^1 \varphi_A(t)\frac{dt}{(rt+s)^2} \leqslant \int_0^d \frac{dt}{(rt+s)^2}.$$

借助问题 2) 得到所需的结论.)

c) 设 $g(x) = 1/(1+x)$, 试证测度 $\mu = g \cdot \lambda$ 关于 $\rho$ 是不变的. 于是由 b) 与遍历定理 (13.9 问题 13 与 24) 推断,对 $I$ 上的每个 $\lambda$ 可积函数 $f$ 与 $I$ 中的几乎所有无理数 $x$, 有 (**Gauss-Кузьмин 公式**)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(x) + f(\rho(x)) + \cdots + f(\rho^{n-1}(x))\right) = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(t)dt}{1+t}.$$

d) 由 c) 推断, 对于每个正整数 $p$, 若 $x$ 是无理数, 而 $\nu_n(x, p)$ 是使得 $q_k(x) = p$ 的指标 $k \leqslant n$ 的个数,则对 $I$ 上几乎所有无理数 $x$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(x,p)}{n} = \frac{1}{\log 2}\log\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}.$$

e) 由 c) 推断,对几乎所有无理数 $x$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(q_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x))^{1/n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2^n}\right)^{\log n/\log 2}.$$

## 15. Lebesgue-Nikodym 定理与 $M_R(X)$ 中的序关系

**(13.15.1)** 设 $\mu$ 与 $\nu$ 是局部紧空间 $X$ 上的两个正测度，满足 $\nu\leqslant\mu$，则存在局部 $\mu$ 可积函数 $g$，使得 $\nu = g\cdot\mu$.

我们分两种情形加以证明.

I) 首先假定 $\nu$ 有界. 由于此时函数 1 为 $\nu$ 可积，所以对每个函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$，有(13.11.2.2)

**(13.15.1.1)** $|\nu(f)|^2\leqslant\nu(1)\nu(f^2)\leqslant\nu(1)\mu(f^2)$.

这表明，若 $f$ 为 $\mu$ 可忽略，则 $\nu(f)=0$. 转到对于 $\mu$ 可忽略函数所成的子空间 $\mathscr{N}$ 的商空间上，即知 $\mathscr{K}_R(X)$ 上的线性形式 $\nu$ 就在 $L_R^2(X,\mu)$ 的子空间 $\tilde{\mathscr{K}}_R(X)$ （$\mathscr{K}_R(X)$ 的典则象)上定义了一个线性形式 $\tilde{f}\to\nu(\tilde{f})$. 不等式(13.15.1.1)表明这个线性形式在子空间 $\tilde{\mathscr{K}}_R(X)$ 上是连续的(5.5.1)；$\tilde{\mathscr{K}}_R(X)$ 在 $L_R^2(X,\mu)$ 内是处处稠密的 (13.11.6)，故线性形式 $\tilde{f}\to\nu(\tilde{f})$ 可以连续延拓到整个 Hilbert 空间 $L_R^2(X,\mu)$ 上 (5.5.4)，因而存在函数 $g\in\mathscr{L}_R^2(X,\mu)$，使对一切函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$，有 $\nu(f)=\mu(gf)$ (6.3.2). 由于函数 $g$ 为局部 $\mu$ 可积 (13.13)，从而 $\nu=g\cdot\mu$.

II) 一般情形. 存在 $X$ 的一个划分，它由紧集序列 $(K_n)$ 与 $\mu$ 可忽略集 $N$ 组成(13.9.2). 若令

$$M = X - N = \bigcup_n K_n,$$

则 $\varphi_M$ 为局部 $\mu$ 可积而 $1-\varphi_M$ 为 $\mu$ 可忽略，因而 (13.14.4) 有 $\varphi_M\cdot\mu=\mu$. 令 $\mu_n=\varphi_{K_n}\cdot\mu$，$\nu_n=\varphi_{K_n}\cdot\nu$. 由于 $\varphi_{K_n}$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的非负函数的递减序列的下包络，所以关系式 $\nu\leqslant\mu$ 蕴涵 $\nu_n\leqslant\mu_n$ 对一切 $n$ 成立；此外，$\nu_n$ 是有界的 (13.14.4). 于是基于情形 I)，存在局部 $\mu_n$ 可积函数 $g_n$，使得 $\nu_n=g_n\cdot\mu_n=(g_n\varphi_{K_n})\cdot\mu=|g_n\varphi_{K_n}|\cdot\mu$ ((13.13.5)与(13.14.5))，而函数

$g_n\varphi_{K_n}$ 为局部 $\mu$ 可积。以 $g$ 表示这样的函数，它在每个 $K_n$ 上等于 $|g_n\varphi_{K_n}|$，而在 $N$ 上等于 0，则 $g$ 等于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n\varphi_{K_n}|$ 的和。可是对属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的任一非负函数 $f$ 与任一整数 $m$，有

$$\int f\left(\sum_{n=1}^{m}|g_n\varphi_{K_n}|\right)d\mu=\sum_{n=1}^{m}\int f|g_n\varphi_{K_n}|d\mu$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\int fd\nu_n=\sum_{n=1}^{m}\int f\varphi_{K_n}d\nu\leqslant\int fd\nu,$$

因而 ((13.8.4) 与 (13.13.1)) 函数 $g$ 为局部 $\mu$ 可积。又由于 $f=\sum_{n=1}^{\infty}f\varphi_{K_n}$ 关于 $\mu$ 几乎处处成立，故(13.8.4)

$$\int fgd\mu=\int f\varphi_M d\nu.$$

为证明 $\nu=g\cdot\mu$，剩下只须证明 $N$ 也是 $\nu$ 可忽略的。由定义(13.5.5)，对每个 $\varepsilon>0$，存在函数 $h\in\mathscr{I}$，使得 $\varphi_N\leqslant h$ 与 $\mu(h)\leqslant\varepsilon$。由于 $h$ 是属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的非负函数的递增序列的上包络，所以不等式 $\nu\leqslant\mu$ 蕴涵

$$\nu^*(h)\leqslant\mu(h)\leqslant\varepsilon.$$

这就完成了证明。

下面的引理以后还要加以推广(13.15.8)：

**(13.15.2)** 对于由 $X$ 上的复测度组成的任一有限序列 $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$，存在正测度 $\lambda$，使得每个 $\mu_j$ 都是以 $\lambda$ 为基的测度。

把 $\mu_j$ 写成四个正测度的线性组合(13.3.6)，我们可以限于所有测度 $\mu_j$ 均为正的情形。于是只须取 $\lambda=\sum_{j=1}^{r}\mu_j$，并把(13.15.1)的结果应用到每个 $\mu_j\leqslant\lambda$ 上即可。

**(13.15.3)** (i) 对于 $M_R(X)$ 中的序关系，任意两个实测度 $\mu,\nu$ 都有上确界 $\sup(\mu,\nu)$ 与下确界 $\inf(\mu,\nu)$。若对实测度 $\mu$，令 $\mu^+=\sup(\mu,0)$，$\mu^-=\sup(-\mu,0)$，则有

(13.15.3.1)

$$\inf(\mu^+,\mu^-)=0,\ \mu=\mu^+-\mu^-,\ |\mu|=\mu^++\mu^-=\sup(\mu,-\mu),$$

且对任意两个实测度 $\mu$, $\nu$, 有

(13.15.3.2)

$$\begin{cases}\mu+\nu=\sup(\mu,\nu)+\inf(\mu,\nu),\\ \sup(\mu,\nu)=\frac{1}{2}(\mu+\nu+|\mu-\nu|),\end{cases}$$

$$\inf(\mu,\nu)=\frac{1}{2}(\mu+\nu-|\mu-\nu|).$$

(ii) 设 $\lambda$ 是正测度, $g_1$, $g_2$ 是局部 $\lambda$ 可积有限实值函数, 于是若 $\mu_1=g_1\cdot\lambda$, $\mu_2=g_2\cdot\lambda$, 则

(13.15.3.3)
$$\begin{cases}\sup(\mu_1,\mu_2)=\sup(g_1,g_2)\cdot\lambda,\\ \inf(\mu_1,\mu_2)=\inf(g_1,g_2)\cdot\lambda;\end{cases}$$

特别是,对任一局部 $\lambda$ 可积实值函数 $g$, 有

(13.15.3.4) $(g\cdot\lambda)^+=g^+\cdot\lambda$, $(g\cdot\lambda)^-=g^-\cdot\lambda$.

为使 $g_1\cdot\lambda\leqslant g_2\cdot\lambda$ 成立, 必须且只须 $g_1(x)\leqslant g_2(x)$ 关于 $\lambda$ 几乎处处成立.

(iii) 设 $(g_n)$ 是局部 $\lambda$ 可积有限实值函数的递增序列, 则为使测度序列 $(g_n\cdot\lambda)$ 在 $M_R(X)$ 中上有界, 必须且只须 $\sup\limits_n g_n$ 为局部 $\lambda$ 可积,且有

(13.15.3.5) $$\sup_n(g_n\cdot\lambda)=(\sup_n g_n)\cdot\lambda.$$

为证明 (i),注意测度$\mu$, $\nu$ 可写成

$$\mu=\mu_1-\mu_2,\ \nu=\nu_1-\nu_2,$$

其中 $\mu_1$, $\mu_2$, $\nu_1$, $\nu_2$ 是正测度(13.3.6). 把(13.15.2)应用到四个测度$\mu_1$, $\mu_2$, $\nu_1$, $\nu_2$上、并根据(13.13.2),可以写 $\mu=u\cdot\lambda$,$\nu=v\cdot\lambda$, 这里 $\lambda$ 是一个正测度而 $u$, $v$ 是两个局部 $\lambda$ 可积有限实值函数, 因而断言(i)是断言(ii)的推论.

为证明 (13.15.3.3),我们总可以只限于 $\mu_2=0$ 的情形. 因为如果 $\sup(\mu_1-\mu_2,0)$ 存在且等于 $(g_1-g_2)^+\cdot\lambda$, 则由此即可得

到(13.3)

$$\sup(\mu_1,\mu_2)=\mu_2+\sup(\mu_1-\mu_2,0)=(g_2+(g_1-g_2)^+)\cdot\lambda$$
$$=\sup(g_1,g_2)\cdot\lambda.$$

这样就归结为证明(13.15.3.4). 为此，我们从证明(ii) 的最后一个断言开始，这个断言等价于下述事实：关系式 $g\cdot\lambda\geqslant 0$ 蕴涵 $g(x)\geqslant 0$ 关于 $\lambda$ 几乎处处成立. 事实上，设 $N$ 是使得 $g(x)<0$ 的 $x\in X$ 所成的集. 若令 $\nu=g^-\cdot\lambda$，则由 (13.14.1.5) 得到 $\nu(X-N)=0$；如果我们能证明 $\nu(N)=0$，则由此便得到 $\nu=0$，从而可建立所述断言 (13.14.4). 显然，只须证明，对 $X$ 的任何紧子集 $K$，有 $\nu(N\cap K)=0$. 对每个包含 $N\cap K$ 的相对紧开集 $U$，有 $\int_U g^-\cdot d\lambda\leqslant\int_U g^+\cdot d\lambda$；事实上，由假定，对属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的任一非负函数 $f$，有

$$\int(g^+-g^-)fd\lambda\geqslant 0,$$

并且只须注意对任一满足 $0\leqslant f\leqslant\varphi_U$ 的函数 $f\in\mathscr{K}_R(X)$，有 $\int_U g^-d\lambda=\sup\int g^-fd\lambda$，$\int_U g^+d\lambda=\sup\int g^+fd\lambda$ (13.5.1).

由于在 $N\cap K$ 上 $g^+(x)=0$，故 $\int_{N\cap K}g^+d\lambda=\inf\limits_U\int_U g^+d\lambda=0$；因而 $\int_{N\cap K}g^-d\lambda=\inf\limits_U\int_U g^-d\lambda=0$，这就证明了 $\nu(N\cap K)=0$(13.14.3).

现在，设 $\rho$ 是使得 $\rho\geqslant 0$ 与 $\rho\geqslant g\cdot\lambda$ 的测度，令 $\lambda+\rho=\sigma$，我们可以写(13.15.1) $\rho=u\cdot\sigma$ 与 $\lambda=v\cdot\sigma$，其中 $u$ 与 $v$ 为局部 $\sigma$ 可积，并且关于 $\sigma$ 几乎处处有 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$. 由此推出，关于 $\sigma$ 几乎处处有 $u\geqslant gv$，因而关于 $\sigma$ 几乎处处有 $u\geqslant(gv)^+=g^+v$；然而根据 (13.14.5)，就有 $\rho=u\cdot\sigma\geqslant(g+v)\cdot\sigma=g^+\cdot\lambda$.

最后证明(iii). 若序列 $(g_n\cdot\lambda)$ 在 $M_R(X)$ 中上有界，则对属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的每个非负函数 $f$，有 $\sup\limits_n\int fg_nd\lambda<+\infty$. 从而函数 $fg=\sup\limits_n fg_n$ 为 $\lambda$ 可积且 $\int fgd\lambda=\sup\limits_n\int fg_nd\lambda$ (13.8.1). 因而 $g$

为局部 $\lambda$ 可积(13.13.1)且 $g\cdot\lambda=\sup_n(g_n\cdot\lambda)$ (13.4.4)。

**(13.15.3.6)** 附注.我们可以说,对于正测度 $\rho$,映射 $\tilde{g}\to g\cdot\rho$ 是局部 $\rho$ 可积有限实值函数(关于 $\rho$) 的等价类所成的向量空间 $L^1_{\text{loc},\boldsymbol{R}}(X,\rho)$ 到以 $\rho$ 为基的实测度所成的向量空间上的一个线性双射,而且这个双射保持序关系. 这就是我们在以下 (直到 13.19节) 的推理中要反复用到的基本事实。

还要注意,当赋予 $L^1_{\text{loc},\boldsymbol{R}}(X,\rho)$ (13.13.4) 中定义的拓扑并赋予 $M(X)$ 粗疏拓扑时,把映射 $\tilde{g}\to g\cdot\rho$ 看作取值于 $M(X)$ 中,它就是连续的.

**(13.15.4)** 在空间 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 内,每个上有界的子集 $H$ 都有上确界 $\nu$,且存在由 $H$ 的元组成的递增序列 $(\mu_n)$,使得 $\nu=\sup_n(\mu_n)$.

对属于 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 的每个非负函数 $f$,按照假设,$\mu(f)$ (其中 $\mu\in H$) 所成的集有有限的上确界. 我们来证明 $\sup_{\mu\in H}\mu(f)$ 等于 $\nu(f)$. 为此考虑 $X$ 中的紧集的递增序列 $(K_n)$,它形成 $X$ 的覆盖,并使得 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 是 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K_n)$ 的并 (3.18.3),再设 $(g_{mn})_{m\geqslant1}$ 是在每个 Banach 空间 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K_n)$ 内处处稠密的序列((7.4.4) 与 (3.10.9)). 对每个数偶 $(m,n)$,存在由 $H$ 的元组成的序列 $(\mu_{mnp})_{p\geqslant1}$,使得 $\sup_p(\mu_{mnp}(g^+_{mn}))=\sup_{\mu\in H}\mu(g^+_{mn})$. 现在令

$$\lambda_r=\sup_{m\leqslant r,n\leqslant r,p\leqslant r}(\mu_{mnp})$$

(根据 (13.15.3),它是存在的). 序列 $(\lambda_r)$ 是递增的且以 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 中的某测度为上界,因而它有上确界 $\nu_0$,$\nu_0$ 还是它的粗疏极限 (13.4.4). 可是,如果 $\mu\in H$,则 $\mu(g^+_{mn})\leqslant\nu_0(g^+_{mn})$ 对任何数偶 $(m,n)$ 成立,因而由连续性并考虑到关系式 $|f^+-g^+_{mn}|\leqslant|f-g_{mn}|$,对 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K_n)$ 中每个非负的 $f$ 与每个 $n$ 都有 $\mu(f)\leqslant\nu_0(f)$,从而 $\mu\leqslant\nu_0$. 另一方面,若对一切 $\mu\in H$ 有 $\rho\geqslant\mu$,则由 $\nu_0$ 的定义,特别有 $\rho\geqslant\nu_0$,因而 $\nu_0$ 正是所求的上确界 $\nu$ 且 $\nu(f)=\sup_{\mu\in H}\mu(f)$ 对 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 中的一切非负函数 $f$ 成立.

**(13.15.5)** (**Lebesgue-Nikodym 定理**). 设 $\mu$, $\nu$ 是 $X$ 上的两个

正测度，则下列陈述是等价的：

a) $\nu$ 是以 $\mu$ 为基的测度.

b) 每个 $\mu$ 可忽略集是 $\nu$ 可忽略的.

b′) 每个 $\mu$ 可忽略紧集是 $\nu$ 可忽略的.

c) 对每个同时为 $\mu$ 可积与 $\nu$ 可积的非负函数 $f$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得关系 $0 \leqslant h \leqslant f$，$\int^* h d\mu \leqslant \delta$ 蕴涵 $\int^* h d\nu \leqslant \varepsilon$.

c′) 对每个紧集 $K \subset X$ 与每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得关系 $A \subset K$ 与 $\mu^*(A) \leqslant \delta$ 蕴涵 $\nu^*(A) \leqslant \varepsilon$（$\nu$ 关于 $\mu$ 的“**绝对连续性**”）.

d) $\nu = \sup\limits_n(\inf(\nu, n\mu))$.

a) 蕴涵 b) 可由(13.14.1)与(13.6.3)立即得到.

显然 b) 蕴涵 b′). 反之，假定 b′) 满足并设 $N$ 是 $\mu$ 可忽略集. 由于 $X$ 是可数个紧集 $K_n$ 的并，所以只须证明每个集 $N \cap K_n$ 为 $\nu$ 可忽略，因而我们还可以假定 $N$ 是相对紧的. 由于此时 $N$ 具有一个紧邻域(3.18.2)，所以由(13.7.9)与(13.8.7(i))得知，可以只限于考虑 $N$ 是可数个相对紧开集的交的情形；然而在这种情形 $N$ 是 $\nu$ 可积的((13.7.7)与(13.8.7)(i))，因而紧集序列 $(H_n)$ 与 $\nu$ 可忽略集 $P$ 的并也是 $\nu$ 可积的. 由于按假设 $\nu(H_n) = 0$ 对一切 $n$ 成立，故由此得到 $N$ 是 $\nu$ 可忽略的.

为证明 b) 蕴涵 d) 与 d) 蕴涵 a)，注意 $\mu$，$\nu$ 可写为 $\mu = u \cdot \lambda$，$\nu = v \cdot \lambda$，这里 $\lambda$ 是一个正测度，而 $u$ 与 $v$ 是局部 $\lambda$ 可积的非负有限函数((13.15.2)与(13.15.3)). 若令 $v' = \sup\limits_n(\inf(v, nu))$，$v'' = v - v'$，则有 $v' \geqslant 0$，$v'' \geqslant 0$ 与 $\sup\limits_n(\inf(\nu, n\mu)) = v' \cdot \lambda$ (13.15.3). 于是，为证明 b) 蕴涵 d)，只须证明，若 b) 满足，就有 $v'' \cdot \lambda = 0$. 可是使得 $v''(x) > 0$ 的点 $x \in X$ 的集 $A$ 包含在使得 $u(x) = 0$ 的点 $x$ 的集内，因而是 $\mu$ 可忽略的 (13.14.1)，从而由假定它是 $\nu$ 可忽略的. 又 $v'' = v\varphi_A$，故 ((13.14.1) 与 (13.6.3))

关系式 $\nu(A)=0$ 等价于 $\nu''$ 为 $\lambda$ 可忽略，从而推出 $\nu''\cdot\lambda=0$ (13.14.4)．为证明 d) 蕴涵 a)，只须注意条件 d) 表示 $\nu''\cdot\lambda=0$，因而集 $A$ 为 $\lambda$ 可忽略 (13.14.4)． 此时在 $u(x)>0$ 的点 $x$ 处令 $g(x)=v(x)/u(x)$，而在其他点处令 $g(x)=0$，则在一切点 $x\notin A$ 处都有 $v(x)=g(x)u(x)$，于是 $v(x)=g(x)u(x)$ 对于 $\lambda$ 几乎处处成立．故 $g$ 为局部 $\mu$ 可积且 $\nu=g\cdot\mu$ (13.14.5)．

剩下要证明 b)，c) 与 c′) 的等价性．把 c) 应用于 $f=\varphi_K$，显见 c′) 是 c) 的推论．另一方面，由 c′) 推出，对每个 $\mu$ 可忽略的相对紧集 $A$，有 $\nu^*(A)=0$．由于每个 $\mu$ 可忽略集是 $\mu$ 可忽略的相对紧集的一个序列的并(3.18.3)，这就证明了 c′) 蕴涵 b)．最后用反证法来证明 b) 蕴涵 c)． 假定存在同时为 $\mu$ 可积与 $\nu$ 可积的非负函数 $f_0$ 以及数 $a>0$，使对每个正整数 $n$，存在函数 $g_n$，使得 $0\leqslant g_n\leqslant f_0$，$\int^* g_n d\mu\leqslant 2^{-n}$ 且 $\int^* g_n d\nu>a$．根据(13.5.5)，显然可以适当选取 $g_n'\in\mathscr{I}$，并用 $\inf(f_0,g_n')$ 代替 $g_n$ 而不改变上述性质，因而可以假定 $g_n$ 为 $\mu$ 可积与 $\nu$ 可积(13.9.13)的．此时令

$$h=\limsup_{n\to\infty} g_n=\inf_n h_n,$$

其中

$$h_n=\sup_{p>0} g_{n+p}\leqslant\sum_{p=1}^{\infty} g_{n+p}.$$

由于对一切 $n$ 有 $g_n\leqslant f_0$，所以对一切 $n$，$h_n$ 都是 $\mu$ 可积与 $\nu$ 可积(13.8.2)的，且有

$$\int h_n d\mu\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\int g_{n+p}d\mu\leqslant 2^{-n}$$

(13.5.8)，因而 $\int h d\mu=0$ (13.8.1)．于是假定 b) 蕴涵 $h$ 为 $\nu$ 可忽略(13.6.3)；但我们有 $\int h d\nu=\lim_{n\to\infty}\int h_n d\nu\geqslant a$ (13.8.1)，这就得出矛盾，从而 b) 蕴涵 c)．

**(13.15.6)** 设 $\mu$ 与 $\nu$ 是 $X$ 上的两个正测度，则下面两个陈述是

等价的：

a) 关于 $\mu$ 的可忽略集是关于 $\nu$ 的可忽略集，反之亦然.

b) $\nu = g \cdot \mu$，这里 $g$ 是局部 $\mu$ 可积函数且关于 $\mu$ 几乎处处有 $g(x) > 0$.

如果 a) 满足，则由 (13.15.5) 得知 $\nu = g \cdot \mu$，$\mu = h \cdot \nu$，其中 $g$（相应地，$h$）是非负的且关于 $\mu$（相应地，关于 $\nu$）是局部可积的，因而 $hg$ 是局部 $\mu$ 可积的且有 $\mu = (hg) \cdot \mu$ (13.14.5)，这就推出(13.15.3) $hg$（关于 $\mu$）等价于函数 1，所以关于 $\mu$ 几乎处处有 $g(x) > 0$ 与 $h(x) = 1/g(x)$. 反之，假定 $\nu = g \cdot \mu$ 且 $g(x) > 0$ 关于 $\mu$ 几乎处处成立，则由于 $(1/g(x))\,g(x)$ 关于 $\mu$ 几乎处处等于 1，所以 $1/g$ 为局部 $\nu$ 可积且 $\mu = (1/g) \cdot \nu$ (13.14.5)，从而条件 a) 满足.

当 $\mu$ 与 $\nu$ 满足 (13.15.6) 中的等价条件时，我们称这两个正测度在 $X$ 上是等价的；显然这是 $X$ 上的正测度所成的集上的一个等价关系，而可测函数的概念对等价测度是相同的(13.9.4).

**(13.15.7)** 对于 $X$ 上的每个正测度 $\mu$，存在连续函数 $h$，使对一切 $x \in X$ 有 $h(x) > 0$，并且测度 $\nu = h \cdot \mu$（根据(13.15.6)，它等价于 $\mu$）是有界的.

事实上，设 $(U_n)$ 是 $X$ 中的相对紧开集的递增序列，满足 (3.18.3) 中所述的性质；对每个 $n$，设 $f_n$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的连续映射，使在 $U_n$ 上 $f_n(x) = 1$ 而在 $X - U_{n+1}$ 上 $f_n(x) = 0$ (4.5.2). 设 $(a_n)$ 是满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ 的正数列，则级数 $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ 在 $X$ 内依范数收敛 (7.1)，因而 $h$ 是 $X$ 上的连续函数 (7.2.1)，且对一切 $x \in X$ 有 $h(x) > 0$. 令 $\nu = h \cdot \mu$，则有

$$\nu^*(1) = \int^* h\, d\mu \leqslant \sum_n a_n \int f_n\, d\mu$$

((13.14.1)与(13.5.8)). 例如，若 $\int f_n d\mu > 1$，取 $a_n = 2^{-n}\left(\int f_n d\mu\right)^{-1}$，否则取 $a_n = 2^{-n}$，就有 $\sum_n a_n < +\infty$ 与 $\nu^*(1) < +\infty$，这就证

明了所述命题。

**(13.15.8)** 设 $(\mu_n)$ 是 $X$ 上的正测度序列，则存在 $X$ 上的有界正测度 $\nu$，使得关系式 $\nu(N)=0$ 等价于对任意的 $n$，有 $\mu_n(N)=0$（这蕴涵(13.15.5)每个测度 $\mu_n$ 都以 $\nu$ 为基）。又若 $\nu'$ 是 $X$ 上具有所述性质的另一正测度，则 $\nu$ 与 $\nu'$ 等价。

最后的断言由等价测度的定义得到。为证明第一个断言，根据 (13.15.7)，我们一开始就可假设所有测度 $\mu_n$ 均有界；对每个 $\mu_n$ 乘以适当的正常数，还可假设 $\mu_n(1)\leqslant 2^{-n}$。

如果 $\nu_n=\sup(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，则根据 (13.15.3.2)，

$$\nu_n(f)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu_k(f)\leqslant 1$$

对每个满足 $0\leqslant f\leqslant 1$ 的函数 $f\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 与每个整数 $n$ 都成立，因而(13.4.4) 递增序列 $(\nu_n)$ 在 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ 中粗疏收敛于它的上确界 $\nu$，且对每个满足 $0\leqslant f\leqslant 1$ 的 $f\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$，有 $\nu(f)\leqslant 1$，因而 $\nu^*(1)\leqslant 1$，故 $\nu$ 有界。于是我们可以写 $\mu_n=g_n\cdot\nu$，其中 $g_n$ 是局部 $\nu$ 可积的非负函数，从而$\nu_n=(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}g_k)\cdot\nu$ (13.15.3.3)，因此

$$\nu=(\sup_n g_n)\cdot\nu$$

(13.15.3.5)。这样，显然关系式 $\nu(N)=0$ 蕴涵 $\mu_n(N)=0$ 对一切 $n$ 成立 (13.15.5)。反之，$\mu_n(N)=0$ 对一切 $n$ 成立表明每个 $g_n\varphi_N$ 是 $\nu$ 可忽略的 (13.14.1)，因而 $(\sup\limits_n g_n)\varphi_N$ 也同样是 $\nu$ 可忽略的(13.6.2)，所以 $N$ 是 $\nu$ 可忽略的。

**(13.15.9)** 设 $(\mu_n)$ 是正测度的递增序列，它在 $M_{\boldsymbol{R}}(X)$内有上确界 $\nu$，则为使函数 $f$ 是 $\nu$ 可积的，必须且只须它对一切 $n$ 都是 $\mu_n$ 可积的，并且

$$\sup_n\int|f|\,d\mu_n<+\infty。$$

此时我们有

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f\,d\mu_n。$$

事实上，可以写 $\mu_n = g_n \cdot \nu$，其中 $g_n$ 是非负的且是局部 $\nu$ 可积的，而序列 $(g_n)$ 是递增的；进而还有 $\nu = (\sup g_n) \cdot \nu$ (13.15.3)，因此对于 $\nu$ 几乎处处有 $\sup\limits_n g_n = 1$. 若 $f$ 为 $\nu$ 可积，则根据 (13.9.6) 与不等式 $|fg_n| \leqslant |f|$ 关于 $\nu$ 几乎处处成立以及 (13.9.13)，就得到对于一切 $n$，$fg_n$ 均为 $\nu$ 可积. 因而对于一切 $n$，$f$ 均为 $\mu_n$ 可积(13.14.3). 反之，如果对于一切 $n$，$f$ 均为 $\mu_n$ 可积，则函数 $fg_n$ 为 $\nu$ 可积(13.14.3)，且关于 $\nu$ 几乎处处有 $f = \lim\limits_{n\to\infty} fg_n$，故 $f$ 为 $\nu$ 可测 (13.9.11)；此外还有 $|f| = \sup\limits_n |fg_n|$ 关于 $\nu$ 几乎处处成立. 因而所述结论由(13.9.13)与(13.8.1)得到，而最后的断言则由控制收敛定理(13.8.4)得到.

## 16. 应用：I. 关于复测度的积分

**(13.16.1)** 设 $\mu, \nu$ 是 $X$ 上的两个正测度，则

(i) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$.

(ii) 为使函数 $f$ 是$(\mu + \nu)$可积的(相应地，$(\mu + \nu)$可测的)，必须且只须它是 $\mu$ 可积与 $\nu$ 可积的(相应地，$\mu$ 可测与 $\nu$ 可测的)，此时我们有

**(13.16.1.1)** $$\int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu.$$

事实上，可以写 $\mu = g \cdot (\mu + \nu)$，$\nu = h \cdot (\mu + \nu)$，其中 $g$ 与 $h$ 是局部 $(\mu + \nu)$ 可积的非负函数((13.15.1)与(13.15.3))；又由于 $\mu + \nu = (g + h) \cdot (\mu + \nu)$，所以 $g(x) + h(x) = 1$ 关于 $\mu + \nu$ 几乎处处成立. 令 $\lambda = \mu + \nu$. 为证明 (i)，我们必须建立对任何非负函数 $f$ 成立的等式

$$\int^* f d\lambda = \int^* fg d\lambda + \int^* fh d\lambda.$$

然而 $\int^* f d\lambda \leqslant \int^* fg d\lambda + \int^* fh d\lambda$ 是显然的. 另一方面，可以限于

$\int^* f d\lambda < +\infty$ 的情形. 于是存在属于 $\mathscr{I}$ 的 $\lambda$ 可积函数的递减序列 $(u_n)$, 使得 $f \leqslant u_n$ 且 $\int^* f d\lambda = \inf_n \int u_n d\lambda$. 由于 $\int u_n d\lambda = \int u_n g d\lambda + \int u_n h d\lambda$, 所以通过取极限即可由此导出所需的不等式. 于是结论 (ii) 由(13.14.2)与(13.14.3)导出.

现在考虑$X$上的复测度 $\lambda$; 我们把$X$上的复值函数 $f$ 称为 **$\lambda$ 可积的**,如果它是 $|\lambda|$ 可积的. 若令 $\lambda_1 = \mathscr{R}\lambda$, $\lambda_2 = \mathscr{I}\lambda$, 则由(13.3.7) 与(13.16.1) 得知, $f$ 是 $\lambda$ 可积的等价于它同时是 $\lambda_1$ 可积与 $\lambda_2$ 可积的. 由于(13.15.3.1) $|\lambda_1| = \lambda_1^+ + \lambda_1^-$, $|\lambda_2| = \lambda_2^+ + \lambda_2^-$, 所以又得知, $f$ 是 $\lambda$ 可积的等价于 $f$ 关于四个正测度 $\lambda_1^+$, $\lambda_1^-$, $\lambda_2^+$, $\lambda_2^-$ 都是可积的.

此时我们把复数

**(13.16.2)** $$\int f d\lambda = \int f d\lambda_1^+ - \int f d\lambda_1^- + i\int f d\lambda_2^+ - i\int f d\lambda_2^-$$

称为 $f$ 关于 $\lambda$ 的**积分**.

这样定义的映射 $f \to \int f d\lambda$ 显然是复向量空间 $\mathscr{L}_C^1(X, |\lambda|)$上的一个 $C$ 线性形式,它是 $\mathscr{K}_C(X)$ 上给定的 $C$ 线性形式 $\lambda$ 的延拓.

**(13.16.3)** 对于$X$上任一复测度 $\lambda$, 有 $\lambda = h \cdot |\lambda|$,其中 $h$ 是局部 $|\lambda|$ 可积函数,且关于 $|\lambda|$ 几乎处处有 $|h(x)| = 1$.

事实上,设 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 分别是实测度 $\mathscr{R}\lambda$ 与 $\mathscr{I}\lambda$,则有$|\lambda_1| \leqslant |\lambda|$ 与 $|\lambda_2| \leqslant |\lambda|$ (13.3.7), 因而 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是以 $|\lambda|$ 为基的测度, 从而 $\lambda$ 也同样是以$|\lambda|$为基的测度. 若 $\lambda = h \cdot |\lambda|$, 则由此可得 $|\lambda| = |h| \cdot |\lambda|$ (13.13.5),而这蕴涵 $|h(x)| = 1$ 关于$|\lambda|$几乎处处成立(13.15.3).

现在由定义(13.16.2)与(13.14.3) 得到,对任一 $\lambda$ 可积函数 $f$, 有

**(13.16.4)** $$\int f d\lambda = \int f h d|\lambda|,$$

根据(13.16.3)与(13.10.3)，由此可立即得到

**(13.16.5)** $$\left|\int f d\lambda\right| \leqslant \int |f| d|\lambda|.$$

我们称一个函数是 $\lambda$ **可忽略的**(相应地，$\lambda$ **可测的**)，如果它是 $|\lambda|$ 可忽略的(相应地，$|\lambda|$ 可测的)；对于集也有类似的定义.

如果 $\lambda$ 与 $\mu$ 是两个复测度且 $f$ 同时为 $\lambda$ 可积与 $\mu$ 可积，则根据 (13.16.1) 与不等式 $|\lambda+\mu| \leqslant |\lambda| + |\mu|$ (13.3.8)，$f$ 也是 $(\lambda+\mu)$ 可积的.

设 $\lambda$ 是复测度，我们称复值函数 $g$ 是**局部 $\lambda$ 可积的**，如果它是局部 $|\lambda|$ 可积的. 此时对每个函数 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，$gf$ 是 $\lambda$ 可积的，而且如 (13.13) 中所看到的，$f \to \int gf d\lambda$ 是一个测度，记作 $g\cdot\lambda$. 此外，若 $\lambda = h\cdot|\lambda|$ (13.16.3)，则 $\int fg d\lambda = \int fgh d|\lambda|$，换言之，$g\cdot\lambda = (gh)\cdot|\lambda|$，这就把对形如 $g\cdot\lambda$ 的测度的研究归结为 $\lambda$ 是正测度的情形. 特别由(13.13.4)得到

**(13.16.6)** $$|g\cdot\lambda| = |g|\cdot|\lambda|.$$

## 17. 应用：II. $L^1$ 的对偶空间

**(13.17.1)** 设 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，则对每个函数 $g \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{\infty}(X,\mu)$ (相应地，$g \in \mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X,\mu)$)，映射 $\theta_g: f \to \int fg d\mu$ 是空间 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{1}(X,\mu)$ (相应地，$\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{1}(X,\mu)$) 上的(关于由半范数 $N_1$ 所定义的拓扑的)连续线性形式. Banach 空间 $L_{\mathbf{R}}^{1}(X,\mu)$(相应地，$L_{\mathbf{C}}^{1}(X,\mu)$) 上对应的连续线性形式 $\tilde{\theta}_g$: $\tilde{f} \to \mu(\tilde{f}\tilde{g})$，以数 $N_\infty(g)$ 作为它的范数 (5.7.1). 反之，$\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{1}(X,\mu)$(相应地，$\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{1}(X,\mu)$) 上的每个连续线性形式可写成 $f \to \int fg d\mu$，其中 $g$ 是 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{\infty}(X,\mu)$(相应地，$\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X,\mu)$) 中的函数，且 $g$ 的等价类是唯一确定的.

我们限于对 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{1}$ 的情形进行证明. $\theta_g$ 是 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{1}$ 上的连续线性

形式这一事实以及不等式 $\|\tilde{\theta}_g\| \leqslant N_\infty(g)$ 从(13.12.5)得到. 为证明 $\|\tilde{\theta}_g\| = N_\infty(g)$，可以只限于 $g$ 不是 $\mu$ 可忽略(即 $N_\infty(g) > 0$)的情形，$g$ 为 $\mu$ 可忽略的情形是显然的.

设 $a$ 是满足 $0 < a < N_\infty(g)$ 的任意数，则存在 $X$ 的紧子集 $K$，它的测度大于0，且使得 $g|K$ 连续并在 $K$ 上有 $|g(x)| > a$((13.9.9)与(13.9.4)). 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $K$ 的有限覆盖 $(U_i)$，其中 $U_i$ 是 $K$ 中的开集，并使得 $g$ 在每个 $U_i$ 上的振幅 $\leqslant\varepsilon$ (3.16.5)；于是存在 $K$ 分解为有限个可积集 $A_k$ 的划分，使得 $g$ 在每个 $A_k$ 上的振幅 $\leqslant \varepsilon$ (13.9.12.1)，因而 $A_k$ 中至少有一个集(把它记作 $A$)具有正测度：$\mu(A) > 0$. 设 $b$ 是 $g$ 在 $A$ 内所取的一个值，我们有 $|b| > a$，且对一切 $x \in A$，有 $|g(x) - b| \leqslant \varepsilon$. 现在令 $f = (\bar{b}/(|b|\mu(A)))\varphi_A$，显见 $f \in \mathscr{L}_C^1$，$N_1(f) = 1$. 并且还有

$$\left|\int \frac{\bar{b}}{|b|} g\varphi_A d\mu\right| = \left| |b|\mu(A) + \int \frac{\bar{b}}{|b|}(g-b)\varphi_A d\mu \right|$$
$$\geqslant (|b| - \varepsilon)\mu(A) \geqslant (a-\varepsilon)\mu(A),$$

从而 $\left|\int fg d\mu\right| \geqslant a - \varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 且 $a < N_\infty(g)$ 是任取的，这就证明了所述断言(5.7.1).

反之，设 $u$ 是 $\mathscr{L}_C^1$ 上的连续线性形式，则存在数 $c > 0$，使对一切 $f \in L_C^1$，有 $|u(f)| \leqslant cN_1(f)$ (12.14.1). 我们知道(13.11.6)，对 $X$ 的任一紧子集 $K$，$\mathscr{L}_C^1(X,\mu)$ 的拓扑在 $\mathscr{K}_C(X;K)$ 上的诱导拓扑粗于由范数 $\|f\|$ 所定义的拓扑，因而线性形式 $u$ 在每个 Banach 空间 $\mathscr{K}_C(X;K)$ 上(关于范数 $\|f\|$)连续，换言之，$u$ 的限制 $u|\mathscr{K}_C(X)$ 是一个(复)测度 $\nu$. 再由不等式 $|u(f)| \leqslant cN_1(f)$ 对一切 $f \in \mathscr{K}_C(X)$ 成立与(13.3.2.1)，就有 $|\nu|(|f|) \leqslant cN_1(f) = c\mu(|f|)$. 于是由(13.15.1)与(13.15.3)得知，存在局部 $\mu$ 可积函数 $g_0$，使得关于 $\mu$ 几乎处处有 $|g_0(x)| \leqslant c$，且有 $|\nu| = g_0 \cdot \mu$. 若 $\nu = h \cdot |\nu|$ (13.16.3)，则有 $\nu = g \cdot \mu$，其中 $g = g_0 h$ (13.14.5)，且显然 $g \in \mathscr{L}_C^\infty(\mu)$. 这样，线性形式 $u$ 与 $\theta_g$ 在 $\mathscr{L}_C^1$ 的子空间 $\mathscr{K}_C(X)$ 上相同，而 $\mathscr{K}_C(X)$ 在 $\mathscr{L}_C^1$ 内

处处稠密（13.11.6）；由于 $\mu$ 与 $\theta_g$ 都在 $\mathscr{L}_C^1$ 上连续，故它们相等（3.15.2）．最后，关系式 $\theta_{g_1}=\theta_{g_2}$ 蕴涵 $\tilde{g}_1=\tilde{g}_2$ 可由（13.15.3）得到．证毕．

于是我们看到，映射 $\tilde{g}\to\tilde{\theta}_g$ 是 Banach 空间 $L_C^\infty$ 到 Banach 空间 $L_C^1$ 的对偶空间上的一个线性等距（12.15）．

注意，由（13.12.5）得到，对每个函数 $f\in\mathscr{L}_C^1(X,\mu)$，$\mathscr{L}_C^\infty(X,\mu)$ 上的线性形式 $g\to\int fgd\mu$ 关于由半范数 $N_\infty$ 所定义的拓扑是连续的；然而一般地说，存在 $\mathscr{L}_C^\infty(X,\mu)$ 上的线性形式，它关于上述拓扑是连续的，但却不属于前述类型．

## 问　　题

1）a）设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，试证，对 $X$ 到 $\bar{R}$ 的任何 $\mu$ 可测映射 $f$ 与满足 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 的任何数 $p$，有 $N_p(f)=\sup\int^*|fg|d\mu$，这里 $g$ 取遍属于 $\mathscr{K}_R(X)$ 的使得 $N_q(g)\leqslant 1$ 的函数所成的集，而 $q=p/(p-1)$（若 $p=1$，则取 $q=+\infty$）．叙述并证明当 $f$ 是 $X$ 到 $C$ 的 $\mu$ 可测映射时的类似性质．

b）假定 $1<p<+\infty$；对每个函数 $g\in\mathscr{L}_R^q(X,\mu)$（相应地，$g\in\mathscr{L}_C^q(X,\mu)$），以 $\tilde{\theta}_{\tilde{g}}$ 表示 $L_R^p(X,\mu)$（相应地，$L_C^p(X,\mu)$）上的线性形式 $\tilde{f}\to\mu(\tilde{f}\tilde{g})$，试证 $\tilde{g}\to\tilde{\theta}_{\tilde{g}}$ 是 $L_R^q(X,\mu)$（相应地，$L_C^q(X,\mu)$）到 Banach 空间 $L_R^p(X,\mu)$（相应地，$L_C^p(X,\mu)$）的对偶 Banach 空间（5.7.3）上的一个等距．（利用 a）作如同（13.17.1）中的推理．）

2）设 $X$ 是紧空间 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}_C^2(X,\mu)$ 中的正规正交序列．令

$$K_n(s,t)=\sum_{k=1}^n f_k(s)\overline{f_k(t)},\quad H_n(s)=\int_X|K_n(s,t)|d\mu(t)$$

（序列 $(f_n)$ 的"第 $n$ **Lebesgue 函数**"，参阅 11.6 问题 2）．对任一复值函数 $g\in\mathscr{L}_C^2(X,\mu)$，以 $s_n(g)$ 表示函数

$$x\to\sum_{k=1}^n(g|f_k)f_k(x)=\int K_n(x,y)g(y)d\mu(y).$$

a）设 $x_0$ 是 $X$ 的一个点，则为使对 $X$ 上的每个连续复值函数 $g$，部分和

$s_n(g)$ 在点 $x_0$ 处有界(这个界依赖于 $g$ 与 $x_0$),必须且只须数 $H_n(x_0)$ 所成的集有界(利用问题 1 a)与 Banach-Steinhauss 定理).(这个结果推广了11.6问题 2 a).)

b) 为使对于在 $X$ 上连续的每个复值函数 $g$,部分和 $s_n(g)$ 都一致收敛于 $g$,必须且只须:1°每个在 $X$ 上连续的复值函数都能由 $f_n$ 的线性组合来一致逼近;2°存在常数 $a$,使对任何 $n$ 与 $x\in X$,有 $|H_n(x)|\leqslant a$.(为证明条件 2°的必要性,注意若 $s_n(g)$ 一致收敛于 $g$,则对任何递增整数列 $(n_k)$ 与 $X$ 中的任何点列 $(x_k)$,数列 $\left(\int K_{n_k}(x_k,y)g(y)d\mu(y)\right)$ 有界(这个界依赖于 $g$),同时利用 Banach-Steinhaus 定理.)

特别地,对于 Haar 正规正交系(8.7问题7),Lebesgue 函数是一致有界的.

3) 设 $X$ 是局部紧空间,$\mu$ 是 $X$ 上的正测度,$p$ 是满足 $1\leqslant p<+\infty$ 的数,$q=p/(p-1)$.试证,如果 $g$ 是复值可测函数,满足下述条件:对每个函数 $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(X,\mu)$,函数 $fg$ 均可积,则 $g$ 属于 $\mathscr{L}^q_{\mathbf{C}}(X,\mu)$.(利用闭图象定理(12.16.11),证明 $L^p$ 到 $L^1$ 的映射 $\tilde{f}\to\tilde{f}\tilde{g}$ 是连续的.)(参阅12.16问题24.)

4) 设 $U$ 是 $L^1_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 的连续自同态,满足13.11问题16的条件,于是 $U$ 的转置 ${}^tU$ 是 Banach 空间 $L^\infty_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 的连续自同态,其范数不大于1(12.15问题4),且关系式 $\tilde{f}\geqslant 0$ 蕴涵 ${}^tU\cdot\tilde{f}\geqslant 0$.对每个函数 $f\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(X,\mu)$,我们还用 ${}^tU\cdot f$ 表示类 ${}^tU\cdot\tilde{f}$ 中的函数.

a) 设 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}$ 的函数的序列,它几乎处处收敛于 $f$,且序列 $(N_\infty(f_n))$ 有界,试证序列 $({}^tU\cdot f_n)$ 几乎处处收敛于 ${}^tU\cdot f$.(考虑函数 $g_n=\sup\limits_p|f_{n+p}-f_n|$ 所成的序列并利用下述事实:对每个函数 $h\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}$,关系式 $\int({}^tU\cdot g_n)hd\mu=\int g_n(U\cdot h)d\mu$ 成立.)

b) 设 $\Psi$ 是属于 $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathbf{C}}$ 的非负函数,并采用13.11问题16中的符号.试证,若 ${}^tU\cdot\Psi\leqslant\Psi$ 几乎处处成立,则对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$,有 $\int_{E(f)}f\Psi d\mu\geqslant 0$(考虑测度 $\Psi\cdot\mu$ 并应用13.11问题16 d)).

c) 使用13.11问题18的记号,试证几乎处处有 ${}^tU\cdot\varphi_{X_0}\leqslant\varphi_{X_0}$.由此推断,对于在 $X_0$ 上几乎处处为零的任何函数 $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$,函数 $U\cdot f$ 在 $X_0$ 上几乎处处为零.

5) 使用13.11问题18的记号,并假定集 $X_0$ 是可忽略的.当 $\mu$ 为有界且 $U\cdot 1=1$ 时,集 $X_0$ 总是可忽略的.

a) 试证，若 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{\infty}$ 且几乎处处有 ${}^tU\cdot f\leqslant f$，则 ${}^tU\cdot f=f$ 几乎处处成立（估计函数 $(f-{}^tU\cdot f)(\Phi+U\cdot\Phi+\cdots+U^n\cdot\Phi)$ 的积分的上界）.

b) 设 $\mathscr{J}$ 是使得 ${}^tU\cdot h=h$ 几乎处处成立的函数 $h\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{\infty}$ 的集（换言之，$\mathscr{J}$ 是使得类 $\tilde{h}$ 在 ${}^tU$ 下不变的函数 $h$ 的集），试证常数属于 $\mathscr{J}$，且对于 $\mathscr{J}$ 中每个使得序列 $(N_\infty(h_n))$ 有界的函数列 $(h_n)$，$\sup\limits_n h_n$ 属于 $\mathscr{J}$（利用 a)与问题 4 a)）. 由此推断，为使 $h\in\mathscr{J}$，必须且只须对任何 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，集 $h^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ 的特征函数属于 $\mathscr{J}$.

c) 试证，若 $h\in\mathscr{J}$，$f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$，则几乎处处有 $U\cdot(hf)=h(U\cdot f)$（归结为 $h=\varphi_A$ 的情形并证明 $(1-\varphi_A)(U\cdot(\varphi_A f))$ 的积分为 0）.

d) 试证形如 $h\Phi+g-U\cdot g$（其中 $h\in\mathscr{J}$，$g\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$）的函数的集 $\mathscr{V}$ 在 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 内处处稠密.（利用 12.15 问题 4 f)，证明若 $u\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{\infty}$ 且 $\int u(g-U\cdot g)d\mu=0$ 对一切函数 $g\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 成立，则必有 $u\in\mathscr{J}$，并由此推断 $\int u\Phi d\mu=0$.）

e) 若 $f=h\Phi+g-U\cdot g\in\mathscr{V}$，则序列 $(R_n(f,\Phi))$ 几乎处处趋于 $h$ 且有 $N_1(h\Phi)\leqslant N_1(f)$（证明最后的不等式时，考虑函数 $u=\operatorname{sgn}h$ 并估计 $\int ufd\mu$ 的值，估计时注意，$u\in\mathscr{J}$）. 由此推断存在 $L_{\mathbf{R}}^1$ 的连续自同态 $R_\Phi$，其范数不大于 1，而它的象是类 $\tilde{h}\tilde{\Phi}$（这里 $h\in\mathscr{J}$）所成的向量子空间在 $L_{\mathbf{R}}^1$ 内的闭包，且若 $f=h\Phi+g-U\cdot g\in\mathscr{V}$，则 $R_\Phi\cdot\tilde{f}$ 等于 $\tilde{h}\tilde{\Phi}$.

f) 对每个函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$，以 $R_\Phi\cdot f$ 表示属于类 $R_\Phi\cdot\tilde{f}$ 的函数；由 e) 推断序列 $(R_n(f,\Phi))$ 几乎处处趋于 $\Phi^{-1}(R_\Phi\cdot f)$. 再者，对每个 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，使得 $(R_\Phi\cdot f)(x)\geqslant\alpha\Phi(x)$ 的 $x\in X$ 所成的集的特征函数属于 $\mathscr{J}$，而且对每个函数 $h\in\mathscr{J}$，有 $\int h(R_\Phi\cdot f)d\mu=\int hfd\mu$.（若 $f_1\in\mathscr{V}$ 满足 $N_1(f-f_1)\leqslant\varepsilon$，证明使得 $R^*(f-f_1,\Phi)(x)\geqslant\sqrt{\varepsilon}$ 或 $R_\Phi(f-f_1)(x)\geqslant\sqrt{\varepsilon}\,\Phi(x)$ 的 $x\in X$ 所成的集关于 $\Phi\cdot\mu$ 的测度 $\leqslant\alpha\sqrt{\varepsilon}$，证明时利用 13.11 问题 18 c).）

g) 试证，若 $f,g$ 是属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$ 的任意两个函数且 $g$ 非负，则序列 $(R_n(f,g))$ 在集 $B$ 内几乎处处收敛于有限极限，这里 $B$ 是使得 $(U^n\cdot g)(x)>0$ 至少对一个非负整数 $n$ 成立的 $x\in X$ 的集（**Chacón-Ornstein 定理**）.

6) a) 设 $\sigma_1<\sigma_2$ 是两个实数，$B$ 是 $C$ 内的带域 $\sigma_1\leqslant\mathscr{R}s\leqslant\sigma_2$，$f$ 是在 $B$ 上连续，在 $\mathring{B}$ 内全纯的函数；此外还假定：

1° 对于 $s=\sigma_1+it$ 与 $s=\sigma_2+it$（$t$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内任意的数），有 $|f(s)|\leqslant M$.

2° 存在两个常数 $a>0$，$A>0$，使在 $B$ 内有 $|f(\sigma+it)|\leqslant Ae^{a|t|}$.

试证在这些条件下，在 $B$ 内有 $|f(s)|\leqslant M$（如 9.5 问题 17，取 $g(s)=e^{s^2}$，利用 Phragmén-Lindelöf 原理).

b) 若 $f$ 在 $B$ 上连续且有界，在 $\mathring{B}$ 内全纯，并对满足 $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$ 的每个 $\sigma$，令 $L(\sigma)=\sup\limits_{t\in R}|f(\sigma+it)|$，则有

$$(*)\qquad L(\sigma)^{\sigma_2-\sigma_1}\leqslant L(\sigma_1)^{\sigma_2-\sigma}L(\sigma_2)^{\sigma-\sigma_1}$$

（三线定理).（类似于 9.5 问题 10 进行证明，为此考虑函数 $s\to e^{\alpha s}f(s)$，其中 $\alpha$ 是属于 $\boldsymbol{R}$ 的适当的数；Hadamard 三圆定理可作为(*)的特殊情形推出.)

7) 设 $X$，$Y$ 是两个局部紧空间，$\mu$，$\nu$ 分别是 $X$，$Y$ 上的正测度，$E\subset L^1_C(X,\mu)$ 是 $\mu$ 可积阶梯函数的类组成的空间，$U$ 是 $E$ 到空间 $L^1_{loc,C}(Y,\nu)$(13.13) 的线性映射. 对于 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的区间 $[1,+\infty]$ 内的(有限或无穷)实数所成的每个元偶 $(p,q)$，我们称 $U$ 为 $(p,q)$ 型的，如果 $U$ 把 $E$ 映射到 $L^q_C(Y,\nu)$ 中，并且对 $E$ 赋予 $L^p_C(X,\mu)$ 的拓扑所诱导的拓扑且把 $U$ 看作 $E$ 到 $L^q_C(Y,\nu)$ 的线性映射时，$U$ 是连续的. 此时以 $\|U\|_{p,q}$ 表示这个线性映射的范数. 若 $p<+\infty$，则 $U$ 可连续延拓为 $L^p_C(X,\mu)$ 到 $L^q_C(Y,\nu)$ 的范数为 $\|U\|_{p,q}$ 的线性映射；若 $p=+\infty$ 而 $\mu$ 有界，则 $U$ 也可作如上的延拓.

试证，如果对于两个元偶 $(p_0,q_0)$，$(p_1,q_1)$，$U$ 同时是 $(p_0,q_0)$ 型与 $(p_1,q_1)$ 型的，则 $U$ 也是 $(p,q)$ 型的，这里

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},$$

其中 $t$ 是满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的任意的实数，并约定 $1/\infty=0$，$1/0=+\infty$；而且还有 $\|U\|_{p,q}\leqslant\|U\|^{1-t}_{p_0,q_0}\cdot\|U\|^t_{p_1,q_1}$ (**M. Riesz-Thorin 插值定理**).（对于 $f\in E$ 与 $g\in L^{q'}_C(Y,\nu)$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$ 估计 $\int|(U\cdot f)g|d\nu$ 的上界以利用问题 1；为此令 $f=|f|u$，$g=|g|v$，$|u|=|v|=1$，且对每个复数 $\zeta$，令 $f_\zeta=|f|^\zeta u$，$g_\zeta=|g|^\zeta v$. 现在适当选择两个仿射线性函数 $\zeta\to a\zeta+b$，$\zeta\to c\zeta+d$ 并对全纯函数

$$\zeta\to\int(U\cdot f_{a\zeta+b})g_{c\zeta+d}\,d\mu$$

应用三线定理.)

## 18. 测度的典则分解

$X$ 上的两个（复）测度 $\mu,\nu$ 称为**互相奇异的**，如果 $\inf(|\mu|,|\nu|)=0$. 称测度 $\mu$ **集中于集 $M$ 上**，或 $\mu$ **由集 $M$ 所支撑**，如果 $X-M$ 是 $|\mu|$ 可忽略的；这等价于 $|\mu|=\varphi_M\cdot|\mu|$ (13.15.3)；此时每个以 $|\mu|$ 为基的测度都集中于 $M$ 上.

**(13.18.1)** 为使两个测度 $\mu,\nu$ 是互相奇异的，必须且只须在 $X$ 内存在两个互不相交的集 $M,N$，使得 $\mu$ 集中于 $M$ 上而 $\nu$ 集中于 $N$ 上. 此时还可进一步假设 $M$ 与 $N$ 是普遍可测的.

事实上，我们可以限于 $\mu$ 与 $\nu$ 是正测度的情形，此时可写 $\mu=g\cdot\rho$, $\nu=h\cdot\rho$，其中 $\rho$ 是正测度，$g$ 与 $h$ 是两个局部 $\rho$ 可积的非负函数 ((13.15.2) 与 (13.15.3)). 于是有 $\inf(\mu,\nu)=\inf(g,h)\cdot\rho$，并且为使 $\inf(\mu,\nu)=0$，必须且只须 $\inf(g,h)$ 是 $\rho$ 可忽略的 (13.15.3). 设 $M_0$ 与 $N_0$ 分别是使得 $g(x)\neq 0$ 与 $h(x)\neq 0$ 的 $x$ 所成的集，则 $\inf(g,h)$ 为 $\rho$ 可忽略等价于 $M_0\cap N_0$ 为 $\rho$ 可忽略，或等价于关系式 $g=\varphi_M g$ 与 $h=\varphi_N h$ 关于 $\rho$ 几乎处处成立，其中 $M=M_0-(M_0\cap N_0)$, $N=N_0-(M_0\cap N_0)$ (13.15.3). 然而 $g=\varphi_M g$ 关于 $\rho$ 几乎处处成立等价于 $\mu=\varphi_M\cdot\mu$ ((13.15.3) 与 (13.14.5)) 或 $\mu$ 集中于 $M$ 上. 这就完成了第一个断言的证明. 用普遍可测集 $M'\subset M$ 与 $N'\subset N$ 代替 $M$ 与 $N$，这里 $M'$ 与 $N'$ 满足 $|\mu|(M-M')=0$ 与 $|\nu|(N-N')=0$ (13.9.3)，即可得到第二个断言.

特别是，对任一实测度 $\mu$, $\mu^+$ 与 $\mu^-$ 分别集中在两个不相交的 $\mu$ 可测集上，这两个集同时是 $\mu^+$ 可测与 $\mu^-$ 可测的 ((13.15.3) 与 (13.16.1)).

**(13.18.2)** (i) 若 $\lambda$ 是与两个测度 $\mu,\nu$ 都互相奇异的测度，则 $\lambda$ 与 $\mu+\nu$ 是互相奇异的.

(ii) 设 $H$ 是由与测度 $\nu$ 互相奇异的正测度所成的上有界集，则 $\mu=\sup H$ (13.15.4) 与 $\nu$ 是互相奇异的.

关于(i)，可以限于考虑 $\lambda,\mu,\nu$ 是正测度且具有形式 $\lambda=f\cdot\rho$, $\mu=g\cdot\rho$、$\nu=h\cdot\rho$ 的情形，其中 $\rho$ 是正测度，$f,g,h$ 均为非负；于是只须利用不等式 $\inf(f,g+h)\leqslant\inf(f,g)+\inf(f,h)$ 即可.

关于 (ii)，可以限于考虑 $\nu\geqslant 0$ 且 $H$ 由递增序列 $(\mu_n)$ 组成(13.15.4)的情形，也可写 $\nu=h\cdot\rho$, $\mu_n=g_n\cdot\rho$, $\mu=(\sup\limits_n g_n)\cdot\rho$, 其中 $\rho$ 是正测度且 $f$ 与 $g_n$ 均为非负函数；在此再利用关系式 $\inf(f,\sup\limits_n g_n)=\sup\limits_n(\inf(f,g_n))$ 即可证明所述论断.

**(13.18.3)** 若两个测度 $\mu,\nu$ 互相奇异，则 $|\mu+\nu|=|\mu|+|\nu|$.

事实上我们可以写 $\mu=g\cdot\rho$, $\nu=h\cdot\rho$, 其中 $\rho$ 是正测度且 $\inf(|g|,|h|)=0$. 于是所述结论由关系式

$$|g+h|=|g|+|h|$$

得到.

**(13.18.4)** **(Lebesgue 分解定理)**. 设 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，则 $X$ 上每个复测度 $\nu$ 可以唯一地写为 $\nu=\nu'+\nu''$, 这里 $\nu'$ 以 $\mu$ 为基而 $\nu''$ 与 $\mu$ 互相奇异；若 $\nu\geqslant 0$, 则 $\nu'$, 与 $\nu''$ 是正的且有 $\nu'=\sup\limits_n(\inf(\nu,n\mu))$.

若 $\nu_1'+\nu_1''=\nu_2'+\nu_2''$,其中 $\nu_1''$ 与 $\nu_2''$ 都与 $\mu$ 互相奇异，而 $\nu_1'$ 与 $\nu_2'$ 以 $\mu$ 为基，则有 $\nu_1''-\nu_2''=\nu_2'-\nu_1'$, 且由于 $\nu_1''-\nu_2''$ 与 $\mu$ 互相奇异(13.18.2)，故根据(13.18.1)，只当 $\nu_1''-\nu_2''$ 为零时它才能以 $\mu$ 为基，这就证明了分解的唯一性. 为证明这种分解的存在性，可写 $\mu=f\cdot\rho$, $\nu=g\cdot\rho$, 其中 $\rho$ 是正测度且 $f$ 为非负. 设 $M$ 是使得 $f(x)>0$ 的点 $x\in X$ 所成的 $\rho$ 可测集，因而 $\mu$ 集中于 $M$ 上(13.14.1). 于是 $\nu'=\varphi_M g\cdot\rho$ 与 $\nu''=\nu-\nu'=(1-\varphi_M)g\cdot\rho$ 解答了所提的问题. 事实上，根据(13.18.1)，$\nu''$ 与 $\mu$ 互相奇异；另一方面，若 $A$ 是 $\mu$ 可忽略集，则 $A\cap M$ 是 $\rho$ 可忽略集((13.14.1)与(13.6.3))，从而 $A$ 是 $\nu'$ 可忽略集(13.14.1)，故 $\nu'$ 是以 $\mu$ 为基的测度(13.15.5). 显然，若 $\nu$ 是正测度，则 $\nu'$ 与 $\nu''$ 也是正测度；于是关系式 $\nu'=\sup\limits_n(\inf(\nu,n\mu))$ 来自关于 $\rho$ 几乎处处成立的相应关系式 $\varphi_M g=\sup\limits_n(\inf(g,nf))$.

$X$ 上的测度 $\mu$ 称为**扩散测度**，如果对每个 $x \in X$，有 $|\mu|(\{x\}) = 0$。例如，$\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度是扩散的。对于扩散测度 $\mu$，任一可数集是 $\mu$ 可忽略的；因而还可以说一个扩散测度集中于任一可数集的余集上。这样，在可数离散空间上，唯一的扩散测度是 $\mu = 0$。两个扩散测度的和是扩散测度 (13.16.1)；由 (13.15.9) 与 (13.15.4)，正扩散测度的任一上有界集的上确界也是扩散测度。

**(13.18.5)** 对于 $X$ 上的任一测度 $\mu$，使得 $|\mu|(\{x\}) > 0$ 的 $x \in X$ 的集 $A$ 至多是可数的。

事实上，由于 $X$ 是紧集序列 $(K_n)$ 的并，故只须证明每个集 $A \cap K_n$ 至多为可数。为此只须证明，对每个正整数 $m$，使得 $|\mu|(\{x\}) \geqslant 1/m$ 的 $x \in A \cap K_n$ 所成的集 $A_{mn}$ 是有限的，而这一点是显然的，因为若 $B \subset A_{mn}$ 是由 $p$ 个点组成的集，则有 $p/m \leqslant |\mu|(B) \leqslant |\mu|(K_n)$。

$X$ 上的测度 $\mu$ 称为**原子测度**，如果它集中于一个至多可数集上。由这个定义与 (13.18.1) 立即得知，一个原子测度与一个扩散测度总是互相奇异的。两个原子测度的和是原子测度，并且正原子测度组成的任一上有界集的上确界也是原子测度 (13.15.4) 与 (13.15.9)。

**(13.18.6)** 每个测度 $\mu$ 能唯一地写成 $\mu_1 + \mu_2$ 的形式，其中 $\mu_1$ 是扩散测度而 $\mu_2$ 是原子测度。

所述分解的唯一性由原子测度与扩散测度为互相奇异得到。为证明所述分解的存在性，只须考虑使得 $|\mu|(\{x\}) > 0$ 的 $x \in X$ 所成的至多可数集 $D$ (13.18.5)；显然集 $D$ 是 $\mu$ 可测的，而且若令 $\mu = h \cdot |\mu|$ (13.16.3)，则测度 $\mu_2 = (\varphi_D h) \cdot |\mu|$ 集中于 $D$ 上 (13.14.1) 且 $\mu_1 = \mu - \mu_2$ 是扩散的。事实上，我们有 $|\mu_2| = \varphi_D \cdot |\mu|$ ((13.13.4) 与 (13.16.3))，从而 $|\mu_1| = |\mu| - |\mu_2|$；对每个 $x \in D$，由 $\mu_2$ 的构造有 $|\mu|(\{x\}) = |\mu_2|(\{x\})$ (13.14.3)，而对每个 $x \notin D$，由 $D$ 的定义有 $|\mu|(\{x\}) = |\mu_2|(\{x\}) = 0$，因而对一切 $x \in X$ 有 $|\mu_1|(\{x\}) = 0$ (13.16.1)。

**(13.18.7)** 例. 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度, 则由(13.18.4)与(13.18.6)得知, $\boldsymbol{R}$ 上的每个测度 $\mu$ 可唯一地写成 $\mu_1+\mu_2+\mu_3$ 的形式, 其中 $\mu_1=g\cdot\lambda$ 是以 $\lambda$ 为基的测度, $\mu_2$ 是原子测度, 而 $\mu_3$ 是与 $\lambda$ 互相奇异的扩散测度,从而它集中于某个 $\lambda$ 可忽略集上(这个集必定是不可数的).

**(13.18.8)** 附注. (i) 若 $\mu$ 是原子测度,则使得 $|\mu|(\{x\})>0$ 的 $x\in X$ 所成的可数集是 $\mu$ 集中于其上的最小的集. 反之,对于扩散测度 $\nu\neq 0$, 不存在 $\nu$ 集中于其上的最小的集, 换言之, 不存在最大的 $\nu$ 可忽略集,因为单点集是 $\nu$ 可忽略的.

(ii) 设 $\mu$ 是集中于可数集 $D$ 上的原子测度, $(a_n)$ 是由 $D$ 的所有(两两相异)的点按某个顺序排成的序列. 令 $|\mu|(\{a_n\})=\gamma_n>0$; 若 $D_n=\{a_1,\cdots,a_n\}$, 则 $\varphi_D=\sup\limits_n\varphi_{D_n}$, 且由于 $|\mu|=\varphi_D\cdot|\mu|$,故((13.14.1)与(13.5.7))对任一非负函数 $f$, 有 $|\mu|^*(f)=\sup\limits_n|\mu|^*(f\varphi_{D_n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_nf(a_n)$ (有限和或等于$+\infty$). 由此可特别推出, 对任一紧集 $K$, 有 $\sum\limits_{a_n\in K}\gamma_n<+\infty$. 再者, 由于任一单点集是 $\mu$ 可测的且 $X-D$ 是 $\mu$ 可忽略的, 所以 $X$ 到一个拓扑空间的任一映射是 $\mu$ 可测的. 于是 $\mu$ 可积函数就是使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n|f(a_n)|<+\infty$ 的函数(13.9.13),且有 $\int fd|\mu|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_nf(a_n)$. 由于 $\mu=h\cdot|\mu|$, 其中 $h$ 满足: 对一切 $n$, 有 $|h(a_n)|=1$ (13.16.3), 从而对一切 $n$ 有 $\mu(\varphi_{\{a_n\}})=\beta_n$, 其中 $|\beta_n|=\gamma_n$, 且对任一 $\mu$ 可积函数 $f$, 有 $\int fd\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_nf(a_n)$.

反之,考虑 $X$ 中的点列 $(a_n)$ 与正数列 $(\gamma_n)$, 满足: 对任一紧集 $K$, 有 $\sum\limits_{a_n\in K}\gamma_n<+\infty$. 我们已经看到(13.1.3),此时 $f\to\nu(f)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_nf(a_n)$ 是 $X$ 上的正测度. 使用上面的记号, 显见 $\nu=$

$\sup_n(\varphi_{D_n}\cdot\nu)$，并且由于 $\varphi_{D_n}\cdot\nu$ 集中于 $D_n$ 上，因而集中于$D$上，所以 $\nu$ 也集中于$D$上．此外，我们有$\nu(\{a_n\})=\gamma_n$．事实上，若$K$是 $a_n$ 的一个紧邻域，则对每个 $\varepsilon>0$，存在整数 $m$，使得 $\sum_{a_p\in K,p\geqslant m}\gamma_p\leqslant\varepsilon$． 若 $f$ 是$X$到$[0,1]$的连续映射，它在点 $a_n$ 处取值1，在$X-K$上以及在点 $a_k$ ($k$ 满足 $k\neq n$ 且 $k\leqslant m$) 处取值0 (4.5.2)，则有 $\nu(\{a_n\})\leqslant\nu(f)\leqslant\gamma_n+\varepsilon$；另一方面，我们可取邻域$K$满足 $\nu(K)\leqslant\nu(\{a_n\})+\varepsilon$ (13.7.9)，因而更有 $\gamma_n\leqslant\nu(f)\leqslant\nu(\{a_n\})+\varepsilon$，因为 $\varepsilon$ 是任意的，故由此即得所述断言.

## 问　　题

1) 设$\rho,\sigma$是局部紧空间$X$上的两个原子测度；$M,N$分别是支撑$|\rho|$与$|\sigma|$的最小集，则为使$\rho$与$\sigma$是互相奇异的，必须且只须$M\cap N=\varnothing$．由此导出$\boldsymbol{R}$的区间 $I=[0,1]$ 上的原子测度$\nu$的一个例子，使得$I$是$\nu^+$与$\nu^-$的支集(13.19)。

2) a) 设$\mu$是局部紧空间$X$上的正测度．如果$A\subset X$是普遍可测的且不是$\mu$可忽略的，试证存在由$A$所支撑的正测度$\nu$，使得$\nu\neq0$且$\nu\leqslant\mu$（注意$A$包含一个非$\mu$可忽略的紧集$K$）。

b) 设$M$是$X$的普遍可测子集，则为使正测度$\nu$由$M$所支撑，必须且只须$\nu$奇异于任一由$X-M$所支撑的正测度(利用a))。

c) 试证，若$M$是$X$内的闭集，则$M(X)$中由$M$所支撑的测度组成的向量子空间在$M(X)$内是粗疏闭的.

d) 试证$I=[0,1]$上的 Lebesgue 测度是由某个固定的可数集 $D\subset I$所支撑的原子测度的一个序列的粗疏极限；因而由$D$所支撑的测度组成的子空间不是粗疏闭的.

3) a) 设$\mu$是局部紧空间$X$上的正测度，$A$是满足 $\mu(A)>0$ 的$\mu$可积集，试证，若对每个$\mu$可积集$B\subset A$，有 $\mu(B)=0$ 或 $\mu(B)=\mu(A)$，则存在点$a\in A$，使得 $\mu(\{a\})=\mu(A)$．（考虑使得 $\mu(K)=\mu(A)$ 的紧集$K\subset A$的交，证明它是非空的，且是测度等于$\mu(A)$的单点集.）

b) 假定$\mu$是扩散测度．试证，对于每个满足$\mu(A)$大于0的$\mu$可积集$A$与每个$\varepsilon>0$，存在$A$的$\mu$可积子集$B$，使得 $0<\mu(B)\leqslant\varepsilon$（注意，借助于a）可

列，存在 $A$ 的可积子集 $C$，使得 $0<\mu(C)<\frac{1}{2}\mu(A)$)．由此推断，当 $B$ 取遍 $A$ 的 $\mu$ 可积子集时，$\mu(B)$的值所成的集是闭区间$[0,\mu(A)]$．(对每个满足 $0<b<\mu(A)$ 的数 $b$，设 $c$ 是 $A$ 内满足 $\mu(C)\leqslant b$ 的可测子集 $C$ 的测度的上确界，首先利用上面的结果证明 $c=b$，然后证明存在 $A$ 的可测子集的递增序列 $(C_n)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n)=b$.)

4) a) 设 $\nu$ 是局部紧空间 $X$ 上的原子正测度，$A$ 是 $X$ 的 $\nu$ 可积子集，试证当 $B$ 取遍 $A$ 的 $\nu$ 可积子集时，$\nu(B)$ 的值所成的集在 $\boldsymbol{R}$ 内是闭的．(设 $P$ 是支撑 $\nu$ 的最小的集，假定 $A\cap P$ 是无限集，并把 $A\cap P$ 的点排成一个序列 $(x_n)$，考虑积空间 $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的由 $\varphi((\varepsilon_n))=\sum\limits_n \varepsilon_n\nu(\{x_n\})$ 所定义的映射 $\varphi$，并证明 $\varphi$ 连续.)

b) 由 a) 与问题 3 b) 推断，若 $\mu$ 是 $X$ 上任意的正测度，$A$ 是 $X$ 的 $\mu$ 可积子集，则当 $B$ 取遍 $A$ 的 $\mu$ 可积子集时，$\mu(B)$ 的值所成的集在 $\boldsymbol{R}$ 内是闭的．把这个结果推广到 $\mu$ 是 $X$ 上任意的实测度的情形.

c) 由问题 3 b) 推断，若 $\mu$ 是 $X$ 上的扩散实测度，则当 $A$ 取遍 $X$ 的 $|\mu|$ 可积子集时，$\mu(A)=\mu^+(A)-\mu^-(A)$ 的值所成的集是 $\boldsymbol{R}$ 的一个(有界或无界的)闭区间.

d) 给出局部紧但非紧的空间 $X$ 上的原子正测度 $\nu$ 的例子，使当 $A$ 取遍 $X$ 的 $\nu$ 可积子集时，$\nu(A)$ 的值所成的集在 $\boldsymbol{R}$ 内不是闭的 (取 $\nu$ 满足 $\inf\limits_{x\in X}\nu(\{x\})>0$).

5) a) 设 $X$ 是紧空间，$\mu\neq 0$ 是 $X$ 上的扩散正测度，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(X,\mu)$ 中的全正规正交序列，试证对几乎所有 $x\in X$，有 $\sum\limits_n |f_n(x)|^2=+\infty$．(采用反证法，利用问题 3 b)，Bessel 不等式与对于级数的 Cauchy-Schwarz 不等式，证明否则就会存在测度大于零但又充分小的可测集 $B$，它包含在使得 $\sum\limits_n |f_n(x)|^2<+\infty$ 的 $x$ 所成的集内，并且满足：若 $c_n=(\varphi_B|f_n)$，则级数 $\sum\limits_n c_nf_n(x)$ 在 $B$ 内几乎处处收敛于一个其值不大于 $\frac{1}{2}$ 的函数；另一方面根据 $(f_n)$ 是全序列的假设，由 Parseval 等式，必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_B |1-s_n(x)|^2 d\mu(x)=0,\ \text{其中}\ s_n=\sum_{k=1}^{n} c_kf_k.$$

并由此推出矛盾.)

b) 在同样的假定下,试证存在纯量序列 $(b_n)$, 满足 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 并且 $\sum_n |b_n|^2 |f_n(x)|^2 = +\infty$ 几乎处处成立. (利用 Егоров 定理得到 $X$ 中的递增序列 $(A_m)$, 使得 $A_m$ 的余集的测度趋于 0, 而且部分和

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|^2$$

在 $A_m$ 上一致趋于 $+\infty$. 另一方面, 注意以 $|f_n(x)|^2/s_n(x)$ 为通项的级数几乎处处发散(5.3 问题 6).)

c) 在同样的假定下, 试证对几乎所有 $x_0 \in X$, 存在函数 $g \in \mathscr{L}^2_C(X,\mu)$ ($g$ 依赖于 $x_0$), 满足: 若令 $a_n = (g|f_n)$, 则以 $a_n f_n(x_0)$ 为通项的级数之和为 $+\infty$ (利用 12.16 问题 23).

6) a) 设 $\theta$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上为递增且右连续的有限实值函数,试证在 $\boldsymbol{R}$ 上存在唯一的正测度 $\nu$, 使对每个半开区间 $]a, b]$, 有 $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ ("由 $\theta$ 所定义的 **Stieltjes 测度**";此时把 $\int f d\mu$ 改写为 $\int f d\theta$). 反之, $\boldsymbol{R}$ 上的每个正测度都可这样得到, 而且为使在 $\boldsymbol{R}$ 上为递增且右连续的两个函数 $\theta_1$, $\theta_2$ 定义相同的测度, 必须且只须 $\theta_2 - \theta_1$ 是常数. 在什么条件下测度 $\nu$ 是扩散的? 此时 $\nu$ 在 $\theta$ 下的象是什么?

b) 设 $K$ 是 Cantor 三分集(4.2问题2),试证在 $\boldsymbol{R}$ 上存在扩散正测度 $\nu$,它以 $K$ 为支集且总质量等于 1(4.2 问题 2d)). 由此推断在 $\boldsymbol{R}$ 上存在扩散正测度, 它奇异于 Lebesgue 测度且以 $I = [0,1]$ 为支集. (在 $I - K$ 的每个连通分支区间 $J$ 上取一个测度,使它正比于 $\nu$ 在 $I$ 到 $J$ 上的一个仿射线性映射下的象;然后使用归纳法.)

c) 由 a) 推断,若 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上的正测度, $f$ 是属于 $L^1_{\mathrm{loc},C}(\boldsymbol{R}_+,\mu)$ 的函数, $(t_n)$ 是在 $\boldsymbol{R}_+$ 内处处稠密的序列,使对一切 $n$ 有 $\int_{[0,t_n]} f d\mu = 0$, 则 $f$ 是 $\mu$ 可忽略的.

7) 设 $X$ 是紧空间, $\mu$ 是 $X$ 上的扩散正测度,其总质量等于 1.

a) 定义关于 $\mu$ 为边界可忽略的开集组成的族 $(U(t))_{0\leqslant t\leqslant 1}$, 使得 $U(0) = \varnothing$, $U(1) = X$, 当 $t < t'$ 时 $\overline{U(t)} \subset U(t')$, 且 $\mu(U(t)) = t$. (首先就 $n$ 用归纳法对 $t = k/2^n$ 定义 $U(t)$; 利用 13.9 问题 7d) 证明,若 $V, W$ 是 $X$ 内的两个边界可忽略的开集,满足 $\bar{V} \subset W$ 与 $\mu(V) < \mu(W)$,则存在边界可忽略的

开集$U$,使得$\bar{V}\subset U\subset \bar{U}\subset W$,并且$\frac{1}{3}\mu(W-V)<\mu(U-V)<\frac{2}{3}\mu(W-V)$;同时利用问题3 b).)

b) 由a)推断,存在$X$到$I=[0,1]$上的连续映射$\pi$,使得$\mu$在$\pi$下的象是$I$上的Lebesgue测度.

c) 试证,存在$X$的$\mu$可忽略子集$N$, $I$的$\lambda$可忽略子集$M$与$I-M$到$X-N$上的同胚$\pi_0$,使对$I-M$的任何$\lambda$可测子集$A$, $\pi_0(A)$是$\mu$可测的且其测度$\mu(\pi_0(A))=\lambda(A)$.(利用13.9问题7c)证明,对每个正整数$n$,存在$X$的有限划分,它由一个$\mu$可忽略集与一些直径(关于定义$X$的拓扑的距离而言)$\leqslant 1/n$与测度$\leqslant 1/n$的边界可忽略开集所组成.对$n$进行归纳法,通过取极限导出$I-D$到$X$的某个测度为1的子集上的同胚$f$,其中$D$是$I$的一个可数子集.)

8) 设$X, Y$是两个紧空间,$U$是Banach空间$\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$到Banach空间$\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(Y)$的连续线性映射,$\pi: X\to Y$是连续映射.假设对一切$y\in Y$,

$$\inf_{\pi(x)=y} f(x)\leqslant (U\cdot f)(y)\leqslant \sup_{\pi(x)=y} f(x)$$

对一切函数$f\in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$成立.

在这些条件下,试证存在$Y$到$M_+(X)$的粗疏连续映射$\sigma: y\to\sigma_y$,使对一切$y\in Y$, $\sigma_y$由$\pi^{-1}(y)$所支撑,且对一切$x\in X$有$(U\cdot f)(\pi(x))=\langle f,\sigma_{\pi(x)}\rangle$.考虑逆命题.(考虑$U$的转置${}^tU: M_{\mathbf{R}}(Y)\to M_{\mathbf{R}}(X)$(12.15.3).)

9) 设$X$是紧空间,$\mu$是$X$上的扩散正测度且$\mu(X)=1$, $u$是$X$到自身的双射,且$u$与$u^{-1}$都是$\mu$可测的,并使得$\mu$在$u$下不变(13.9问题24)而且$u$关于$\mu$是遍历的(13.9问题13与24).试证对每个$\varepsilon>0$与正整数$n$,存在$X$内的$\mu$可测集$A$,使得: 1° 当$0\leqslant j\leqslant n-1$时,$u^j(A)$是两两不相交的; 2° $u^j(A)$ $(0\leqslant j\leqslant n-1)$的并的余集的测度$\leqslant\varepsilon$.(Рохлин定理;取满足$0<\mu(B)\leqslant\varepsilon/n$的$\mu$可测集$B$,并构造对应于$u^p(E_m)$ $(m\geqslant 1$且$0\leqslant p<m)$的"角谷静夫摩天楼"(13.9问题14d)).试证可以取$A$为集$u^{jn}(E_m)$(其中$j$取遍所有正整数,$m$取遍满足$m\geqslant(j+1)n$的所有整数)的并.)

## 19. 测度的支集.具有紧支集的测度

**(13.19.1)** 对于$X$上任一测度$\mu$,一切$\mu$可忽略开集的并是$\mu$可忽略的(因而它是最大的$\mu$可忽略开集).

事实上，设$U$是所述的并，则由(13.1.9)得到，$\mu$在$U$上所诱导的测度为零。

我们把$X$内的最大 $\mu$ 可忽略开集的余集称为$\mu$的**支集**，记作$\operatorname{Supp}(\mu)$。$x\in \operatorname{Supp}(\mu)$ 意味着，对$x$的每个邻域$V$，有$|\mu|^*(V)>0$；或者等价地(13.5.1)，对每个满足$f(x)\neq 0$的函数$f\in \mathscr{K}_C(X)$，有$|\mu|(|f|)>0$；也还等价于，对$x$的每个邻域$V$，存在函数$f\in \mathscr{K}_C(X)$，使得它的支集包含在$V$内且有$\mu(f)\neq 0$。于是当$\operatorname{Supp}(\mu)=X$时，唯一的$\mu$可忽略连续函数是常数0。

根据定义，我们有$\operatorname{Supp}(\mu)=\operatorname{Supp}(|\mu|)$，又显见对任一纯量$a\neq 0$，有$\operatorname{Supp}(a\mu)=\operatorname{Supp}(\mu)$。更一般地，对每个局部$|\mu|$可积函数$g$，有$\operatorname{Supp}(g\cdot\mu)\subset \operatorname{Supp}(g)\cap\operatorname{Supp}(\mu)$，因为如果令$\nu=g\cdot|\mu|$且若开集$U$与$\operatorname{Supp}(g)$不相交或与$\operatorname{Supp}(\mu)$不相交，则$|\nu|^*(U)=0$ (13.14.1)。

**(13.19.2)** (i) 若$\mu$与$\nu$是两个正测度，则

$$\operatorname{Supp}(\mu+\nu)=\operatorname{Supp}(\mu)\cup\operatorname{Supp}(\nu).$$

(ii) 对于由正测度组成的任一上有界族$H$，若令$\nu=\sup H$ (13.15.4)，则$\operatorname{Supp}(\nu)$是测度$\mu\in H$的支集的并的闭包。

把(13.16.1)与(13.15.9)应用到相对紧开集的特征函数（注意到(13.15.4)）上，即得所述结论。

$\operatorname{Supp}(\mu)$的余集也可定义为$\mu$可忽略集的内部中最大的内部；因而$\operatorname{Supp}(\mu)$是测度$\mu$集中于其上(13.18)的所有集的闭包的交。但要注意，两个相互奇异的测度可以有相同的支集。例如，$\boldsymbol{R}$上集中于某个处处稠密的可数集上的原子测度，如果它使得这个可数集的每个点具有不等于零的测度(13.18.8)，就与 Lebesgue 测度具有相同的支集。

**(13.19.3)** 设$\mu$是$X$上的测度，则为使$X$上的任一连续复值函数都$\mu$可积，必须且只须$\operatorname{Supp}(\mu)$是紧的。此时映射$f\to\mu(f)$是 Fréchet 空间$\mathscr{C}_C(X)$ (12.14.6)上的一个连续线性形式；反之，$\mathscr{C}_C(X)$上的每个连续线性形式都是这种类型的。

设 $\mu$ 具有紧支集 $S$，则 $X-S$ 是 $\mu$ 可忽略的，因而 $f\varphi_S$ 几乎处处等于 $f$；由于 $f\varphi_S$ 可测(13.9.6)且 $|f\varphi_S|$ 以 $\varphi_S$ 的一个倍数为其上界(3.17.10)，故 $f\varphi_S$ 是可积的，从而 $f$ 也是可积的。

反之我们证明，若 $S=\mathrm{Supp}(\mu)$ 非紧，则存在有限非负实值连续函数 $f$，使得 $|\mu|^*(f)=+\infty$。由假设(3.18.3)，存在 $X$ 中的相对紧开集的递增序列 $(U_n)$，使得 $\bar{U}_n\subset U_{n+1}$，且这些 $U_n$ 形成 $X$ 的覆盖；由于 $X$ 非紧，所以对一切 $n$ 有 $U_n\neq X$。通过归纳法如下定义 $X$ 中的点列 $(a_n)$ 与相对紧开集序列 $(V_n)$：$a_1\in S$，$V_1$ 是 $a_1$ 的邻域；$a_{n+1}$ 属于 $S$ 与 $\bar{U}_n$ 与 $\bar{V}_k$ $(k\leqslant n)$ 的并的余集的交(由假设，这个交非空)，$V_{n+1}$ 是 $a_{n+1}$ 的相对紧邻域，使得 $\bar{V}_{n+1}$ 既不与 $\bar{U}_n$ 相交也不与任何 $\bar{V}_k$ $(k\leqslant n)$ 相交。现在对每个 $n$，设 $g_n$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的连续映射，它在点 $a_n$ 处等于 1，而在 $X-V_n$ 上等于 0 (4.5.2)。由假设推出 $|\mu|(g_n)>0$。令 $f_n=g_n/|\mu|(g_n)$，于是 $|\mu|(f_n)=1$。此时函数 $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 处处有限并连续(因为每个点 $x\in X$ 属于某个 $U_n$，而 $U_n$ 只与有限个 $V_k$ 相交)，由于对一切 $n$ 有

$$|\mu|^*(f)\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\mu|(f_k),$$

所以显然 $f$ 是所提问题的解。

若 $S=\mathrm{Supp}(\mu)$ 是紧集，则证明的第一部分表明，对每个函数 $f\in\mathscr{C}_C(X)$，有 $|\mu(f)|\leqslant|\mu|(S)\cdot\sup_{x\in S}|f(x)|$，从而 $\mu$ 在 Fréchet 空间 $\mathscr{C}_C(X)$ 上连续。反之，若 $\lambda$ 是这个空间上的连续线性形式，因而存在紧集 $K\subset X$ 与常数 $c>0$，使对一切函数 $f\in\mathscr{C}_C(X)$，有 $|\lambda(f)|\leqslant c\cdot\sup_{x\in K}|f(x)|$ (12.14.6)。于是，若 $L$ 是 $X$ 的任一紧子集，则对一切函数 $f\in\mathscr{K}_C(X;L)$ 有 $|\lambda(f)|\leqslant c\cdot\|f\|$，从而限制 $\mu=\lambda|\mathscr{K}_C(X)$ 是 $X$ 上的测度。而且，若 $h$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的连续映射，它具有紧支集且使得 $h(x)=1$ 在 $K$ 上成立((3.18.2)与(4.5.2))，则对一切函数 $f\in\mathscr{C}_C(X)$ 有 $\lambda(fh)=\lambda(f)$，这是因为 $f-fh$ 在 $K$ 上为零。由此立即推出 $\mu$ 的支集包含在 $\mathrm{Supp}(h)$

内；因而每个函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 是 $\mu$ 可积的且有 $\mu(f) = \mu(fh) = \lambda(fh) = \lambda(f)$. 证毕.

**(13.19.4)** 由定义立即得到，若 $\pi: X \to X'$ 是一个同胚而 $\mu$ 是 $X$ 上的测度，则 $\mathrm{Supp}(\pi(\mu)) = \pi(\mathrm{Supp}(\mu))$.

### 问　　题

设 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$A$ 是 $\mu$ 可测集. 设 $i(A)$ 是满足下述条件的 $x \in X$ 所成的集：存在 $x$ 在 $X$ 内的紧邻域 $V$，使得

$$\mu(V \cap (X - A)) = 0.$$

试证 $i(A)$ 是开集且 $\mu(i(A) \cap (X - A)) = 0$（考虑 $\mathrm{Supp}(\varphi_{X-A} \cdot \mu)$）.

## 20. 有界测度

对 $X$ 上的每个(复)测度 $\mu$，令

**(13.20.1)**
$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1, f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)} |\mu(f)|,$$

它是有限实数或 $+\infty$.

**(13.20.2)** 我们有 $\|\mu\| = |\mu|^*(1)$. 为使 $\|\mu\|$ 是有限的，必须且只须正测度 $|\mu|$ 是有界的(13.9)，且此时有

$$\|\mu\| = |\mu|(1) = |\mu|(X),$$

即 $\|\mu\|$ 是 $X$ 关于 $|\mu|$ 的总质量.

事实上，对每个函数 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，有 (13.3.3)

$$|\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|) \leqslant \|f\| \cdot |\mu|^*(1),$$

这里对 $[0, +\infty]$ 中的乘积赋予通常的约定 (13.11). 因此 $\|\mu\| \leqslant |\mu|^*(1)$. 反之，对每个正数 $a < |\mu|^*(1)$，存在函数 $g \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$，使得 $0 \leqslant g \leqslant 1$ 且 $|\mu|(g) > a$ (13.5.1)，因而存在函数 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，使得 $|f| \leqslant g \leqslant 1$ 且 $|\mu(f)| > a$ (13.3.2.1)，这就完成了证明.

当 $\|\mu\|$ 为有限时，我们称 $\mu$ 是**有界测度**；当 $\mu$ 是正测度时，这个定义与 (13.9) 中所给的定义一致. 测度 $\mu$ 为有界必须且只须 $|\mu|$ 为有界，且有 $\||\mu|\| = \|\mu\|$. $X$ 上的有界复测度所成的集

$M_{\mathbf{C}}^1(X)$（也记作 $M^1(X)$）是空间 $M_{\mathbf{C}}(X)$ 的一个向量子空间；我们令 $M_{\mathbf{R}}^1(X)=M_{\mathbf{C}}^1(X)\cap M_{\mathbf{R}}(X)$（有界实测度所成的空间）。定义（13.20.1）表明，可以等价地说，$X$ 上的有界测度是赋予范数 $\|f\|$（5.5.1）的空间 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 上的连续线性形式，而 $\|\mu\|$ 是这个赋范空间的对偶空间 $M_{\mathbf{C}}^1(X)$（12.15）上的通常的范数（5.7.1）。$M_{\mathbf{C}}^1(X)$ 关于这个范数是完备的（5.7.3）。

若 $\mu$ 是 $X$ 上的任一测度，$g$ 是局部 $\mu$ 可积函数，则为使测度 $g\cdot\mu$（13.16）有界，必须且只须 $g$ 为 $\mu$ 可积；且有

$$\text{(13.20.3)}\qquad \|g\cdot\mu\|=N_1(g)=\int|g|d|\mu|,$$

这由关系式 $|g\cdot\mu|=|g|\cdot|\mu|$（13.16.6）可立即得到。

显然，任一具有紧支集的测度 $\mu$ 是有界的，因为若设 $S=\operatorname{Supp}(\mu)$，则有 $|\mu|^*(1)=|\mu|(S)$。

注意，若 $\mu$ 是有界正测度，则

$$\text{(13.20.4)}\qquad \mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X,\mu)\subset\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{2}(X,\mu)\subset\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{1}(X,\mu).$$

这是因为，由（13.9.17），每个有界可测函数是可积的，而把 Cauchy-Schwarz 不等式（13.11.2.2）应用于 $g=1$ 连同（13.9.13）表明，每个函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X,\mu)$ 是可积的，且有 $N_1(f)\leqslant N_2(f)\cdot\mu(X)^{\frac{1}{2}}$。这还证明典则单射 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X,\mu)\to\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^1(X,\mu)$ 关于这两个空间的这两个半范数是连续的；又典则单射 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X,\mu)\to\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X,\mu)$（关于相应的半范数）同样也是连续的，因为由（13.12.5）推出，对每个函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X,\mu)$，有 $N_2(f)\leqslant N_{\infty}(f)\cdot\mu(X)^{\frac{1}{2}}$。

**(13.20.5)** 特别（13.9.17）若 $\mu$ 是有界（复）测度，则每个函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X)$ 是 $\mu$ 可积的，且由（13.16.5），有 $\left|\int fd\mu\right|\leqslant\|\mu\|\cdot\|f\|$；换言之，$f\to\int fd\mu$ 是 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X)$ 上的一个连续线性形式；但要注意，一般地说，存在空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X)$ 上的连续线性形式，它不属于 $f\to\int fd\mu$（$\mu$ 是 $X$ 上的测度）这种类型。

**(13.20.6)** 空间 $M_{\mathbf{C}}^1(X)$ 也是 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 在 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{\infty}(X)$ 内的闭包 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^0(X)$ 的对偶空间（12.15）。函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^0(X)$ 可以用

下述性质来刻划：对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $X$ 的紧子集 $K$，使对一切 $x \in X - K$，有 $|f(x)| \leqslant \varepsilon$。事实上，若 $f \in \mathscr{C}_C^0(X)$，则按照定义，对每个 $\varepsilon > 0$，存在函数 $g \in \mathscr{K}_C(X)$，使得 $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$；若 $K$ 是 $g$ 的支集，则对 $x \notin K$，有 $|f(x)| \leqslant \varepsilon$。反之，假定 $f$ 满足上述性质，且设 $h$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的连续映射，它具有紧支集并在 $K$ 上等于1((3.18.2)与(4.5.2))，则显见 $\|f - fh\| \leqslant \varepsilon$ 且 $fh \in \mathscr{K}_C(X)$，因而 $f \in \mathscr{C}_C^0(X)$。我们把属于 $\mathscr{C}_C^0(X)$ 的函数称为**在无穷远处趋于0的**（复值）**连续函数**（当 $X = \boldsymbol{R}$ 时，这就是满足 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 的连续函数 $f$）。令

$$\mathscr{C}_R^0(X) = \mathscr{C}_C^0(X) \cap \mathscr{C}_R(X).$$

当 $X$ 为紧时，显然有

$$\mathscr{C}_C^\infty(X) = \mathscr{C}_C^0(X) = \mathscr{K}_C(X) = \mathscr{C}_C(X).$$

## 问　　题

1) 局部紧空间 $X$ 上的有界实测度所成的空间 $M_{\mathbf{R}}^1(X)$ 可以看作下列向量空间上的线性形式所成的空间：

1° 具有紧支集的连续函数的空间 $E_1 = \mathscr{K}_R(X)$；

2° 在无穷远处趋于0的连续函数的空间 $E_2 = \mathscr{C}_{\mathbf{R}}^0(X)$；

3° $X$ 上的有界连续函数的空间 $E_3 = \mathscr{C}_{\mathbf{R}}^\infty(X)$；

4° 有界(上或下)半连续函数的线性组合的空间 $E_5$；

5° 普遍可测有界函数的空间 $E_4 = \mathscr{U}_R(X)$。

此外，对于 $X$ 上的任一正测度 $\nu$，以 $\nu$ 为基的有界测度的空间 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$（基于(13.14.4)，它等同于空间 $L_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$）可以看作关于 $\nu$ 几乎处处连续的有界函数的向量空间 $E_{4,\nu}$ 上的线性形式所成的空间。

我们以 $\mathscr{T}_i$ 表示 $M_{\mathbf{R}}^1(X)$ 上对应于向量空间 $E_i$ $(i \neq 4)$ 的弱拓扑，而以 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 表示 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$（或 $L_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$）上对应于 $E_{4,\nu}$ 的弱拓扑（参阅(12.15)）。

在 $M_{\mathbf{R}}^1(X)$ 上，若 $i<j$，则拓扑 $\mathscr{T}_i$ 粗于 $\mathscr{T}_j$；在 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 上，由 $\mathscr{T}_3$ 所诱导的拓扑粗于拓扑 $\mathscr{T}_{4,\nu}$，而拓扑 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 又粗于由 $\mathscr{T}_5$ 所诱导的拓扑(考虑关于 $\nu$ 几乎处处连续的函数的下半连续正则化(12.7 问题 8))。

a) 设 $(\mu_n)$ 是局部紧但非紧的空间 $X$ 上的有界实测度的一个序列。给

出 $(\mu_n)$ 粗疏收敛(即关于拓扑 $\mathscr{T}_1$)于 0 但关于 $\mathscr{T}_2$ 却不收敛的例子．为使粗疏收敛于 0 的序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 也收敛于 0，必须且只须范数序列 $(\|\mu_n\|)$ 有界(利用 Banach-Steinhaus 定理)．

b) 给出序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 收敛于 0 但关于 $\mathscr{T}_3$ 却不收敛的例子．为使粗疏收敛于测度 $\mu$ 的有界实测度序列 $(\mu_n)$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 收敛，必须且只须对每个 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset X$，使对一切 $n$，有 $|\mu_n|(X-K)\leqslant\varepsilon$．(用反证法证明所述条件是必要的，利用如 13.14 问题 1 中所用的"滑动驼峰法".)

c) 给出 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 中关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 收敛于 0 但关于拓扑 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 却不收敛于 0 的序列 $(\mu_n)$ 的例子(取 $X=[0,1]$)．为使 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 中关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 收敛于 0 的测度序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 也收敛于 0，必须且只须它满足下述条件：

$(C_{4,\nu})$ 对每个 $\nu$ 可忽略的紧集 $K\subset X$ 与每个 $\varepsilon>0$，存在 $K$ 的开邻域 $U$；使对一切整数 $n$，有 $|\mu_n|(U)\leqslant\varepsilon$．

(为证明所述条件的充分性，归结为 $X$ 是紧空间的情形并把 $(C_{4,\nu})$ 应用到集 $K_\varepsilon$ 上，这里 $K_\varepsilon$ 是满足下述条件的 $x\in X$ 所成的集：关于 $\nu$ 几乎处处连续的一个函数在点 $x$ 处的振幅大于或等于 $\varepsilon$．用反证法并利用"滑动驼峰法"证明所述条件是必要的.)

d) 设 $(\mu_n)$ 是属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X)$ 的测度的序列，它关于拓扑 $\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2,\mathscr{T}_3$ 之一是 Cauchy 序列，试证 $(\mu_n)$ 关于该拓扑收敛．(关于拓扑 $\mathscr{T}_3$，利用 b) 并用反证法：通过"滑动驼峰法"构造一个测度序列，它关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 0 但不满足 b) 中给出的条件.)

e) 为使属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的测度的粗疏收敛序列 $(\mu_n)$ 是关于 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 的 Cauchy 序列，必须且只须它满足条件 $(C_{4,\nu})$ (如同 d)，采用反证法)；此时序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 收敛于属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的一个测度．

f) 设 $(\mu_n)$ 是属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的测度的一个序列，试证，如果当 $A\subset X$ 或为有限或为开集且关于 $\nu$ 为边界可忽略(13.9 问题 7)时，序列 $(\mu_n(A))$ 具有有限的极限，则 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 是 Cauchy 序列(利用 13.14 问题 1 并用反证法)．试证关于集 $A$ 为有限的假定不能去掉．

g) 设 $(\mu_n)$ 是属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的测度的一个序列，它关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 收敛于属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的测度 $\mu$．试证，如果进而还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mu_n\|=\|\mu\|$，则序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 收敛于 $\mu$ (利用 e))．给出紧空间 $X$ 上正测度序列的例子，这些测度属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 而这个序列却粗疏收敛于一个不属于 $M_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的测度．

2）记号同问题 1． 设 $(\mu_n)$ 是属于 $M^1_{\mathbf{R}}(X)$ 的测度的一个序列，则存在 $X$ 上的正测度 $\nu$，使得 $\mu_n$ 属于 $M^1_{\mathbf{R}}(X,\nu)$。

a）试证下列性质是等价的：

$\alpha$）序列 $(\mu_n)$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_6$ 收敛．

$\beta$）对 $X$ 的每个闭子集 $A$，序列 $(\mu_n(A))$ 具有有限极限．

$\gamma$）序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 收敛，且满足下述条件：

$(C_7)$对每个紧集 $K\subset X$ 与每个 $\varepsilon>0$，存在 $K$ 的开邻域 $U$，使对一切 $n$，有 $|\mu_n|(U-K)\leqslant\varepsilon$．

$\delta$）序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 收敛，且满足下述条件：

$(C_8)$对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任一满足 $\nu(A)\leqslant\delta$ 的普遍可测集 $A$，$|\mu_n|(A)\leqslant\varepsilon$ 对一切 $n$ 成立．

（为证明 $\beta$）蕴涵 $\gamma$），首先利用13.14问题 1 证明序列 $(\|\mu_n\|)$ 有界；为证明 $(C_7)$，用反证法并首先考虑序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 0 的情形，接着如同问题 1d）那样转到一般情形．然后证明 $\gamma$）蕴涵序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 收敛，特别蕴涵 $\beta$）．用可测函数的定义证明 $\delta$）蕴涵 $\alpha$）．用反证法并利用"滑动驼峰法"证明 $\alpha$）蕴涵 $\delta$）．最后，为证明 $\gamma$）蕴涵 $\alpha$），首先考虑这样的情形：若以 $\mu$ 表示 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 的极限，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mu_n\|=\|\mu\|$，再用反证法证明 $\gamma$）蕴涵 $\delta$）．为转到一般情形，归结为 $\mu=0$ 并用反证法：可以假设存在函数 $f\in E_6$，使得序列 $(\mu_n(f))$ 具有不等于 0 的极限．另一方面，可以从 $(\mu_n)$ 中选出子序列 $(\mu_{n_k})$，使得序列 $(\mu_{n_k}^+)$ 粗疏收敛，从而序列 $(\mu^-_{n_k})$ 也粗疏收敛．注意到这两个序列都满足 $(C_7)$ 就能由此导出矛盾．）

b）给出由属于 $M^1_{\mathbf{R}}(X,\nu)$ 的测度组成的序列 $(\mu_n)$ 的例子，它关于拓扑 $\mathscr{T}_{4,\nu}$ 收敛，但关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 却不收敛（参阅 13.18 问题 2 $d$））．

c）取 $X=[0,1]$． 试证在 $M^1_{\mathbf{R}}(X)$ 上，拓扑 $\mathscr{T}_3$ 与 $\mathscr{T}_6$ 是不同的（参阅 12.15 问题 2 $c$）与 13.11 问题 3）．

d）把问题 1 与 2 的结果推广到有界复测度的情形．

3）设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(g_n)$ 是 $\mu$ 可积函数序列，满足：1° 序列 $(g_n)$ 依测度收敛（13.12 问题 2）于函数 $g$；2° 测度序列 $(g_n\cdot\mu)$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_6$（问题 2）收敛． 在这些条件下，试证 $g$ 是 $\mu$ 可积的且序列 $(g_n)$ 在 $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 中收敛于 $g$．

4）设 $X$ 是紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 中的正规正交序列，它由在 $X$ 上一致有界的函数所组成．

a）试证对每个函数 $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(X,\mu)$，由

$$(g|f_n) = \int g(x)\overline{f_n(x)}\,d\mu(x)$$

组成的序列趋于0（归结为 $g$ 有界，因而属于 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 的情形）。

b）设点 $x_0\in X$，则为使对于每个函数 $g\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(X,\mu)$，级数 $\sum\limits_n (g|f_n)f_n(x_0)$ 收敛，必须且只须（使用13.17问题2)中的记号）有界测度 $K_n(x_0,\cdot)\cdot\mu$ 所成的序列关于拓扑 $\mathscr{T}_s$（问题2)收敛于有界测度 $h_{x_0}\cdot\mu$；特别对任何 $n$ 有

$$f_n(x_0) = \int h_{x_0}(x)f_n(x)\,d\mu(x).$$

c）试证在 $X$ 内存在测度大于零的可测集 $A$，使对每个 $x_0\in A$，存在函数 $g\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(X,\mu)$（$g$ 依赖于 $x_0$），对于它以 $(g|f_n)f_n(x_0)$ 为通项的级数不收敛.（取 $A$ 为使得序列 $(f_n(x))$ 不收敛于0的 $x\in X$ 的集，并利用13.11问题7 a)。然后利用a)与b)并用反证法.）

5）设 $S$ 是 $\boldsymbol{R}$ 是闭子集．给定实数列 $(c_n)_{n\geqslant 0}$，为使存在 $\boldsymbol{R}$ 上的正测度 $\mu$，它具有包含在 $S$ 内的支集且对一切非负整数 $n$ 有

$$\int x^n d\mu(x) = c_n,$$

必须且只须对于每个在$S$上取非负值的多项式 $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k X^k$，有$\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k c_k\geqslant 0$.（推理与13.3问题2相同，证明存在以 $S$ 为支集的正测度 $\mu$，它延拓为定义在 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{R})$ 上与定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的多项式所成的空间上的线性形式 $u$，使对每个多项式 $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k X^k$，有 $u(P)=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k c_k$．然后证明每个幂 $x^n$ 是 $\mu$ 可积的且有 $\int x^n d\mu(x)=c_n$．为此注意，对每个非负整数 $n$ 与每个 $\varepsilon>0$，存在数 $R>0$，满足：若 $f_{n,R}$ 是当 $|x|<R$ 时等于0而当 $|x|\geqslant R$ 时等于 $x^n$ 的函数，则 $|f_{n,R}(x)|\leqslant\varepsilon x^{2n+2}$．）

特殊情形：1° $S=\boldsymbol{R}$（**Hamburger 矩问题**）：所需条件就是二次型 $\sum\limits_{j,k=0}^{n} c_{j+k}\xi_j\xi_k$ 对任何 $n$ 都是正定的（注意 $\boldsymbol{R}$ 上每个非负多项式 $P(x)$ 是两个平方项的和：$P(x)=(P_1(x))^2+(P_2(x))^2$）；2° $S=[0,+\infty[$（**Stieltjes 矩问题**）：所需条件就是二次型

$$\sum_{j,k=0}^{n} c_{j+k}\xi_j\xi_k \text{ 与 } \sum_{j,k=0}^{n} c_{j+k+1}\xi_j\xi_k$$

对任何非负整数 $n$ 都是正定的（注意 $[0,+\infty[$ 上的每个非负多项式 $P(x)$ 可写成 $(P_1(x))^2+(P_2(x))^2+x((P_3(x))^2+(P_4(x))^2)$ 的形式）。

6）设 $\nu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$ 的函数的序列，使得测度序列 $(f_n\cdot\nu)$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_s$ 收敛于 $f\cdot\nu$（其中 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1(X,\nu)$），试证关于 $\nu$ 几乎处处有 $f(x)\leqslant\lim\sup_{n\to\infty} f_n(x)$（利用(13.8.3)）。

7）设 $\mu,\nu$ 是 $X$ 上的两个有界复测度，试证下列陈述是等价的：1° $\mu$ 与 $\nu$ 相互奇异；2° $\|\mu\pm\nu\|=\|\mu\|+\|\nu\|$；3° $\|\mu+\nu\|+\|\mu-\nu\|=2(\|\mu\|+\|\nu\|)$。

## 21. 测度的乘积

**(13.21.1)** 设 $X$，$Y$ 是两个局部紧空间，$\lambda$ 是 $X$ 上的测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的测度，则在积空间 $X\times Y$ 上存在唯一的测度 $\nu$，使对每对函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，$g\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(Y)$，有

**(13.21.1.1)** $$\int f(x)g(y)d\nu(x,y)=\left(\int f(x)d\lambda(x)\right)\left(\int g(y)d\mu(y)\right).$$

1）唯一性. $X\times Y$ 的每个紧子集包含在形如 $L\times M$ 的子集中，其中 $L$ 与 $M$ 分别是 $X$ 与 $Y$ 的相对紧开子集（(3.20.17) 与 (3.18.2)）。我们来证明，对于支集包含在 $L\times M$ 内的每个函数 $h\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X\times Y)$，都能定义 $\nu(h)$ 的值. 这一点可从下述引理得到.

**(13.21.1.2)** 若 $L\subset X$ 与 $M\subset Y$ 是相对紧开集，则属于空间 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X\times Y)$ 且其支集包含在 $L\times M$ 内的任一函数 $h$ 属于形如 $(x,y)\to\sum_{i,k}f_i(x)g_k(y)$ 的函数的集在 Banach 空间 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X\times Y;\bar{L}\times\bar{M})$ 内的闭包，这里 $(f_i)$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ 且其支集包含在 $L$ 内的函数的有限序列，$(g_k)$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(Y)$ 且其支集包含在 $M$ 内的函数的有限序列.

假定所述引理已经建立，则由假设，存在数 $c>0$，使对其支集包含在 $L\times M$ 内的一切函数 $u\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X\times Y)$，有 $|\nu(u)|\leqslant c\|u\|$. 另一方面，对每个 $\varepsilon>0$，存在由函数 $f_i\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$，$g_k\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(Y)$ 组成的两个有限序列，使得在 $L\times M$ 内有

$$|h(x,y)-\sum_{i,k} f_i(x)g_k(y)| \leqslant \varepsilon.$$

$h(x,y)$ 的支集包含在 $L\times M$ 内，于是根据(13.21.1.1)推出

$$|\nu(h)-\sum_{i,k}\lambda(f_i)\mu(g_k)| \leqslant c\varepsilon;$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，从而证明了 $\nu$ 的唯一性.

为证明(13.21.1.2)，我们给定 $\varepsilon>0$. 对于每个点 $z=(x,y)\in L\times M$，存在 $x$ 在 $X$ 内的紧邻域 $U\subset L$ 与 $y$ 在 $Y$ 内的紧邻域 $V\subset M$，使得 $h$ 在 $U\times V$ 上的振幅小于或等于 $\varepsilon$(3.20.1). $\mathrm{Supp}(h)$ 的射影 $S\subset L$ 与 $T\subset M$ 是紧的，因而对每个 $x\in S$，存在 $T$ 的有限个点 $y_j(x)(1\leqslant j\leqslant n(x))$，并且对每个 $j$，存在 $x$ 在 $X$ 内的紧邻域 $U_j(x)\subset L$ 与 $y_j(x)$ 在 $Y$ 内的紧邻域 $V_j(y_j(x))\subset M$，使得 $h$ 在 $U_j(x)\times V_j(y_j(x))$ 上的振幅小于或等于 $\varepsilon$，而且这些 $V_j(y_j(x))$ 的内部覆盖 $T$；从而 $U'(x)=\bigcap_j U_j(x)$ 是 $x$ 在 $X$ 内的紧邻域. 于是存在 $S$ 的有限个点 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant m)$，使得 $U'(x_i)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的内部覆盖 $S$. 令 $A_i=U'(x_i)$，且设 $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ 是如下得到的集族：对每个 $y\in T$，设 $W(y)$ 是（有限多个）集 $V_j(y_j(x_i))$ 的内部中那些含有 $y$ 的内部的交；这些集 $W(y)$ 是非空开集，它们只有有限多个且形成 $T$ 的开覆盖，我们把这些集记作 $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$. 另一方面，注意到由上述构造，$h$ 在每个集 $A_i\times B_k$ 上的振幅都小于或等于 $\varepsilon$. 现在设 $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$（相应地，$(g_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$）是 $X$（相应地，$Y$）到 $[0,1]$ 的连续映射，使对每对指标 $i,k$，有 $\mathrm{Supp}(f_i)\subset A_i$，$\mathrm{Supp}(g_k)\subset B_k$，在 $X$ 内有 $\sum_i f_i(x)\leqslant 1$，在 $Y$ 内有 $\sum_k g_k(y)\leqslant 1$，且在 $S$ 内有 $\sum_i f_i(x)=1$，在 $T$ 内有 $\sum_k g_k(y)=1$ (12.6.4). 于是对任何 $x\in X$，$y\in Y$，有 $h(x,y)=\sum_{i,k} h(x,y)\,f_i(x)\,g_k(y)$. 若 $y_k$ 是 $B_k$ 中任意的点，则由假定推出，在 $A\times B$ 上有

$$\left| h(x,y) - \sum_{i,k} h(x_i,y_k) f_i(x) g_k(y) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{i,k} (h(x,y) - h(x_i,y_k)) f_i(x) g_k(y) \right|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i,k} f_i(x) g_k(y) \leqslant \varepsilon,$$

这里 $A = \bigcup_i A_i, B = \bigcup_k B_k$，从而这个不等式在整个 $X \times Y$ 上也成立(在 $A \times B$ 之外，上式左边等于零)。

2) 存在性. 我们首先证明下面的引理:

**(13.21.1.3)** 设 $L$ 是 $X$ 的紧子集，$M$ 是 $Y$ 的紧子集. 若 $h$ 是属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X \times Y)$ 的函数，满足 $\mathrm{Supp}(h) \subset L \times M$，则函数 $g(y) = \int h(x,y) d\lambda(x)$ 在 $Y$ 上连续，并且 $\mathrm{Supp}(g) \subset M$.

事实上，对每个 $y \in Y$，函数 $x \to h(x,y)$ 属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X;L)$ 且当 $y \notin M$ 时恒等于零. 另一方面，由于 $h$ 一致连续(3.16.5)，所以对每个 $\varepsilon > 0$ 与每个 $y \in Y$，存在 $y$ 在 $Y$ 内的邻域 $W$，使得关系 $x \in X$，$y' \in W$ 蕴涵

$$|h(x,y') - h(x,y)| \leqslant \varepsilon.$$

最后，存在数 $a_L > 0$，使对一切函数 $u \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X;L)$，有 $|\lambda(u)| \leqslant a_L \|u\|$. 由此推出，对一切 $y' \in W$，有

$$\left| g(y') - g(y) \right| = \left| \int (h(x,y') - h(x,y)) d\lambda(x) \right| \leqslant a_L \varepsilon,$$

引理得证.

现在我们看到，对每个函数 $h \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X \times Y)$，数 $\nu(h) = \mu(g)$ 有定义(在使用记号比较随便时，也把这个数写作 $\mu\left(\int h(x,y) d\lambda(x)\right)$)。采用上述记号，由假定得知，存在两个数 $a_L, b_M$，使对一切函数 $u \in \mathscr{K}(X;L)$(相应地，$v \in \mathscr{K}(Y;M)$)，有 $|\lambda(u)| \leqslant a_L \|u\|$ (相应地，$|\mu(v)| \leqslant b_M \|v\|$)。于是对一切函数 $h \in \mathscr{K}(X \times Y; L \times M)$，不等式

$$\left|\int h(x,\ y)d\lambda(x)\right| \leqslant a_L\|h\|$$

对任意的 $y\in Y$ 成立，又因 (13.21.1.3) 与 $\nu(h)$ 的定义，有 $|\nu(h)|\leqslant a_Lb_M\|h\|$. 考虑到$X\times Y$的任一紧子集包含在它在$X$与$Y$上的射影的乘积内，这就完成了 (13.21.1) 的证明.

注意，我们也把数$\nu(h)=\mu\left(\int h(x,y)d\lambda(x)\right)$记作

$$\int d\mu(y)\int h(x,y)d\lambda(x).$$

显然，由于上面过程中$X$与$Y$的地位可以互换，所以对一切函数 $h(x,y)\in\mathscr{K}_C(X\times Y)$，有

**(13.21.2)**
$$\begin{aligned}\int h(x,y)d\nu(x,y) &= \int d\lambda(x)\int h(x,y)d\mu(y)\\ &= \int d\mu(y)\int h(x,y)d\lambda(x).\end{aligned}$$

基于这个公式，我们写$\iint hd\lambda d\mu$ 或$\iint h(x,y)d\lambda(x)$在$d\mu(y)$ 以代替$\int h(x,y)d\nu(x,y)$；而在这个记号中 $\lambda$ 与 $\mu$ 也可交换. 测度 $\nu$ 称为 $\lambda$ 与 $\mu$ 的**乘积测度**，记作 $\lambda\otimes\mu$. 显然 $M_C(X)\times M_C(Y)$ 到 $M_C(X\times Y)$ 的映射 $(\lambda,\mu)\to\lambda\otimes\mu$ 是双线性的；换言之，有

$$(\lambda_1+\lambda_2)\otimes(\mu_1+\mu_2)=\lambda_1\otimes\mu_1+\lambda_1\otimes\mu_2+\lambda_2\otimes\mu_1+\lambda_2\otimes\mu_2;$$

且对任一纯量 $a$ 有

$$(a\lambda)\otimes\mu=\lambda\otimes(a\mu)=a(\lambda\otimes\mu).$$

此外，如果 $\lambda$ 与 $\mu$ 是实(相应地，正)测度，则 $\lambda\otimes\mu$ 同样是实(相应地，正)测度.

**(13.21.3)** 设 $\lambda,\mu$ 分别是 $X$，$Y$ 上的正测度，$\nu=\lambda\otimes\mu$ 是这两个测度的乘积测度，则对每个函数 $h\in\mathscr{I}(X\times Y)$，函数 $x\to\int^* h(x,y)d\mu(y)$ 属于 $\mathscr{I}(X)$，并且

**(13.21.3.1)**
$$\int^* hd\nu=\lambda^*\left(\int^* h(x,y)d\mu(y)\right)$$

(类似于以前的情形，我们采用了比较随便的记号).

事实上 (12.7.8)，存在属于 $\mathscr{K}_R(X\times Y)$的函数的递增序列

$(h_n)$，使得 $h = \sup_n h_n$；由(13.21.1.3)得知，对每个 $n$，函数 $f_n(x) = \int h_n(x,y)d\mu(y)$ 属于 $\mathscr{K}_R(X)$；于是 $f = \sup_n f_n$ 属于 $\mathscr{I}(X)$，而且根据(13.5.2)，对一切 $x \in X$ 有 $f(x) = \int^* h(x,y)d\mu(y)$. 由于按定义有 $\nu(h_n) = \lambda(f_n)$，故再用(13.5.2)即可完成证明.

以下，一直到(13.21.16)（包括(13.21.16)），我们假定测度 $\lambda \in M(X)$ 与 $\mu \in M(Y)$ 是正的，且令 $\nu = \lambda \otimes \mu$.

**(13.21.4)** 对 $X \times Y$ 到 $\bar{R}$ 的任一映射 $h$，有

**(13.21.4.1)** $$\int^* h d\nu \geqslant \lambda^*\left(\int^* h(x,y)d\mu(y)\right).$$

事实上，设 $u$ 是属于 $\mathscr{I}(X \times Y)$ 的函数，满足 $h \leqslant u$，则对一切 $x \in X$，有 $\int^* h(x,y)d\mu(y) \leqslant \int^* u(x,y)d\mu(y)$，因而鉴于(13.21.3)，有

$$\lambda^*\left(\int^* h(x,y)d\mu(y)\right) \leqslant \lambda^*\left(\int^* u(x,y)d\mu(y)\right) = \nu^*(u);$$

于是由 $\nu^*(h)$ 的定义(13.5.5)即可得到不等式(13.21.4.1).

我们也写 $\iint^* h d\lambda d\mu$ 或 $\iint^* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$ 以代替 $\nu^*(h)$，并写 $\int^* d\lambda(x)\int^* h(x,y)d\mu(y)$ 以代替 $\lambda^*\left(\int^* h(x,y)d\mu(y)\right)$；对于下积分，同样有记号 $\iint_* h d\lambda d\mu$，$\iint_* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$ 与 $\int_* d\lambda(x)\int_* h(x,y)d\mu(y)$. 这样，不等式(13.21.4.1)就可写为

**(13.21.4.2)** $$\iint^* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y) \geqslant \int^* d\lambda(x)\int^* h(x,y)d\mu(y).$$

当 $h \in \mathscr{I}(X \times Y)$ 时，上式中等号成立. 我们当然可以交换 $X$ 与 $Y$ 而得到类似的不等式(相应地，等式)；对于下积分，也能得到一个反向不等式(当 $h \in \mathscr{S}(X \times Y)$ 时是等式)：

**(13.21.4.3)** $$\iint_* h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y) \leqslant \int_* d\lambda(x)\int_* h(x,y)d\mu(y).$$

**(13.21.5)** 设 $N$ 是 $X \times Y$ 内的 $\nu$ 可忽略集，则使得 $N$ 的截面 $N(x) \subset Y$ 不是 $\mu$ 可忽略的 $x \in X$ 所成的集是 $\lambda$ 可忽略的(换言之，对于 $\lambda$ 几乎处处有 $\mu(N(x)) = 0$).

把(13.21.4.2)应用于 $h=\varphi_N$ 即得这个结果。

**(13.21.6)** 设 $h$ 是 $X\times Y$ 到拓扑空间 $E$ 的 $\nu$ 可测映射，则使得偏映射 $y\to h(x,y)$ 不是 $\mu$ 可测的 $x\in X$ 所成的集是 $\lambda$ 可忽略的（换言之，映射 $y\to h(x,y)$ 关于 $\lambda$ 几乎处处是 $\mu$ 可测的）。

事实上，按照假定，存在 $X\times Y$ 的划分，它由 $\nu$ 可忽略集 $N$ 与紧集序列 $(K_n)_{n\geq 1}$ 组成，使得每个限制 $h|K_n$ 都连续 (13.9)。设 $M$ 是使得截面 $N(x)$ 不是 $\mu$ 可忽略的 $x\in X$ 组成的 $\lambda$ 可忽略集 (13.21.5)，则对每个 $x\notin M$，存在 $Y$ 的一个划分，它由紧集 $K_n(x)$ $(n\geqslant 1)$ 与 $\mu$ 可忽略集 $N(x)$ 组成，使得 $y\to h(x,y)$ 在每个 $K_n(x)$ 上的限制是连续的。由此即得所需的结论。

注意，完全可能出现这样的现象：对于每个 $x\in X$，函数 $y\to f(x,y)$ 是 $\mu$ 可测的，且对每个 $y\in Y$，函数 $x\to f(x,y)$ 是 $\lambda$ 可测的，但 $f$ 却不是 $\nu$ 可测的。

**(13.21.7)** (**Lebesgue-Fubini 定理**)设 $\lambda,\mu$ 分别是 $X,Y$ 上的两个正测度，$\nu=\lambda\otimes\mu$ 是 $\lambda$ 与 $\mu$ 的乘积，则对 $X\times Y$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的每个 $\nu$ 可积映射 $h$，使得偏映射 $y\to h(x,y)$ 不是 $\mu$ 可积的 $x\in X$ 所成的集是 $\lambda$ 可忽略的，对于 $\lambda$ 几乎处处有定义的函数 $x\to\int h(x,y)d\mu(y)$ 是 $\lambda$ 可积的，而且有

$$\textbf{(13.21.7.1)}\quad \iint h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)=\int d\lambda(x)\int h(x,y)d\mu(y).$$

由 (13.21.4.1) 得知，函数 $x\to\int^* |h(x,y)|d\mu(y)$ 在一个 $\lambda$ 可忽略集 $N_1$ 的余集上是有限的 (13.6.4)。另一方面，使得 $y\to h(x,y)$ 不是 $\mu$ 可测的 $x\in X$ 所成的集 $N_2$ 是 $\lambda$ 可忽略的(13.21.6) 于是由(13.9.13)得到，对于每个 $x\notin N=N_1\cup N_2$，映射 $y\to h(x,y)$ 是 $\mu$ 可积的，从而函数 $x\to\int h(x,y)d\mu(y)$ 关于 $\lambda$ 几乎处处有定义；故这个函数为 $\lambda$ 可积的事实与关系式 (13.21.7.1) 可由(13.21.4.2)与(13.21.4.3)得到。

交换 $X$ 与 $Y$ 的位置，我们也得到，在(13.21.7)的假定下，有

$$\textbf{(13.21.7.2)}\quad \iint h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)=\int d\mu(y)\int h(x,y)d\lambda(x).$$

但要注意，可能(13.21.7.1)与(13.21.7.2)的右边都有定义且相等，但 $h$ 却不是 $\nu$ 可积的(甚至当 $h$ 为 $\nu$ 可测时也可能如此)(问题3)。

**(13.21.8)** 设 $h$ 是非负 $\nu$ 可测函数，则映射

$$x \to \int^* h(x, y) d\mu(y)$$

是 $\lambda$ 可测的，且有

**(13.21.8.1)** $$\iint^* h(x, y) d\lambda(x) d\mu(y) = \int^* d\lambda(x) \int^* h(x, y) d\mu(y).$$

事实上，设 $(K_n)$ 是 $X \times Y$ 的紧子集的递增序列且它形成 $X \times Y$ 的覆盖(3.18.3)，则可写 $h = \sup\limits_n h_n$，其中 $h_n = \inf(h, n\varphi_{K_n})$ 并且 $h_n$ 是 $\nu$ 可积的((13.9.7)与(13.9.13))；另一方面(13.5.7)，我们有 $\nu^*(h) = \sup\limits_n \nu(h_n)$。根据(13.6.2)与(13.21.7)，存在 $\lambda$ 可忽略集 $N$，使对一切 $x \notin N$，每个函数 $y \to h_n(x, y)$ 都是 $\mu$ 可积的；而且还有(13.21.7)，函数 $x \to \int h_n(x, y) d\mu(y)$ 是 $\lambda$ 可积的并对一切 $n$ 有

$$\nu(h_n) = \int d\lambda(x) \int h_n(x, y) d\mu(y).$$

由(13.5.7)推出，对一切 $x \notin N$，有

$$\int^* h(x, y) d\mu(y) = \sup_n \int h_n(x, y) d\mu(y);$$

因而函数 $x \to \int^* h(x, y) d\mu(y)$ 是 $\lambda$ 可测的(13.9.11)，再次使用(13.5.7)即得关系式(13.21.8.1)。

**(13.21.9)** 为使 $\nu$ 可测函数 $h$ 是 $\nu$ 可积的，必须且只须

$$\int^* d\lambda(x) \int^* |h(x, y)| d\mu(y) < +\infty.$$

这是(13.21.8)与(13.9.13)的推论。

**(13.21.10)** 设 $A$ 是 $X \times Y$ 内的 $\nu$ 可测集。

(i) 使得截面 $A(x)$ 不是 $\mu$ 可测的 $x \in X$ 的集 $M$ 是 $\lambda$ 可忽略的，函数 $x \to \mu^*(A(x))$ 是 $\lambda$ 可测的，且有 $\nu^*(A) = \int^* \mu^*(A(x)) d\lambda(x)$。特别是，如果除去 $x$ 的值的一个 $\lambda$ 可忽略集，$A(x)$ 都是 $\mu$ 可忽略的，则 $A$ 是 $\nu$ 可忽略的。

(ii) 如果 $A$ 是 $\nu$ 可积的，则使得 $A(x)$ 不是 $\mu$ 可积的 $x \in X$ 的

集是 $\lambda$ 可忽略的,函数 $x\to\mu(A(x))$(它关于 $\lambda$ 几乎处处有定义)是 $\lambda$ 可积的,且有 $\nu(A)=\int\mu(A(x))d\mu(x)$.

这是(13.21.6),(13.21.8)与(13.21.7)的特殊情形.

**(13.21.11)′** 设 $f,g$ 分别是 $X,Y$ 到 $[0,+\infty]$ 的映射,如果使用(13.11)中关于乘积的约定,则有

**(13.21.11.1)**

$$\iint^* f(x)g(y)d\lambda(x)d\mu(y)=\left(\int^* f(x)d\lambda(x)\right)\left(\int^* g(y)d\mu(y)\right).$$

基于(13.21.4),我们有

$$\iint^* f(x)g(y)d\lambda(x)d\mu(y)\geqslant\int^* d\lambda(x)\int^* f(x)g(y)d\mu(y).$$

另一方面,对每个 $x\in X$,我们有(在上述约定下)

$$\int^* f(x)g(y)d\mu(y)=f(x)\int^* g(y)d\mu(y)$$

与

$$\int^* d\lambda(x)\int^* f(x)g(y)d\mu(y)=\int^*\left(\int^* g(y)d\mu(y)\right)f(x)d\lambda(x)$$
$$=\left(\int^* f(x)d\lambda(x)\right)\left(\int^* g(y)d\mu(y)\right).$$

因此,只须证明不等式

**(13.21.11.2)**

$$\iint^* f(x)g(y)d\lambda(x)d\mu(y)\leqslant\left(\int^* f(x)d\lambda(x)\right)\left(\int^* g(y)d\mu(y)\right).$$

当右边为 $+\infty$ 时,这个不等式显然成立. 接着考虑右边的两个因子都为有限的情形. 此时存在两个递减序列 $(f_n),(g_n)$,使得 $f_n\in\mathscr{I}(X),g_n\in\mathscr{I}(Y)$,对一切 $n$ 有 $f\leqslant f_n,g\leqslant g_n$,并且

$$\int^* fd\lambda=\lim_{n\to\infty}\int^* f_nd\lambda,\quad\int^* gd\mu=\lim_{n\to\infty}\int^* g_nd\mu.$$

由于所作的约定与(12.7.5),函数 $(x,y)\to f_n(x)g_n(y)$ 属于 $\mathscr{I}(X\times Y)$,且对一切 $n$ 与一切 $(x,y)\in X\times Y$ 有 $f(x)g(y)\leqslant f_n(x)g_n(y)$. 然而根据(13.21.3),我们有

$$\left(\int^* f_n(x)d\lambda(x)\right)\left(\int^* g_n(y)d\mu(y)\right)=\int^* d\lambda(x)\int^* f_n(x)g_n(y)d\mu(y)$$
$$=\iint^* f_n(x)g_n(y)d\lambda(x)d\mu(y)\geqslant\iint^* f(x)g(y)d\lambda(x)d\mu(y),$$

由此通过取极限即得所需的结论.

最后，为处理例如 $f$ 为 $\lambda$ 可忽略的情形，只须(由于上面所作的约定)证明函数 $(x,y)\to f(x)g(y)$ 是 $\nu$ 可忽略的，而这是下述命题的推论:

**(13.21.12)** 对于任何 $\lambda$ 可忽略集 $N\subset X$，集 $N\times Y$ 是 $\nu$ 可忽略的.

事实上，由于 $Y$ 是紧集序列 $(L_n)$ 的并，故只须证明每个集 $N\times L_n$ 是 $\nu$ 可忽略的. 然而我们已经证明，当 (13.21.11.1) 的右边的两个因子均为有限时，就可应用这个式子. 现在只须在这个式子中取 $f=\varphi_N$ 与 $g=\varphi_{L_n}$ 即可.

**(13.21.13)** 设 $E$, $F$, $G$ 是三个拓扑空间，$u$ 是 $E\times F$ 到 $G$ 的连续映射. 若 $f$ (相应地，$g$)是 $X$ 到 $E$ 的 $\lambda$ 可测映射(相应地，$Y$ 到 $F$ 的 $\mu$ 可测映射)，则

$$(x,y)\to u(f(x),g(y))$$

是 $X\times Y$ 到 $G$ 的 $\nu$ 可测映射.

显然 (13.9.6)，只须证明 $(x,y)\to f(x)$ 是 $X\times Y$ 到 $E$ 的 $\nu$ 可测映射. 存在 $X$ 的一个划分，它由紧集序列 $(K_n)$ 与 $\lambda$ 可忽略集 $N$ 组成，使得每个函数 $f|K_n$ 都连续. 于是，对 $Y$ 的每个紧子集 $L$，映射 $(x,y)\to f(x)$ 在每个紧集 $K_n\times L$ 上的限制是连续的，并且集 $N\times L$ 是 $\nu$ 可忽略的 (13.21.12)，由此即得所需的结论 (13.9.4).

对于两个映射 $f:X\to\bar{\mathbf{R}}$, $g:Y\to\bar{\mathbf{R}}$，我们以 $f\otimes g$ 表示 $X\times Y$ 到 $\bar{\mathbf{R}}$ 的映射 $(x,y)\to f(x)g(y)$ (采用 (13.11) 中关于 $\bar{\mathbf{R}}$ 中乘积的约定). 对于对应到 $\mathbf{C}$ 中的映射，也作同样的规定.

**(13.21.14)** 若 $f$ (相应地，$g$) 是 $X$ (相应地，$Y$) 到 $\bar{\mathbf{R}}$ 或 $\mathbf{C}$ 的 $\lambda$ 可积(相应地，$\mu$ 可积)映射，则函数 $f\otimes g$ 是 $\nu$ 可积的，且有

**(13.21.14.1)**

$$\iint f(x)g(y)d\lambda(x)d\mu(y)=\left(\int f(x)d\lambda(x)\right)\left(\int g(y)d\mu(y)\right).$$

由于线性性质，我们可以归结为 $f$ 与 $g$ 在 $\bar{\mathbf{R}}$ 中取值的情形.

根据(13.21.12),使得 $f(x)$ 或 $g(y)$ 为无限的点 $(x,y)$ 的集是 $\nu$ 可忽略的,因而由(13.21.13)与(13.9.6)得知 $f\otimes g$ 是 $\nu$ 可测的. 于是 $f\otimes g$ 为 $\nu$ 可积的事实可由(13.21.11)与(13.9.13)得到. 最后,公式(13.21.14.1)是 Lebesgue-Fubini 定理的推论.

**(13.21.15)** 设 $A$ 是 $X$ 的子集, $B$ 是 $Y$ 的子集.

(i) 我们有 (采用 (13.11) 中的约定) $\nu^*(A\times B)=\lambda^*(A)\mu^*(B)$.

(ii) 若 $A$ 是 $\lambda$ 可测的, $B$ 是 $\mu$ 可测的, 则 $A\times B$ 是 $\nu$ 可测的.

(iii) 若 $A$ 是 $\lambda$ 可积的, $B$ 是 $\mu$ 可积的, 则 $A\times B$ 是 $\nu$ 可积的,且 $\nu(A\times B)=\lambda(A)\mu(B)$.

这是(13.21.11),(13.21.13)与(13.21.14)的特殊情形.

**(13.21.16)** 设 $f$ (相应地, $g$)是 $X$ (相应地, $Y$)到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 的局部 $\lambda$ 可积(相应地,局部 $\mu$ 可积)映射,则 $f\otimes g$ 是局部 $\nu$ 可积的, 且有

**(13.21.16.1)** $(f\otimes g)\cdot(\lambda\otimes\mu)=(f\cdot\lambda)\otimes(g\cdot\mu)$.

由于使得 $f(x)$ 或 $g(y)$ 为无限的 $(x,y)$ 所成的集是 $\nu$ 可忽略的 (13.21.12),所以由 (13.21.13) 与 (13.9.8.1)得知 $f\otimes g$ 是 $\nu$ 可测的; 而且对 $X$ 内的每个紧集 $K$ 与 $Y$ 内的每个紧集 $L$, 根据(13.21.14), 函数 $(f\otimes g)\varphi_{K\times L}=(f\varphi_K)\otimes(g\varphi_L)$ 是可积的, 因而 $f\otimes g$ 是局部 $\nu$ 可积的 (13.13.1). 再由 (13.21.14), 对任何函数 $u\in\mathscr{K}_{C}(X)$ 与 $v\in\mathscr{K}_{C}(Y)$,有

$$\iint f(x)g(y)u(x)v(y)d\lambda(x)d\mu(y)=$$
$$\left(\int f(x)u(x)d\lambda(x)\right)\left(\int g(y)v(y)d\mu(y)\right);$$

因此由(13.21.1)即得关系式(13.21.16.1).

**(13.21.17)** 设 $\lambda$ 是 $X$ 上的复测度, $\mu$ 是 $Y$ 上的复测度, 则 $|\lambda\otimes\mu|=|\lambda|\otimes|\mu|$.

事实上,我们可以写 $\lambda=f\cdot|\lambda|$, $\mu=g\cdot|\mu|$,其中 $|f|=1$, $|g|=1$ (13.16.3); 由此推出 $|f\otimes g|=1$, 因而所需结论由(13.21.16)与(13.13.4)得到.

**(13.21.18)** 设 $\lambda$ 是 $X$ 上的复测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的复测度.

(i) 若 $\lambda$ 集中于 $A\subset X$ 上且 $\mu$ 集中于 $B\subset Y$ 上(13.18)，则 $\lambda\otimes\mu$ 集中于 $A\times B$ 上.

(ii) $\mathrm{Supp}(\lambda\otimes\mu)=\mathrm{Supp}(\lambda)\otimes\mathrm{Supp}(\mu)$.

(iii) 采用(13.11)中关于乘积的约定，有

**(13.21.18.1)** $$\|\lambda\otimes\mu\|=\|\lambda\|\cdot\|\mu\|.$$

特别是，若 $\lambda$ 与 $\mu$ 有界，则 $\lambda\otimes\mu$ 也有界.

根据(13.21.17)，可以限于考虑 $\lambda$ 与 $\mu$ 是正测度的情形，于是结论(i)由 $X\times Y-A\times B$ 是 $(\lambda\otimes\mu)$ 可忽略集 $(X-A)\times Y$ 与 $X\times(Y-B)$ (13.21.12) 的并得到. 然后由(i)得到 $\mathrm{Supp}(\lambda\otimes\mu)\subset\mathrm{Supp}(\lambda)\times\mathrm{Supp}(\mu)$.

另一方面，若 $x\in\mathrm{Supp}(\lambda)$，$y\in\mathrm{Supp}(\mu)$，则对 $x$ 在 $X$ 内的任一紧邻域 $V$ 与 $y$ 在 $Y$ 内的任一紧邻域 $W$，有 $\lambda(V)>0$ 与 $\mu(W)>0$，由此根据(13.21.15)得到 $(\lambda\otimes\mu)(V\times W)=\lambda(V)\cdot\mu(W)>0$；又根据 $X\times Y$ 内邻域的定义，即可证得(ii). 最后，只要(13.21.18.1)右边的两个因子不是一个为 0 另一个为 $+\infty$ 的情形，应用(13.21.11)于 $f=\varphi_X$ 与 $g=\varphi_Y$ 即可得到(iii)；而在所说的这种情形，我们有 $\lambda\otimes\mu=0$ (13.21.12)，因此由所作的约定，关系式(13.21.18.1)仍然成立.

**(13.21.19)** 对于任意有限个测度的乘积，我们有类似于上面叙述的定义与结果：设 $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是局部紧空间的有限序列，而对每个 $i$，$\mu_i$ 是 $X_i$ 上的(复)测度，则 $X=\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 上满足关系式

$$\int f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)d\nu(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\int f_i(x_i)d\mu_i(x_i)$$

的唯一测度 $\nu$ 称为 $\mu_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的**乘积测度**，记作 $\mu_1\otimes\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n$ 或 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n}\mu_i$. 事实上，这种测度的唯一性与存在性可由对 $n$ 作归纳法得证：令 $\nu=(\mu_1\otimes\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_{n-1})\otimes\mu_n$，并注意若

$\nu'$ 也是所提问题的解，则由归纳法假设，对 $h\in\mathscr{K}\left(\prod_{i=1}^{n-1}X_i\right)$，必有

$$\nu'(h\otimes f_n)=((\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_{n-1})(h))\mu_n(f_n)=\nu(h\otimes f_n).$$

由测度乘积的这种特征立即推出这个乘积是结合的；特别是，我们也有

$$\mu_1\otimes\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n=\mu_1\otimes(\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n).$$

我们常用

$$\iint\cdots\int f d\mu_1 d\mu_2\cdots d\mu_n \text{ 或 } \iint\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)d\mu_1(x_1)\cdots d\mu_n(x_n)$$

来代替 $\int f d\nu$；对上积分或下积分，也引进类似的记号．我们让读者去细致表述与证明相应于上面对 $n=2$ 所证明的各种结果，这只须通过对 $n$ 作归纳法进行简单的推理即可得到．

$\boldsymbol{R}^n$ 的 $n$ 个因子上的 Lebesgue 测度的乘积，称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

## 问　　题

1) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$f$ 是定义在 $X$ 上的非负实值函数．在积空间 $X\times\boldsymbol{R}$ 内，以 $D_f$ 表示使得 $0\leqslant t\leqslant f(x)$ 的点 $(x,t)$ 所成的集、并设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度．

a) 试证，为使 $f$ 是 $\mu$ 可测的，必须且只须 $D_f$ 关于乘积测度 $\nu=\mu\otimes\lambda$ 是可测集．(为表明所述条件是必要的，证明若 $f$ 是 $\mu$ 可测的，则 $D_f$ 是一个 $\nu$ 可忽略集与形如 $A\otimes I$ 的集的一个可数族的并，其中 $A$ 是 $\mu$ 可测集而 $I$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 内的一个区间．为证明所述条件是充分的，利用(13.21.10)证明，若这个条件得到满足，则在 $\boldsymbol{R}$ 内存在处处稠密集 $H$，使对一切 $\alpha\in H$，$f^{-1}([\alpha,+\infty])$ 是 $\mu$ 可测的.)

b) 试证，为使 $f$ 是 $\mu$ 可积的，必须且只须 $D_f$ 是 $\nu$ 可积的，此时有 $\nu(D_f)=\int f d\mu$．此外，如果以 $g$ 表示 $\boldsymbol{R}_+$ 上由 $g(t)=\mu^*(f^{-1}[t,+\infty])$ 所定义的递减实值函数，则有

$$\int f d\mu=\int_0^{+\infty}g(t)\,dt.$$

c) 假定 $X$ 是区间 $[0,a]$ $(a>0)$，取 $\mu$ 为 $X$ 上的 Lebesgue 测度，试证，若 $f$ 是 $\mu$ 可积的递减函数，则对 $X$ 的任何 $\mu$ 可测子集 $A$，有

$$\int_A f(t)dt \leqslant \int_0^{\mu(A)} f(t)dt$$

(利用 b)).

2) a) 记号同问题 1，设 $\Gamma_f$ 是 $f$ 的图象，即 $X\times \boldsymbol{R}$ 的点 $(x, f(x))$ 所成的集. 试证，若 $f$ 是 $\mu$ 可测的，则 $\Gamma_f$ 是 $\nu$ 可忽略的（利用 (13.21.13) 与 (13.21.10)).

b) 设 $0<\alpha<1$, $Q(\alpha)$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的子集，它是 $]-1,1[\times]-\alpha,\alpha[$ 与 $]-\alpha,\alpha[\times]-1,1[$ 的并在正方形 $Q=[-1,1]\times[-1,1]$ 内的余集；$Q(\alpha)$ 是它的四个连通分支

$Q_1(\alpha)=[-1,-\alpha]\times[-1,-\alpha]$, $Q_2(\alpha)=[-1,-\alpha]\times[\alpha,1]$,

$Q_3(\alpha)=[\alpha,1]\times[\alpha,1]$, $Q_4(\alpha)=[\alpha,1]\times[-1,-\alpha]$

的并. 以 $h_{1,\alpha}$ 表示 $Q$ 到 $Q_1(\alpha)$ 上的相似变换，满足

$$h_{1,\alpha}(-1,-1)=(-1,-1),\ h_{1,\alpha}(1,-1)=(-1,-\alpha);$$

以 $h_{2,\alpha}$ 表示 $Q$ 到 $Q_2(\alpha)$ 上的相似变换，满足

$$h_{2,\alpha}(-1,-1)=(-1,\alpha),\ h_{2,\alpha}(1,-1)=(-\alpha,\alpha);$$

以 $h_{3,\alpha}$ 表示 $Q$ 到 $Q_3(\alpha)$ 上的相似变换，满足

$$h_{3,\alpha}(-1,-1)=(\alpha,\alpha),\ h_{3,\alpha}(1,-1)=(1,\alpha);$$

以 $h_{4,\alpha}$ 表示 $Q$ 到 $Q_4(\alpha)$ 上的相似变换，满足

$$h_{4,\alpha}(-1,-1)=(1,-\alpha),\ h_{4,\alpha}(1,-1)=(1,-1).$$

另一方面，在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0,7]$ 内，令 $I_k=[k,k+1]$, $0\leqslant k\leqslant 6$，并设 $u_k$ 是 $[0,7]$ 到 $I_k$ 上的递增相似变换.

设 $f_\alpha$ 是 $[0,7]$ 到 $Q$ 的连续映射，使得 $f_\alpha$ 在每个区间 $I_k$ 上是仿射线性映射，且满足 $f_\alpha(0)=(-1,-1)$, $f_\alpha(1)=(-1,-\alpha)$, $f_\alpha(2)=(-1,\alpha)$, $f_\alpha(3)=(-\alpha,\alpha)$, $f_\alpha(4)=(\alpha,\alpha)$, $f_\alpha(5)=(1,\alpha)$, $f_\alpha(6)=(1,-\alpha)$, $f_\alpha(7)=(1,-1)$.

现在我们定义 $[0,7]$ 到 $Q$ 的连续映射所成的一个序列 $(g_n)$ 如下：设 $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $]0,1[$ 内的数的一个递减序列，令 $g_0=f_{\alpha_0}$；对 $n\geqslant 1$，假定 $g_{n-1}$ 已经定义，考虑所有 $n$ 项序列 $s=(i_1,\cdots,i_n)$，其中 $i_1,\cdots,i_n$ 等于某个整数 $k\in[0,6]$，并令 $v_s=u_{i_1}\circ u_{i_2}\circ\cdots\circ u_{i_n}$. 于是只须对 $0\leqslant t\leqslant 7$ 与 $7^n$ 个序列 $s$ 中的每个 $s$ 定义 $g_n(v_s(t))$. 若至少有一个 $i_l$ 是奇数，则令 $g_n(v_s(t))=g_{n-1}(v_s(t))$；若在相反的情形即 $i_l=2j_l$ $(1\leqslant l\leqslant n,\ 0\leqslant j_l\leqslant 3)$ 的情形，则令 $g_n(v_s(t))=w_s(f_{\alpha_n}(t))$，其中 $w_s=h_{j_1+1,\alpha_1}\circ h_{j_2+1,\alpha_2}\circ\cdots\circ h_{j_n+1,\alpha_n}$. 试证序列 $(g_n)$ 一致收敛于 $[0,7]$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个连续单射 $g$，且若适当地选取序列 $(\alpha_n)$,

简单弧 $g([0,7])$（第九章的附录第四节）关于 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度是不可忽略的。

3) a) 给出这样的例子：$X,Y$ 是两个紧空间，$\lambda$ 是 $X$ 上的正测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的正测度，函数 $f$ 为 $\lambda\otimes\mu$ 可测，并使得两个积分 $\int d\mu(y)\int f(x,y)\,d\lambda(x)$ 与 $\int d\lambda(x)\int f(x,y)d\mu(y)$ 都有意义，但却具有不同的值（参阅5.2问题5）。

b) 对每个正整数 $n$，在 $\boldsymbol{R}$ 内设 $A'_n=[2^{-n},3\cdot 2^{-n-1}[$，$A''_n=[3\cdot 2^{-n-1},2^{-n+1}[$。在 $\boldsymbol{R}^2$ 内，令 $B'_n=A'_n\times A'_n$，$B''_n=A''_n\times A''_n$，$C'_n=A'_n\times A''_n$，$C''_n=A''_n\times A'_n$。对一切正整数 $n$，在 $B'_n$ 与 $B''_n$ 内，令 $f(x,y)=4^{n+1}$，在 $C'_n$ 与 $C''_n$ 内，令 $f(x,y)=-4^{n+1}$，而在 $\boldsymbol{R}^2$ 的其他点处，令 $f(x,y)=0$。试证 $f$ 可测且两个积分 $\int dy\int f(x,y)dx$ 与 $\int dx\int f(x,y)dy$ 都有定义并相等，然而 $f$ 关于 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度却是不可积的。

4) 设 $X,Y$ 是两个局部紧空间，$\lambda$ 是 $X$ 上的正测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的正测度。设 $f$ 是 $X\times Y$ 到可度量化空间 $G$ 的映射，满足：1° 对每个 $x\in X$，映射 $f(x,\cdot)$ 是 $\mu$ 可测的；2° 对每个 $y\in Y$，映射 $f(\cdot,y)$ 是连续的。在这些条件下，试证 $f$ 是 $\lambda\otimes\mu$ 可测的。（归结为 $X,Y$ 都是紧空间的情形；应用 Егоров 定理与 $G$ 为可距离化的事实，证明 $f$（关于 $\lambda\otimes\mu$）几乎处处是 $\lambda\otimes\mu$ 可测函数的某个序列的极限.）

5) a) 设 $X,Y$ 是两个局部紧空间，$\lambda$ 是 $X$ 上的正测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的正测度。设 $f$ 是定义于 $X\times Y$ 上的非负实值函数，它在 $X\times Y$ 的任一紧子集上有界，且满足：1° 对几乎所有 $x\in X$，函数 $f(x,\cdot)$ 是 $\mu$ 可测的；2° 对每个函数 $h\in\mathscr{K}(Y)$，几乎处处有定义的函数 $x\to\int f(x,y)h(y)d\mu(y)$ 是 $\lambda$ 可测的。在这些条件下，试证存在 $(\lambda\otimes\mu)$ 可测函数 $g$，使对每个 $x\in X$，除了某个 $\mu$ 可忽略集 $A_x$（依赖于 $x$）中的点外，有 $f(x,y)=g(x,y)$。（证明，对每个函数 $u\in\mathscr{K}(X\times Y)$，函数 $f(x,\cdot)$，$u(x,\cdot)$ 对几乎所有 $x\in X$ 是 $\mu$ 可积的，且几乎处处有定义的函数 $x\to\int f(x,y)u(x,y)d\mu(y)$ 是 $\lambda$ 可积的；为此用形如 $v(x)w(y)$ 的函数逼近 $u$。然后注意线性形式 $u\to\int d\lambda(x)\int f(x,y)u(x,y)d\mu(y)$ 是 $X\times Y$ 上的以 $\lambda\otimes\mu$ 为基的正测度，并应用 Lebesgue-Nikodym 定理；最后利用这样的事实：$Y$ 是相对紧开集 $U_n$ 的可数并，且在 $\mathscr{K}(Y)$ 内存在（由函数组成的）可数集 $D$，使得属于 $\mathscr{K}(Y)$ 的任一函数都是属于 $D$ 且其支集包含在某个 $U_n$ 内的函数的一致极限.）

b) 试证 a) 中的条件得到满足，如果：1° 对于几乎所有 $y\in Y$，函数 $f(\cdot,y)$ 为 $\lambda$ 可测；2° 对于几乎所有 $x\in X$，函数 $f(x,\cdot)$ 关于 $\mu$ 为几乎处处连续（利用 13.9 问题 7 c)）。

c) 取 $X=Y=[0,1]$，且 $\lambda$、$\mu$ 为 Lebesgue 测度. 承认连续统假设，设 $x<y$ 是 $X$ 上的一个良序关系，对于这个关系，$X$ 没有最大元，且满足：对于每个 $x\in X$，使得 $z<x$ 的 $z\in X$ 所成的集是可数的. 试证使得 $x<y$ 的元偶 $(x,y)$ 的集的特征函数 $f$ 满足 a) 中的条件，然而对一切 $y\in Y$ 有 $\int f(x,y)d\lambda(x)=0$，而对一切 $x\in X$ 有 $\int f(x,y)d\mu(y)=1$.

6) 设 $u$ 与 $v$ 是两个在 $\boldsymbol{R}$ 上递增且右连续的实值函数，且当 $x<0$ 时有 $u(x)=v(x)=0$. 设 $w$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上递增且右连续的函数，其定义为：当 $t\geqslant 0$ 时，$w(t)=u(t)v(t)$；当 $t<0$ 时，$w(t)=0$. 设 $\lambda,\mu,\nu$ 分别是与 $u,v,w$ 相联系的 Stieljes 测度（13.18 问题 6）.

对定义于 $\boldsymbol{R}$ 上的每个实值函数 $f$，由下述条件相应地作定义在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的函数 $f_0$：若 $y<x$，令 $f_0(x,y)=f(x)$；若 $y\geqslant x$，令 $f_0(x,y)=f(y)$. 试证为使 $f$ 是 $\nu$ 可积的，必须且只须 $f_0$ 关于乘积测度 $\lambda\otimes\mu$ 是可积的，此时且有 $\int f d\nu=\iint f_0 d\lambda d\mu$（首先就区间的特征函数证明这个结果）. 由此推断公式

$$\int f(x)dw(x)=\int f(x)v(x-)du(x)+\int f(x)u(x+)dv(x).$$

特别，若 $u$ 与 $v$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续，我们就得到**分部积分**公式

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b v(x)du(x).$$

考虑 $u$ 与 $v$ 在每个区间 $[n,n+1[$（$n$ 是非负整数）上均为常数的情形（**Abel 部分和**）.

7) 设 $p$ 是不小于 1 的有限实数，$X,Y$ 是两个局部紧空间，$\lambda$ 是 $X$ 上的正测度，$\mu$ 是 $Y$ 上的正测度，$f$ 是定义在 $X\times Y$ 上的非负函数，使得 $f$ 与 $f^p$ 关于测度 $\lambda\otimes\mu$ 均为可积. 试证不等式

$$\left(\int^*\left(\int f d\mu\right)^p d\lambda\right)^{1/p}\leqslant\int^*\left(\int f^p d\lambda\right)^{1/p}d\mu.$$

（对每个 $x\in X$，把 Hölder 不等式（13.11 问题 12 a)）应用到函数 $y\mapsto f(x,y)$ 上，取 $f(x,y)$ 的形式为

$$f(x,y)=g(x,y)\left(\int f^p(x,y)d\lambda(x)\right)^{1/pq},$$

其中 $q$ 是 $p$ 的共轭指数.）

8) 设 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $n$ 个局部紧空间，$\mu_i$ 是 $X_i$ 上的正测度（$1\leqslant i\leqslant n$）.

对每个指标 $i$，以 $E_i$ 表示积 $\prod_{j\neq i} X_j$；设 $f_i$ 是 $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ 上关于 $\mu=\bigotimes_{i=1}^{n}\mu_i$ 为可测的非负函数，且它不依赖于 $x_i$. 试证，若 $f_k^{n-1}$ 关于测度 $\bigotimes_{j\neq k}\mu_j$ 是可积的($1\leqslant k\leqslant n$)，则函数 $f_1f_2\cdots f_n$ 是 $\mu$ 可积的，且有

$$\iint\cdots\int f_1f_2\cdots f_n d\mu_1 d\mu_2\cdots d\mu_n\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n} J_k\right)^{1/(n-1)},$$

其中对每个指标 $k$，令 $J_k=\int\cdots\int f_k^{n-1}d\mu_1\cdots d\mu_{k-1}d\mu_{k+1}\cdots d\mu_n$(对 $n$ 用归纳法，应用 Lebesgue-Fubini 定理与 Hölder 不等式)。

由此推断，若 $A$ 是 $X$ 的 $\mu$ 可测子集，$A_i$ 是 $A$ 在 $E_i$ 上的射影，且 $A_i$ 关于 $E_i$ 上的测度 $\bigotimes_{j\neq i}\mu_j$ 是可积的且它的测度等于 $m_i$，则 $A$ 是 $\mu$ 可积的，且有

$$\mu(A)\leqslant(m_1m_2\cdots m_n)^{1/(n-1)}.$$

把它推广到下述情形：代替 $n-1$ 个 $X_i$ 的 $n$ 个积，考虑 $p$ 个 $X_i$ 的 $\binom{n}{p}$ 个积，并且考虑 $\binom{n}{p}$ 个非负函数（这些非负函数中每一个都只依赖于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 中的 $p$ 个)的积在 $X$ 上的积分。

9）设 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是紧空间的无穷序列，在每个 $X_n$ 上，设 $\mu_n$ 是总质量等于 1 的正测度。

a）试证在 $X=\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ 上存在唯一的正测度 $\mu$，使对每个整数 $n$ 与每个由函数 $f_i\in\mathscr{C}_R(X_i)$ 组成的有限序列 $(f_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$，有

$$\mu(f)=\prod_{i=0}^{n}\mu_i(f_i),$$

其中 $f(x)=\prod_{i=0}^{n} f_i(\mathrm{pr}_i x)$（注意对于 $n$ 与 $f_i\in\mathscr{C}_R(X_i)$ 的一切选法，形如 $\prod_{i=0}^{n} f_i(\mathrm{pr}_i x)$ 的连续函数在 Banach 空间 $\mathscr{C}_R(X)$ 内形成一个全子集)。$\mu$ 称为族 $(\mu_n)$ 的**乘积测度**，记作 $\mu=\bigotimes_{n=0}^{\infty}\mu_n$.

b）试证，若对每个 $n$，$A_n$ 是 $X_n$ 的 $\mu_n$ 可测子集，则集 $A=\prod_{n=0}^{\infty} A_n$ 是 $\mu$ 可测的，且有 $\mu(A)=\prod_{n=0}^{\infty}\mu_n(A_n)$.

c) 设 $f$ 是 $X$ 上的非负 $\mu$ 可积函数. 对$\boldsymbol{N}$的每个子集 $L$, 令 $L'=\boldsymbol{N}-L$; 把$X$等同于积 $X_L\times X_{L'}$, 其中 $X_L=\prod_{n\in L}X_n$, $X_{L'}=\prod_{n\in L'}X_n$; 对 $x\in X$, 令 $x_L=\mathrm{pr}_L x$, $x_{L'}=\mathrm{pr}_{L'}x$ 且把 $x$ 等同于 $(x_L,x_{L'})$; 最后, 设 $\mu_{L'}$ 是 $X_{L'}$ 上的乘积测度 $\bigotimes_{n\in L'}\mu_n$. 令 $f_L(x)=\int f(x_L,x_{L'})\,d\mu_{L'}(x_{L'})$. 现在, 设 $(L_n)$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的子集的递增序列, 并令 $g=\sup_n f_{L_n}$, $h=\sup_n f_{L'_n}$. 对每个 $c>0$, 设 $A_c$ 是使 $g(x)>c$ 的点 $x\in X$ 的集, $B_c$ 是使 $h(x)>c$ 的点 $x\in X$ 的集, 试证 $c\mu(A_c)\leqslant\int f d\mu$, $c\mu(B_c)\leqslant\int f d\mu$. (注意 $A_c$ 是满足下述条件的 $x\in X$ 的集: 至少有一个 $f_{L_n}(x)>c$. 把 $A_c$ 表示为两两没有公共点的集 $G_n$ 的可数并, 这些 $G_n$ 满足

$$c\cdot\mu(G_n)\leqslant\int_{G_n}f d\mu.\ )$$

d) 假定 $(L_n)$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的有限子集的递增序列, 且这些 $L_n$ 的并等于 $\boldsymbol{N}$. 试证在 $X$ 上 $f_{L_n}$ 几乎处处收敛于 $f$ 而 $f_{L'_n}$ 几乎处处收敛于常数 $\int f d\mu$. (对每个 $\varepsilon>0$, 考虑只依赖于有限个变量的连续函数 $g$, 使 $g$ 满足 $\int|f-g|d\mu\leqslant\varepsilon$, 并把 c) 应用到函数 $|f-g|$ 上.)

10) 设 $D$ 是离散空间 $\{0,1\}$, $X$ 是积空间 $D^N$; 在 $X$ 的每个因子空间 $X_n(n\in N)$ 上考虑测度 $\mu_n$, 使它满足 $\mu_n(0)=\mu_n(1)=\frac{1}{2}$, 以 $\mu$ 表示 $X$ 上的乘积测度 $\bigotimes_{n\in N}\mu_n$ (问题 9).

a) 对 $X$ 中每个 $x=(x_n)_{n\geqslant 0}$ ($x_n=0$ 或 1), 令 $\pi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n 2^{-n-1}$, 试证 $\pi$ 是 $X$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $I=[0,1]$ 上的连续映射, 且测度 $\mu$ 的象 $\pi(\mu)$ 是 $I$ 上的 Lebesgue 测度 $\lambda$; 对每个 $t\in I$, 只要 $t$ 不是 $k\cdot 2^{-n}$ (其中整数 $k$ 满足 $0<k<2^n$) 的形式, $\pi^{-1}(t)$ 就是单点集从而映射 $f\mapsto f\circ\pi$ 通过商给出 $L^p_{\mathbf{C}}(I,\lambda)$ 到 $L^p_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 上的等距同构, 这里 $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

b) 对每个 $t\in I$ 与每个 $n\geqslant 1$, 若 $t$ 不是 $k\cdot 2^{-n}$ (其中整数 $k$ 满足 $0\leqslant k\leqslant 2^n$) 的形式, 令 $r_n(t)=1-2\mathrm{pr}_{n-1}(\pi^{-1}(t))$, 否则令 $r_n(t)=0$. $r_n$ 称为第 $n$ 个 **Rademacher 函数**, 这些函数形成 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(I,\lambda)$ 中的一个非完全正规正交函数系 (证明它们正交于 $\cos 2k\pi t$, 其中 $k$ 是非负整数). 试证 $r_n(t)=\mathrm{sgn}(\sin 2^n\pi t)$.

c) 对 $X$ 中每个 $x=(x_n)_{n\geqslant 0}$, 令 $u(x)=(x_{n+1})_{n\geqslant 0}$, 试证测度 $\mu$ 在 $u$ 下是不变的且 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的 (利用 a) 与 13.12 问题 5 c)). 由此推断关于

Lebesgue 测度几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(r_1(t)+\cdots+r_n(t))=0$$

(**Borel-Cantelli 定理**). (注意当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$ 时,有 $r_n(1-t)=-r_n(t)$.)

d) 试证,对于大于或等于 1 的整数的严格递增有限序列 $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$, 有

$$\int_0^1 r_{n_1}(t)r_{n_2}(t)\cdots r_{n_h}(t)\,dt=0.$$

e) 试证,对每个复数有限序列 $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 与每个正实数 $p$, 有(Хинчин 不等式)

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}a_k r_k(t)\right|^p dt\leqslant\left(\frac{p}{2}+1\right)^{p/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{p/2}.$$

(首先利用 d) 讨论 $p=2h$ 的情形,其中 $h$ 是不小于 1 的整数. 当 $2h-2<p\leqslant 2h$ 时,利用 13.11 问题 12 e).)

f) 采用 e) 中的记号,试证

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\leqslant 27\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}a_k r_k(t)\right|dt$$

(对 $p=4$ 利用 e) 并利用 $p=3/2$, $q=3$ 时的 Hölder 不等式).

11) a) 我们作与 13.17 问题 2 相同的假定, 此外还假定函数 $f_n$ 都是有限实值的. 设 $x\to j(x)$ 是 $X$ 到集 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $\mu$ 可测映射, 又设 $k\to w(k)$ 是定义在 $I$ 上的正值递增函数. 此时 $X\times X$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $(s,u)\to K_{j(s)}(s,u)/w(j(s))$ 关于测度 $\mu\otimes\mu$ 是可测的. 试证, 对 $X$ 的每个 $\mu$ 可测子集 $A$, 有

$$\int_X d\mu(u)\left(\int_A\frac{K_{j(s)}(s,u)}{w(j(s))}d\mu(s)\right)^2\leqslant\int_{A\times A}\frac{|K_{h(s,t)}(s,t)|}{w^2(h(s,t))}d\mu(s)d\mu(t),$$

其中

$$h(s,t)=\inf(j(s),j(t)).$$

(把左边出现的积分的平方写成二重积分,以便归结为计算 $A\times A\times X$ 上的一个三重积分的值,并利用 $(f_n)$ 是正交系这一事实.)试证

$$\int_{A\times A}\frac{|K_{h(s,t)}(s,t)|}{w^2(h(s,t))}d\mu(s)d\mu(t)\leqslant 2\int_A d\mu(t)\int_A\frac{|K_{j(t)}(s,t)|}{w^2(j(s))}d\mu(s).$$

(把 $A\times A$ 分解为两个可测集, 这两个集分别由 $j(s)<j(t)$ 与 $j(s)\geqslant j(t)$ ($(s,t)\in A\times A$) 所定义,并应用 $K_n(s,t)=K_n(t,s)$.)

b) 假定存在递增的正数列 $n\to w(n)$ 与 $X$ 的满足下述条件的 $\mu$ 可测子集 $A$: 对 $s\in A$ 与一切正整数 $n$, 有 $|H_n(s)|\leqslant cw(n)$ ($c$ 是正常数). 试证

对每个函数 $g\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$，序列 $((s_n(g)(t))/w(n))$ 对几乎所有 $t\in A$ 是上有界的.（考虑由 $\mu$ 可积函数

$$v_n(t)=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}(s_k(g)(t))/w(k)$$

组成的递增序列,并证明由积分 $J_n=\int_A v_n(t)d\mu(t)$ 组成的序列上有界. 为此注意 $v_n(t)$ 可写为 $v_n(t)=(s_{j(t)}(g)(t))/w(j(t))$，这里 $j$ 是 $X$ 到 $I$ 的适当的 $\mu$ 可测映射,并借助 Cauchy-Schwarz 不等式与 a) 估计 $J_n^2$ 的上界.）

c) 在 b) 的假定下,并设 $\lim_{n\to\infty}w(n)=+\infty$，试证，若 $a_n$ 都是实数且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2w^2(n)$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n(t)$ 在 $A$ 内几乎处处收敛.（首先利用 13.11问题 8 b),然后估计 $|s_n(t)-s_{n_k}(t)|$ $(n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1})$ 的上界. 为此确定一个递增的正数列 $(c_n)$，使得 $\lim_{n\to\infty}c_n=+\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\,w^2(n)c_n^2<+\infty$ (5.3 问题 6),从而 $b_n=a_nw(n)c_n$ 具有 $(g|f_n)$ 的形式，其中 $g\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(X,\mu)$，再利用这样的事实：根据 b)，对几乎所有 $t\in A$，部分和 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_kf_k(t)\right|$ 有界，并利用 Abel 部分和公式.）

d) 由 c)推断,若 $|H_n(s)|\leqslant c$ 对一切 $s\in A$ 与一切 $n$ 成立,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n(t)$ 在 $A$ 内几乎处处收敛(再次应用 5.3 问题 6).

12) a) 设 $(c_n)$ 是满足 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2<+\infty$ 的实数列,试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nr_n(t)$（所用记号见问题 10）在 $I$ 上关于 Lebesgue 测度 $\lambda$ 是几乎处处收敛的.（把 Rademacher 函数表示为属于 Haar 正规正交系(8.7 问题 7)的函数的线性组合;注意问题 11 d)能用到 Haar 正规正交系上(参阅13.17 问题 2)).

b) 试证,对每个实数列 $(a_n)$，每个 $\varepsilon>0$ 与可测集 $A\subset I$，存在整数 $n_0$,使对 $n_0\leqslant n<m$，有

$$\left|\sum_{n\leqslant i<j<m}a_ia_j\int_A r_i(t)r_j(t)dt\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=n}^{m}a_k^2.$$

(利用 Cauchy-Schwarz 不等式与函数 $r_i(t)r_j(t)$（对于 $i<j$）形成正规正交系(问题 10 d)),并应用对于上述函数系与函数 $\varphi_A$ 的 Bessel 不等式.）

c) 设 $(a_{mn})$ 是非负实数组成的二重序列,满足：对每个 $m$，只有有限个

正整数 $n$，使得 $a_{mn}\neq 0$；而对每个 $n$，有 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=1$. 另一方面，设 $(c_n)$ 是复数序列，满足：若令 $S_m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}c_n r_n(t)$，则序列 $(S_m(t))$ 在某个测度大于零的可积集 $A\subset I$ 上收敛. 在这些条件下，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<+\infty$. （根据 Егоров 定理，存在整数 $n_0$ 与正测度集 $B\subset A$，使当 $m\geqslant n_0$ 与 $n_0\leqslant p<q$ 时，对一切 $t\in B$，有 $\left|\sum\limits_{k=p}^{q} a_{mk}c_k r_k(t)\right|\leqslant 1$，由此可得

$$\int_B\left|\sum_{k=p}^{q} a_{mk}c_k r_k(t)\right|^2 dt\leqslant\lambda(B).$$

借助 b）估计这个积分的下界.）（**Rademacher-Колмогоров 定理.**）

13）设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(u_n)_{n\geqslant 0}$ 是复值 $\mu$ 可积函数序列，使当 $H$ 取遍 $\boldsymbol{N}$ 的有限子集时，数 $\int\left|\sum\limits_{n\in H} u_n(x)\right|d\mu(x)$ 所成的集有界. 在这些条件下，试证级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n(x)|^2$ 在 $X$ 上几乎处处收敛.（注意，对一切 $t\in I=[0,1]$，数

$$\int\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)r_k(t)\right|d\mu(x)$$

所成的集以某个不依赖于 $n$ 与 $t$ 的数为其上界；然后利用问题 10 $f$）与 Lebesgue-Fubini 定理.）

14）设 $X$ 是紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$(f_n)$ 是 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 中的正规正交序列，并且它在 $X$ 上是一致有界的.

a）设 $(b_n)$ 是满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2=+\infty$ 的实数列，试证不可能对 $X$ 上的一切连续函数 $g$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n(g|f_n)|<+\infty$.（注意在相反的情形下，把 Banach-Steinhaus 定理应用于 $\mathscr{C}(X)$ 上的线性形式 $g\to\sum\limits_{n\in H} b_n(g|f_n)$ 可知函数 $u_n(x)=b_nf_n(x)$ 所成的序列满足问题 13 的假定，因而在 $X$ 上就会几乎处处有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2|f_n(x)|^2<+\infty$. 利用 Егоров 定理，函数族 $(f_n)$ 一致有界与等式

$\int |f_n(x)|^2 d\mu(x) = 1$，推出与假设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = +\infty$ 相矛盾的结果.)

b) 设 $q$ 是满足 $1 < q < 2$ 的数，试证不可能对一切连续函数 $g$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} |(g|f_n)|^q < +\infty$.（令 $p = q/(q-1)$，证明在相反的情形下，就会存在正实数列 $(b_n)$，使得

$$\sum_n b_n^2 = +\infty, \qquad \sum_n b_n^p < +\infty,$$

且对一切连续函数 $g$ 有

$$\sum_n |b_n(g|f_n)| < +\infty.\ )$$

c) 由 b) 推断，存在连续函数 $g$，使对满足 $1 < q < 2$ 的一切数 $q$，有 $\sum_n |(g|f_n)|^q = +\infty$（利用奇性凝聚原理(12.16问题14)).

15) 在空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上，设 $\lambda$ 是 Lebesgue 测度，$\|x\|$ 是一个范数，使得单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 具有等于 1 的测度，且设 $(x_k)_{k\geqslant 1}$ 是由两两相异的点组成的无穷序列，而这些点都取自 $\lambda(B) = 1$ 的有界可积集 $B$. 对每个整数 $m$，以 $d_m$ 表示数 $\|x_i - x_j\|$ $(1 \leqslant i < j \leqslant m)$ 中最小的数. 试证 $\liminf_{m\to\infty} m d_m^n \leqslant c_n^{-1}$，其中

$$c_n = 1 + n\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t}\,dt$$

（参阅 12.7 问题 6).（用反证法，假定对某个 $\varepsilon > 0$，存在 $m_0$，使当 $m \geqslant m_0$ 时有 $m d_m^n > h_n^n$，其中 $h_n^n = c_n^{-1} + \varepsilon$. 对于 $1 \leqslant i < m$，设 $B_i$ 是以 $x_i$ 为心，以 $\frac{1}{2}h_n m^{-1/n}$ 为半径的球，而对于 $m \leqslant i \leqslant 2^n m$，设 $B_i$ 是以 $x_i$ 为心，以 $\frac{1}{2}h_n(2i^{-1/n} - m^{-1/n})$ 为半径的球. 证明这 $2^n m$ 个球 $B_i$ 两两没有公共点，并利用 Euler-Maclaurin 求和公式计算这些球的并的测度.)

16) 设 $X, Y$ 是两个局部紧空间，$A$ 是 $X \times Y$ 的一个普遍可测子集.

a) 试证，对每个 $x \in X$，截面 $A(x)$ 是 $Y$ 的普遍可测子集. 再者，对 $Y$ 上的每个测度 $\mu \geqslant 0$，函数 $x \to \mu^*(A(x))$ 在 $X$ 上是普遍可测的（利用 Lebesgue-Fubini 定理).

b) 设 $Y$ 是紧空间而 $A$ 是 $X \times Y$ 内的闭集，则函数 $x \to \mu^*(A(x))$ 是上半连续的.

c) 设 $\mu$ 是 $Y$ 上的正测度，满足：对几乎所有(关于 $\mu$) $y \in Y$，$A$ 的截面 $A^{-1}(y)$ 是可数的。试证使得 $\mu^*(A(x)) > 0$ 的 $x \in X$ 的集 $N$ 不可能包含不

可数的紧集.（利用 3.9 问题 4 证明，可以归结为这个紧集不含有孤立点的情形,并利用 13.18 问题 6b)与 4.2 问题 3 b）以证明这样的集是一个非零扩散测度的支集.）

17）设 $\mu$ 是 $X$ 上的有界正测度,其总质量等于1. 若 $f \in \mathscr{L}^1_C$ 满足：对一切复数 $\zeta$，都有 $\int \log|1+\zeta f|d\mu \leqslant 0$，则 $f$ 是 $\mu$ 可忽略的.（利用对一切复数 $\zeta$ 都成立的公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-\zeta e^{it}|dt = \log^+|\zeta|,$$

并利用 Lebesgue-Fubini 定理估计积分

$$\int \log^+|Rf|d\mu,$$

这里 $R>0$，由此推出这个积分必定等于零.）

18）设 $I$ 是离散空间 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$，$X$ 是积紧空间 $I^{\mathbf{Z}}$，$\mu$ 是 $I$ 上总质量等于 1 的正测度（因而它由质量 $p_j=\mu(\{j\})$ 的有限序列定义，其中 $p_j \geqslant 0$，$\sum\limits_{j=0}^{n-1} p_j = 1$）. 在 $X$ 的每个因子空间 $Z_n(n\in \mathbf{Z})$上考虑等于 $\mu$ 的测度 $\mu_n$，并以 $\nu$ 记 $X$ 上的乘积测度 $\bigotimes\limits_{n\in\mathbf{Z}} \mu_n$（问题9).

a）对 $X$ 中每个 $x(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$，令 $u(x)=(x_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}$. 试证 $u$ 是 $X$ 到自身的同胚且测度 $\nu$ 在 $u$ 下不变. 三元组$(X, \nu, u)$称为 **Bernoulli 概型** $B(p_0, \cdots, p_{n-1})$.

b）特别考虑 Bernoulli 概型 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;对每个 $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in X$，其中 $x_n=0$ 或 $x_n=1$，以 $f(x)$ 表示点 $(y,z)\in \mathbf{R}^2$ 在 $\mathbf{T}^2$ 内的典则象,这里

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} x_{-n}2^{-n-1}, \quad z=\sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}.$$

在 $\mathbf{T}^2$ 上考虑规范化 Haar 测度(14.3). 试证 $f$ 是连续映射且有 $f(\nu)=\beta$; 此外,使得 $f^{-1}(t)$ 不是单点集的点 $t\in \mathbf{T}^2$ 组成的集是 $\beta$ 可忽略的.

设 $\varphi$ 是典则映射 $\pi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ 在集 $K$ 上的限制,这里 $K$ 是满足 $0\leqslant x<1$，$0\leqslant y<1$ 的 $(x,y)$ 的集；这个映射是 $K$ 到 $\mathbf{T}^2$ 上的连续双射. 对于 $t\in T^2$ 与 $(x,y)\in\varphi^{-1}(t)$，令

$$v(t)=\pi(2x, \frac{1}{2}y), \quad 若\ 0\leqslant x<\frac{1}{2};$$

$$v(t)=\pi\left(2x, \frac{1}{2}(y+1)\right), 若 \frac{1}{2}\leqslant x<1$$

(**“面包师变换”**). 试证 $v$ 是 $T^{*}$ 到自身上的几乎处处连续映射，且满足

$$v\circ f = f\circ u$$

(其中 $u$ 是 a) 中所定义的映射).

将来我们会看到，$u$ 与 $v$ (分别关于 $\nu$ 与 $\beta$) 是遍历的(15.11 问题 16).

c) 试证，对于 Bernoulli 概型 $B(p_0,\cdots,p_{k-1})$，熵 $h(u)$ (13.9问题 28)由

$$h(u) = -(p_0 \log p_0 + \cdots + p_{k-1}\log p_{k-1})$$

所给出(从划分 $\alpha = (A_j)_{0\leqslant j\leqslant k-1}$ 出发利用 Колмогоров-Sinai 定理，其中 $A_j$ 是使得 $x_0 = j$ 的 $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 所成的集. 利用问题 9 a) 与 $u$ 的定义；注意集

$$A_{j_0}\cap u^{-1}(A_{j_1})\cap\cdots\cap u^{-(n-1)}(A_{j_{n-1}})$$

是使得 $x_0 = j_0$, $x_1 = j_1,\cdots$, $x_{n-1} = j_{n-1}$ 的 $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 所成的集；归结为计算和

$$\sum_{m_0+m_1+\cdots+m_{k-1}=n}\frac{n!}{m_0!m_1!\cdots m_{k-1}!}p_0^{m_0}p_1^{m_1}\cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}$$

$$(m_0\log p_0 + \cdots + m_{k-1}\log p_{k-1}).$$

注意

$$\sum_{m_0+m_1+\cdots+m_{k-1}=n}\frac{n!}{m_0!m_1!\cdots m_{k-1}!}m_0 p_0^{m_0-1}p_1^{m_1}\cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}$$

$$= \frac{d}{dp_0}(p_0 + p_1 + \cdots + p_{k-1})^n.\ )$$

由上述计算推断 Bernoulli 概型 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 与 $B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 的双射 $u$ 不是共轭的(13.12 问题 11).

19) 设 $X$ 是局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$f, g$ 是 $X$ 上的两个非负 $\mu$ 可测函数. 对每个 $\alpha>0$，设 $A_\alpha$ 是使得 $f(x)>\alpha$ 的 $x\in X$ 的集. 假定：1°对一切 $\alpha>0$ 有 $\mu(A_\alpha)<+\infty$；2° $g$ 属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{p}(X,\mu)$，这里 $p$ 是满足 $1<p<+\infty$ 的某个数；3° 对每个 $\alpha>0$ 有

$$\mu(A_\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_{A_\alpha}g\,d\mu.$$

在这些条件下，试证 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{p}(X,\mu)$ 且

$$N_p(f)\leqslant\frac{p}{p-1}N_p(g)$$

(**Wiener 不等式**). (首先讨论 $f$ 为有界且具有紧支集的情形；从 0 到 $+\infty$ 积分不等式

$$t^{p-1}\int\varphi_{A_t}d\mu\leqslant t^{p-2}\int g\varphi_{A_t}d\mu$$

(参阅问题 1)．为讨论一般情形，考虑函数 $\sup(n, f\varphi_{K_n})$，其中 $(K_n)$ 是递增紧集序列，其并等于 $X$．)

20) 设 $U$ 是空间 $L^1_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ 的连续自同态，满足 13.11 问题 17 的假定，从而 $U$ 可延拓为每个 $L^p_{\mathbf{R}}(X,\mu)$ $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 的自同态(见上文)．对每个函数 $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$，令

$$R_n(f)=\frac{1}{n}(f+U\cdot f+\cdots+U^{n-1}\cdot f),$$

$$R^*_n(f)=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|R_k(f)|,$$

$$R^*(f)=\sup_n R^*_n(f).$$

a) 试证，若 $1<p<+\infty$ 且 $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$，则 $R^*(f)$ 属于 $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$ 且

$$N_p(R^*(f))\leqslant\frac{p}{p-1}N_p(f).$$

(利用上面的问题 19 与 13.11 问题 17 c)．)

b) 对每个函数 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}$，设 $P\cdot\tilde{f}$ 是序列 $((R_n(f))^\sim)$ (12.15 问题 12 c)) 在 $L^2_{\mathbf{R}}$ 中的极限，则 $UP=PU=P$．试证序列 $(R_n(f))$ 几乎处处收敛于 $P\cdot f$ (**Dunford-Schwarz 遍历定理**)．(令

$$S(f)=\lim_{n\to\infty}\sup R_n(f),\quad I(f)=\lim_{n\to\infty}\inf R_n(f),$$

注意 $I(f)\leqslant S(f)\leqslant R^*(f)$，且对一切正整数 $m$，有

$$S(R_m(f)-P\cdot f)=S(f)-P\cdot f,\ I(R_m(f)-P\cdot f)=I(f)-P\cdot f,$$

并利用 a)，把其中的 $f$ 换为 $R_m(f)-P\cdot f$．)

c) 试证，对于 $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}\cap\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{R}}$，有 $N_1(P\cdot f)\leqslant N_1(f)$，因而 $P$ 可延拓为空间 $L^1_{\mathbf{R}}$ 上的一个收缩．由此推断，对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$，序列 $(R_n(f))$ 也几乎处处收敛于 $f$．(令

$$L(f)=\lim_{n\to\infty}\sup|R_n(f)-P\cdot f|,$$

注意对一切函数 $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}\cap\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{R}}$，有 $L(f)\leqslant R^*(f-g)+P\cdot|f-g|$，并利用 13.11 问题 17 d)．)

21) 使用 13.17 问题 7 中的记号，对每个 $\alpha>0$ 与每个函数 $g\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbf{C}}(Y,\nu)$，以 $A_\alpha(g)$ 表示使得 $|g(y)|>\alpha$ 的 $y\in Y$ 的集．设 $p$ 是满足 $1\leqslant p<+\infty$ 的一个数，我们称 $U$ 属于弱 $(p,p)$ 型，如果存在常数 $C>0$，使对每个 $\mu$ 可积阶梯函数 $f$，

$$\nu(A_\alpha(U\cdot f))\leqslant\frac{C}{\alpha^p}\int|f|^p d\mu$$

对一切 $\alpha>0$ 成立. 设 $p, q$ 是满足 $1\leqslant p<q<+\infty$ 的两个数，试证，若 $U$ 为弱 $(p,p)$ 型，且也为弱 $(q,q)$ 型，则对每个满足 $p<r<q$ 的 $r$，$U$ 为弱 $(r,r)$ 型（13.17 问题 7）(**Marcinkiewicz 插值定理.** 对 $f\in\mathscr{L}_R^1(X,\mu)$ 与每个 $\alpha>0$，设 $f'_\alpha$ 是这样的函数：当 $|f(x)|>\alpha$ 时 $f'_\alpha(x)$ 等于 $f(x)$，否则 $f'_\alpha(x)$ 等于 0；令 $f''_\alpha=f-f'_\alpha$. 试证对一切 $t>0$，有

$$t^{r-1}\mu(A_{2t}(U\cdot f))\leqslant C't^{r-p-1}\int|f'_t|^p d\mu+C''t^{r-q-1}\int|f''_t|^q d\mu.$$

从 0 到 $+\infty$ 积分上式并利用问题 1.)

# 第十四章　局部紧群上的积分

在现代分析中，局部紧群上的 Haar 测度与卷积已经成为基本工具,就象在经典分析中，它们在实直线与有限维 Euclid 空间上一直是基本工具一样．这两个概念，连同广义函数的卷积概念(在第十七章中将引进这个概念,它是测度卷积的推广),是调和分析(第二十二章)与紧群的线性表示理论(第二十一章)的基本概念．

我们还是按照 Bourbaki 的叙述方式[22]，只是没有那么详细．实际上,除了 Lie 群(第十六、十九与二十一章)以外，本书中今后几乎不考虑其他局部紧群,因此就可以完全限于 Lie 群的情形;对于 Lie 群而言，关于 Haar 测度的存在性，有一个比起其他情形来要简单得多的证明．然而，揭示局部紧群上的积分理论完全不依赖于微分结构这个事实,看来是有意义的;自从 $p$-adic 群与阿代尔群在数论中取得众所周知的地位[36]以后，完全不连续局部紧群已不再成为新奇了．

在整个这一章中,为简单起见，我们把"可分可度量化局部紧群"称为"局部紧群"．

## 1. Haar 测度的存在性与唯一性

设 $G$ 是局部紧(可度量化与可分的)群．对 $G$ 到集 $E$ 的每个映射 $f$ 与每个 $s\in G$，我们以 $\gamma(s)f$ 与 $\delta(s)f$ 表示 $G$ 到 $E$ 的由下式所定义的映射：

**(14.1.1)**　$(\gamma(s)f)(x)=f(s^{-1}x),(\delta(s)f)(x)=f(xs)$

($f$ 由 $s$ 所作的**左平移**与**右平移**)．

由上述定义立即得到,对 $G$ 内任何 $s$，$t$，有

**(14.1.1.1)**　$\gamma(st)f=\gamma(s)(\gamma(t)f),\delta(st)f=\delta(s)(\delta(t)f)$．

给定$G$上的(复)测度$\mu$，分别以$\gamma(s)\mu$与$\delta(s)\mu$表示$\mu$在同胚$x\to sx$与$x\to xs^{-1}$下的象，这是$G$上的两个测度(13.1.6)。于是对一切函数$f\in\mathscr{K}_{C}(G)$，有

**(14.1.2)** $\langle f,\gamma(s)\mu\rangle=\langle\gamma(s^{-1})f,\mu\rangle,\langle f,\delta(s)\mu\rangle=\langle\delta(s^{-1})f,\mu\rangle.$

由这个定义得知，对$G$内任何$s$，$t$，有

**(14.1.2.1)** $\gamma(st)\mu=\gamma(s)(\gamma(t)\mu)$，$\delta(st)\mu=\delta(s)(\delta(t)\mu)$.

$\mu$称为**左不变测度**(相应地，**右不变测度**)，如果对一切$s\in G$，有$\gamma(s)\mu=\mu$(相应地，$\delta(s)\mu=\mu$)。

如果$G$上的非零测度$\mu$是左不变的，则$\mathrm{Supp}(\mu)=G$。这是因为，根据(13.19.4)，对一切$s\in G$，有$\mathrm{Supp}(\gamma(s)\mu)=s\cdot\mathrm{Supp}(\mu)$，并且$\mathrm{Supp}(\mu)\neq\varnothing$。对右不变测度也有同样的结论。

设$\mu$是$G$上的左不变测度，$f$是$G$到$\bar{\boldsymbol{R}}$或$\boldsymbol{C}$的$\mu$可积映射，则对每个$s\in G$，函数$x\to f(s^{-1}x)$也是$\mu$可积的，且有

**(14.1.2.2)** $$\int f(s^{-1}x)d\mu(x)=\int f(x)d\mu(x)$$

(13.7.10)；特别，对任何$\mu$可积集$A$，$sA$是$\mu$可积的，且有

**(14.1.2.3)** $$\mu(sA)=\mu(A).$$

对$G$到集$E$的映射$f$，我们令

**(14.1.3)** $$\check{f}(x)=f(x^{-1})\quad(\text{对一切}\ x\in G).$$

对$G$上的每个测度$\mu$，以$\check{\mu}$表示$\mu$在$G$到自身的同胚$x\to x^{-1}$下的象；于是对一切函数$f\in\mathscr{K}_{C}(G)$，有

**(14.1.4)** $$\langle f,\check{\mu}\rangle=\langle\check{f},\mu\rangle.$$

由定义立即得到$(\gamma(s)f)^{\vee}=\delta(s)\check{f}$，两边都等于函数$x\to f(s^{-1}x^{-1})$。因而对$G$上的每个测度$\mu$，有$(\gamma(s)\mu)^{\vee}=\delta(s)\check{\mu}$；由此得知，若$\mu$是$G$上的左不变测度，则$\check{\mu}$是$G$上的右不变测度，反之亦然.

**(14.1.5)** 在局部紧群$G$上，存在左不变的非零正测度$\mu$，且其他左不变测度都具有$a\mu(a\in C)$的形式.

1) 存在性. 我们以$\mathscr{K}_{+}^{*}$表示属于$\mathscr{K}_{R}(G)$的异于0的非负函数$g$的集. 对每个函数$f\in\mathscr{K}_{R}(G)$与$g\in\mathscr{K}_{+}^{*}$，存在正数$c_1,\cdots,c_r$与$G$的点$s_1,\cdots,s_r$，使得

(14.1.5.1) $$f \leqslant \sum_{i=1}^{r} c_i \gamma(s_i) g$$

(换言之，对一切 $x \in G$，有 $f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{r} c_i g(s_i^{-1}x)$)．事实上，存在 $G$ 的非空开子集 $U$，使得 $a = \inf_{x \in U} g(x) > 0$．由于 $\mathrm{Supp}(f)$ 是紧的，故存在有限个点 $s_i \in G(1 \leqslant i \leqslant r)$，使得 $s_i U$ 覆盖 $\mathrm{Supp}(f)$，若对每个 $i$ 取 $c_i = \|f\|/a$，则 (14.1.5.1) 得以满足．以 $(f:g)$ 表示数 $\sum_{i=1}^{r} c_i$ 关于所有满足 (14.1.5.1) 的系 $(c_1, \cdots, c_r, s_1, \cdots, s_r)$ 的下确界．我们先证明下列性质：

(i) 对 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(G)$，$g \in \mathscr{K}_+^*$，$s \in G$，有 $(\gamma(s)f:g) = (f:g)$；

(ii) 对 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(G)$，$g \in \mathscr{K}_+^*$，$a \geqslant 0$，有 $(af:g) = a(f:g)$；

(iii) 对 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(G)$ 中的 $f_1$，$f_2$ 与 $g \in \mathscr{K}_+^*$，有 $(f_1 + f_2:g) \leqslant (f_1:g) + (f_2:g)$；

(iv) 对 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(G)$，$g \in \mathscr{K}_+^*$，有 $(f:g) \geqslant \sup_{x \in G} f(x) / \sup_{x \in G} g(x)$；

(v) 对 $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(G)$ 与 $\mathscr{K}_+^*$ 中的 $g$，$h$，有 $(f:h) \leqslant (f:g) \times (g:h)$；

(vi) 对 $\mathscr{K}_+^*$ 中的 $f$，$f_0$，$g$，有 $0 < \dfrac{1}{(f_0:f)} \leqslant \dfrac{(f:g)}{(f_0:g)} \leqslant (f:f_0)$．

事实上，性质 (i)，(ii)，(iii) 由定义立即得到．若有(14.1.5.1)，则可推出 (3.17.10)，存在 $s \in G$，使得

$$\sup_{x \in G} f(x) = f(s) \leqslant \sum_{i=1}^{r} c_i g(s_i^{-1}s) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right) \sup_{x \in G} g(x),$$

由此即有 (iv)．为证明 (v)，我们注意，如果 $f \leqslant \sum_i a_i \gamma(s_i) g$，$g \leqslant \sum_j b_j \gamma(t_j) h$，则可推出 $f \leqslant \sum_{i,j} a_i b_j \gamma(s_i t_j) h$，根据定义，由此式即得

$$(f:h) \leqslant \sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right);$$

由于 $\sum_i a_i$ $\left(相应地，\sum_i b_i\right)$ 可以取得任意接近 $(f:g)$（相应地，$(g:h)$），因之就推出 (v)． 最后，把 (v) 分别应用于 $f_0, f, g$ 与 $f, f_0, g$，就得到 (vi)。

按照假定，在 $G$ 内存在幺元 $e$ 的可数基本邻域系 $(V_n)$；对每个 $n$，设 $g_n$ 是属于 $\mathscr{K}_+^*$ 的函数，满足 $\mathrm{Supp}(g_n) \subset V_n$(4.5.2)．又设 $f_0$ 是属于 $\mathscr{K}_+^*$ 的一个固定的函数，并对每个函数 $f \in \mathscr{K}_+^*$，令

**(14.1.5.2)** $$I_n(f) = (f:g_n)/(f_0:g_n),$$

且令 $I_n(0) = 0$． 由性质 (ii) 与 (iii) 得知，映射 $f \to I_n(|f|)$ 是 $\mathscr{K}_R(G)$ 上的半范数，而由 (i) 立即得到，对一切 $s \in G$，有 $I_n(\gamma(s)f) = I_n(f)$．

另一方面，存在 $G$ 的覆盖 $(U_p)$，它由相对紧开集组成，并满足 $\bar{U}_p \subset U_{p+1}$ (3.18.3)． 空间 $\mathscr{C}(\bar{U}_p)$ 是可分的 (7.4.4)，因此空间 $\mathscr{K}(G;\bar{U}_p) \cap \mathscr{K}_+^*$ 也是可分的 (3.10.9)，从而存在函数序列 $(f_{mp})_{m\geqslant 1}$，它在空间 $\mathscr{K}(G;\bar{U}_p) \cap \mathscr{K}_+^*$ 内处处稠密． 根据性质 (vi)，$I_n(f_{mp})(n \geqslant 1)$ 所成的序列包含在以 $1/(f_0:f_{mp})$ 与 $(f_{mp}:f_0)$ 为端点的紧区间内，因而由 (12.5.9)，必要时选取 $(g_n)$ 的适当的子序列，我们可以假定，对任何 $m, p$，序列 $(I_n(f_{mp}))_{n\geqslant 1}$ 趋于一个大于 0 的极限．此外，如果属于 $\mathscr{K}_+^*$ 的两个函数 $f, f'$ 满足 $f \leqslant f'$，则显然对于一切 $n$，有 $I_n(f) \leqslant I_n(f'_n)$．设 $h_p$ 是 $G$ 到 $[0,1]$ 的具有紧支集的连续映射，它在 $\bar{U}_p$ 上等于 1((3.18.2) 与 4.5.2))，于是对每个函数 $f \in \mathscr{K}(G;\bar{U}_p) \cap \mathscr{K}_+^*$，对任何 $n$，有 $I_n(f) \leqslant \|f\| I_n(h_p)$；由此对 $\mathscr{K}(G;\bar{U}_p) \cap \mathscr{K}_+^*$ 中任何 $f, f'$，对任意的 $n$，有 $|I_n(f) - I_n(f')| \leqslant I_n(|f-f'|) \leqslant I_n(h_p)\|f-f'\|$，这是因为 $f \to I_n(|f|)$ 是半范数．也就是说，$I_n$ 在每个子空间 $\mathscr{K}(G;\bar{U}_p) \cap \mathscr{K}_+^*$ 上的限制所成的集是等度连续的．这就推出 (7.5.5)，对每个 $f \in \mathscr{K}_+^*$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f) = I(f)$ 存在，并且它的值不等于零。

现在我们来证明，对 $\mathscr{K}_+^*$ 中任何 $f, f'$，有

**(14.1.5.3)** $$I(f+f') = I(f) + I(f').$$

由 (iii) 得知，只须证明 $I(f) + I(f') \leqslant I(f+f')$．给定 $\varepsilon > 0$，并

设 $h$ 是属于 $\mathscr{K}_R(G)$ 的非负函数，使在 $f$ 与 $f'$ 的（紧）支集的并上，有 $h(x)\geqslant 1$（(3.18.2) 与 (4.5.2)），于是只须证明，在 $G$ 内存在 $e$ 的紧邻域 $V$，使对每个满足 $\operatorname{Supp}(g)\subset V$ 的函数 $g\in\mathscr{K}_+^*$，有

**(14.1.5.4)** $\qquad (f:g)+(f':g)\leqslant((f+f'):g)+\varepsilon(h:g).$

为证明这一点，令 $u=f+f'+\frac{1}{2}\varepsilon h$，并设 $v$（相应地，$v'$）是这样的函数，它在 $\operatorname{Supp}(f+f')$ 上与 $f/u$（相应地，$f'/u$）相同，而在 $\operatorname{Supp}(f+f')$ 的余集上等于零．由于在 $\operatorname{Supp}(f+f')$ 的每个边界点 $x$ 处都有 $f(x)+f'(x)=0$，因而有 $f(x)=f'(x)=0$，所以 $v$ 与 $v'$ 属于 $\mathscr{K}_R(G)$ 并且是非负的．于是函数 $v$ 与 $v'$ 关于定义 $G$ 的拓扑的左不变距离是一致连续的（(12.9.1) 与 (3.16.5)），因而对每个 $\eta>0$，存在 $e$ 的紧邻域 $V$，使对满足 $s^{-1}t\in V$ 的一切元偶 $(s,t)$，有 $|v(s)-v(t)|\leqslant\eta$ 与 $|v'(s)-v'(t)|\leqslant\eta$．现在设 $g\in\mathscr{K}_+^*$ 满足 $\operatorname{Supp}(g)\subset V$，则对每个 $s\in G$，有 $v\cdot\gamma(s)g\leqslant(v(s)+\eta)\cdot\gamma(s)g$．事实上，在 $\gamma(s)g$ 为零的点处，这个不等式显然成立，因而它在 $sV$ 之外成立；而对 $t\in sV$，有 $v(t)\leqslant v(s)+\eta$．同样地，也有 $v'\cdot\gamma(s)g\leqslant(v'(s)+\eta)\cdot\gamma(s)g$．这样，设 $c_i(1\leqslant i\leqslant n)$是非负数，$s_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 $G$ 的元，满足 $u\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i\gamma(s_i)g$，则有

$$f=vu\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_iv\cdot\gamma(s_i)g\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(v(s_i)+\eta)\cdot\gamma(s_i)g;$$

用 $f'$ 代替 $f$，就有一个类似的不等式．因为 $v+v'\leqslant 1$，故

$$(f:g)+(f':g)\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(v(s_i)+v'(s_i)+2\eta)\leqslant(1+2\eta)\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

利用 $u$ 的定义并利用 (ii)，(iii) 与 (v)，我们有

$$\begin{aligned}(f:g)+(f':g)&\leqslant(1+2\eta)(u:g)\leqslant(1+2\eta)(((f+f':g)\\&\quad+\frac{1}{2}\varepsilon(h:g))\leqslant((f+f'):g)+\frac{1}{2}\varepsilon(h:g)\\&\quad+2\eta((f+f'):h)(h:g)+\varepsilon\eta(h:g),\end{aligned}$$

于是为得到 (14.1.5.4)，只须取 $\eta$ 满足

$$\eta(2((f+f'):h)+\varepsilon)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon.$$

现在，令 $I(0)=0$ 且对每个函数 $f=f_1-f_2$（其中 $f_1\in\mathscr{K}_+^*$，$f_2\in\mathscr{K}_+^*$），令 $I(f)=I(f_1)-I(f_2)$，把 $I$ 延拓到整个 $\mathscr{K}_R(G)$ 上．由 (14.1.5.3) 即知，这个定义只依赖于 $f$，而不依赖于表达式 $f_1-f_2$ 的选取，并且关系式 (14.1.5.3) 对 $\mathscr{K}_R(G)$ 中任何 $f,f'$ 成立．另一方面，$I$ 的定义表明，对一切实数 $\lambda>0$ 与函数 $f\in\mathscr{K}_+^*$，有 $I(\lambda f)=\lambda I(f)$．鉴于上面的定义，这个关系式可直接推广到 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ 与 $f\in\mathscr{K}_R(G)$ 的情形．于是由 (13.3.1)，可以推出 $I$ 是 $G$ 上的非零正测度，并且由它的构造可知，对一切函数 $f\in\mathscr{K}_R(G)$，有 $I(\gamma(s)f)=I(f)$．这就是说，我们构造了 $G$ 上的一个非零左不变正测度．

2) 唯一性．设 $\mu$（相应地，$\nu$）是非零左（相应地，右）不变测度，则 $\check{\nu}$ 是左不变测度．我们来证明 $\mu$ 与 $\check{\nu}$ 成比例，从而就完成了 (14.1.5) 的证明．设 $f\in\mathscr{K}_C(G)$，$\mu(f)\neq 0$，考虑 $G$ 上的函数 $D_f$，它由

$$D_f(s)=\mu(f)^{-1}\int f(t^{-1}s)d\nu(t)$$

定义．我们证明 $D_f$ 在 $G$ 内连续，而这由下面更一般的引理得到：

**(14.1.5.5)** 设 $G$ 是局部紧群，$H$ 是 $G$ 的闭子群，$\alpha$ 是 $H$ 上的测度，$f$ 是 $G$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的连续映射，还假定，或者 $\mathrm{Supp}(f)$ 是紧的，或者 $\mathrm{Supp}(\alpha)$ 是紧的，则映射

$$s\to\int f(st)d\alpha(t)\text{ 与 }s\to\int f(ts)d\alpha(t)$$

在 $G$ 内连续．

例如对第一个积分来证明．设 $s_0\in G$，$V_0$ 是 $s_0$ 的一个紧邻域．问题在于，对每个 $\varepsilon>0$，要找到 $s_0$ 的邻域 $V\subset V_0$，使对 $s\in V$，有 $\left|\int(f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)\right|\leqslant\varepsilon$．如果 $K=\mathrm{Supp}(f)$ 为紧且令 $L=V_0^{-1}K$，则有

$$\int(f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)=\int_L(f(st)-f(s_0t))d\alpha(t);$$

由于 $f$ 关于 $G$ 上的右不变距离是一致连续的(3.16.5),故在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域 $W$,使得关系 $s\in Ws_0$ 蕴函 $|f(st)-f(s_0t)|\leqslant\varepsilon/|\alpha|(L)$ 对一切 $t\in G$ 成立,于是只须取 $V=V_0\cap Ws_0$ 即可。如果 $s=\mathrm{Supp}(\alpha)$ 是紧的,则

$$\int(f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)=\int_S(f(st)-f(s_0t))d\alpha(t),$$

且若 $t\in s$, $s\in V_0$, 则 $st\in V_0S$, 而 $V_0S$ 是紧的. 由于限制 $f|V_0S$ 是一致连续的,从而可取 $W$, 使得关系 $s\in W_{s_0}$ 蕴函 $|f(st)-f(s_0t)|\leqslant\varepsilon/|\alpha|(S)$ 对一切 $t\in S$ 成立;于是可象前面那样作出结论。

现在,设 $g$ 是属于 $\mathscr{K}_C(G)$ 的任一函数. 显然函数 $(s,t)\to f(s)g(ts)$ 在 $G\times G$ 内连续且具有紧支集. 由 (13.21.7) 与 $\mu$ 的左不变性,有

$$\begin{aligned}\mu(f)\nu(g)&=(\int f(s)d\mu(s))(\int g(t)d\nu(t))\\&=\int d\mu(s)\int f(s)g(ts)d\nu(t)\\&=\int d\nu(t)\int f(s)g(ts)d\mu(s)\\&=\int d\nu(t)\int f(t^{-1}s)g(s)d\mu(s)\\&=\mu(g\cdot\mu(f)D_f)=\mu(f)\mu(D_f\cdot g),\end{aligned}$$

因为按假定 $\mu(f)\neq0$,故

$$\nu(g)=\mu(D_f\cdot g).$$

这首先表明 $D_f$ 不依赖于 $f$,因为如果 $f'$ 是 $\mathscr{K}_C(G)$中的另一函数,满足 $\mu(f')\neq0$,则由上可得 $D_f\cdot\mu=D_{f'}\cdot\mu$,因而(13.15.3) $D_f$ 与 $D_{f'}$ 关于 $\mu$ 几乎处处相等. 然而由于 $\mu\neq0$ 是不变的,它的支集是整个的 $G$; 又如上所述, $D_f$ 与 $D_{f'}$ 在 $G$ 上连续; 因此使得 $D_f(s)\neq D_{f'}(s)$的 $s\in G$ 所成的集是开的且是可忽略的,于是必是空的,从而 $D_f=D_{f'}$. 这样,令 $D_f=D$,于是由函数 $D$ 的定义,对于使得 $\mu(f)\neq0$ 的每个函数 $f\in\mathscr{K}_C(G)$, 有

$$\mu(f)D(e)=\check{\nu}(f);$$

因而这个公式在 $\mathscr{K}_C(G)$ 的一超平面的余集上成立,于是它在整个 $\mathscr{K}_C(G)$ 上成立,因为这个公式的两边都是 $f$ 的线性形式. 由于 $\nu\neq0$, 所以 $D(e)\neq0$, 这就证明了 $\mu$ 与 $\check{\nu}$ 成比例, 于是

(14.1.5)得证.

$G$ 上任一非零左(相应地,右)不变正测度称为 $G$ 上的**左**(**相应地,右**)**Haar 测度**. 由(14.1.5)推出,$G$ 上的所有左(相应地,右)Haar 测度都是成比例的.

## 问　　题

1) 设 $G$ 是局部紧群,$A$ 是 $G$ 的处处稠密子集,$\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度,$H$ 是 $G$ 的 $\mu$ 可测子集,具有下述性质: 对每个 $s\in A$, $sH\cap(\complement H)$ 与 $H\cap(\complement sH)$ 是 $\mu$ 可忽略的. 试证 $H$ 或 $H$ 的余集是可忽略的(证明测度 $\varphi_H\cdot\mu$ 是左不变的).

2) 设 $G$ 是局部紧群,$\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度,$A$ 与 $B$ 是 $G$ 的两个子集.

a) 假定下面两个条件之一得到满足:

$\alpha$) $A$ 是 $\mu$ 可积的;

$\beta$) $\mu^*(A)<+\infty$ 并且 $B$ 是 $\mu$ 可测的.

试证,在情形 $\alpha$) 或在情形 $\beta$) 下,函数 $f(s)=\mu^*(sA\cap B)$ 在 $G$ 上关于 $G$ 的右不变距离是一致连续的. (对于 $G$ 的两个子集 $M$, $N$, 令

$$\rho(M, N)=\mu^*((M\cap\complement N)\cup(N\cap\complement M)).$$

先考虑 $A$ 为紧的情形. 证明对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $e$ 在 $G$ 内的邻域 $U$, 使对一切 $s\in G$ 与 $t\in U$, 有 $\rho(sA\cap B,\ stA\cap B)\leqslant\varepsilon$; 然后应用 13.9 问题 5. 若 $B$ 为 $\mu$ 可测且 $\mu^*(A)<+\infty$, 注意存在 $G$ 的 $\mu$ 可积子集的递减序列 $(A_n)$, 使得每个 $A_n$ 包含 $A$, 且使得 $\inf(\mu(A_n))=\mu^*(A)$, 并证明 $\mu^*(sA\cap B)=\inf(\mu^*(sA_n\cap B))$ (13.9 问题 2a)); 另一方面, 注意当 $n\to\infty$ 时, $\mu(A_n-A_{n+1})$ 趋于 0.(

b) 若 $A$ 是 $\mu$ 可积的且 $\mu^*(B)<+\infty$, 则函数 $f$ 关于 $G$ 上的左不变距离也是一致连续的;如果还假定 $A^{-1}$ 是 $\mu$ 可积的,则有 $\int_G f(s)ds=\mu(A^{-1})\mu^*(B)$. (归结到 $B$ 为 $\mu$ 可积的情形; 注意此时有 $\mu(sA\cap B)=\mu(A\cap s^{-1}B)$, 并且有 $\varphi_{sA\cap B}=\varphi_{sA}\varphi_B$ 与 $\varphi_{sA}(t)=\varphi_{tA^{-1}}(s)$.)

c) 由 a) 推断,在 a) 中所考虑的两种情形下, 若 $A$ 与 $B$ 都不是 $\mu$ 可忽略集,则 $AB$ 与 $BA$ 的内部非空.

d) 在群 $G=\mathbf{SL}_2(\boldsymbol{R})$ 内给出紧集 $A$ 与 $\mu$ 可测集 $B$ 的例子, 使得 $f(s)=\mu(sA\cap B)$ 关于 $G$ 上的左不变距离不是一致连续的. (注意在 $G$ 中存在趋于 $e$ 的序列 $(t_n)$, 还存在序列 $(s_n)$, 使得序列 $(s_n^{-1}t_ns_n)$ 趋于无穷远点.)

3）设 $G$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，$A$ 是 $G$ 的可积子集，满足 $\mu(A)>0$，试证使得 $\mu(A)=\mu(A\cap sA)$ 的 $s\in G$ 的集 $H(A)$ 是紧群.（借助于问题 2 可证 $H(A)$ 在 $G$ 内是闭的. 为证明 $H(A)$ 是紧的，考虑 $A$ 的紧子集 $B$，使它满足 $\mu(B)>\mu(A)/2$ 并证明 $H(A)\subset BB^{-1}$.）

4）设 $G$ 是交换局部紧群，采用加法运算，$\mu$ 是 $G$ 上的 Haar 测度，$A$ 与 $B$ 是 $G$ 的两个可积子集.

a）对每个 $s\in G$，设

$$A'=\sigma_s(A,B)=A\cup(B+s),\quad B'=\tau_s(A,B)=(A-s)\cap B,$$

试证 $\mu(A')+\mu(B')=\mu(A)+\mu(B)$，$A'+B'\subset A+B$（注意，对 $G$ 的任一子集 $A$，有 $A+\phi=\phi$）.

b）假定 0 属于 $A\cap B$. $G$ 的可积子集的元偶 $(A',B')$ 称为由 $(A,B)$ 所导出，如果存在 $G$ 中的序列 $(s_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 与 $G$ 的子集的两个序列 $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$，$(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$，使得 $A_0=A$，$B_0=B$；且对 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$A_k=\sigma_{s_k}(A_{k-1},B_{k-1}),\quad B_k=\tau_{s_k}(A_{k-1},B_{k-1}),$$

并有 $s_k\in A_{k-1}$，$A'=A_n$，$B'=B_n$. 试证，存在元偶 $(E_n,F_n)$ 的序列，使得 $E_0=A$，$F_0=B$，$(E_{n+1},F_{n+1})$ 由 $(E_n,F_n)$ 所导出，且对一切 $n$ 与一切 $s\in E_n$，有 $\mu((E_n-s)\cap F_n)\geqslant\mu(F_{n+1})-2^{-n}$. 令 $E_\infty=\bigcup\limits_n E_n$，$F_\infty=\bigcap\limits_n F_n$，试证对每个 $s\in E_\infty$，有

$$\mu((E_\infty-s)\cap F_\infty)=\mu(F_\infty).$$

c）假定 $\mu(F_\infty)>0$，试证函数

$$f(s)=\mu((E_\infty-s)\cap F_\infty)$$

只能取值 0 与 $\mu(F_\infty)$，且使得 $f(s)=\mu(F_\infty)$ 的 $s\in G$ 的集 $C$ 是既开又闭的，$\mu(C)=\mu(E_\infty)$，而且 $C$ 是 $E_\infty$ 的闭包（利用问题 2a）与 2b））. 另一方面，设 $D$ 是使得 $F_\infty$ 与 $s$ 的每个邻域的交都具有正测度的 $s\in F_\infty$ 的集，试证 $\mu(D)=\mu(F_\infty)$，并且 $E_\infty+D\subset C$；由此推断 $D$ 包含在问题 3 中定义的子群 $H(C)$ 内，且 $H(C)$ 在 $G$ 内是开的并是紧的. 最后，证明 $C+H(C)=C$，$\mu(C)\geqslant\mu(A)+\mu(B)-\mu(H(C))$，并且 $C\subset A+B$（对每个 $c\in C$，考虑 $E_\infty\cap(c-F_\infty)$ 的测度）.

d）由 c）推断，对 $G$ 的两个可积子集 $A$，$B$，或者 $\mu_*(A+B)\geqslant\mu(A)+\mu(B)$，或者存在 $G$ 的紧开子群 $H$，使得 $A+B$ 包含一个 mod$H$ 的陪集，且此时有 $\mu_*(A+B)\geqslant\mu(A)+\mu(B)-\mu(H)$. 考虑 $G$ 为连通的情形.

5）a）设 $A$（相应地，$B$）是 $\boldsymbol{R}$ 内的数 $x=x_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i2^{-i}$ 所成的集，其中

$x_0$ 是整数，$x_i$ 等于 0 或 1，且对一切正偶数 $i$ 有 $x_i = 0$（相应地，对一切正奇数 $i$ 有 $x_i = 0$）. 试证 $A$ 与 $B$ 关于 Lebesgue 测度都是零测度的，然而 $A + B = \boldsymbol{R}$.

b）由 a）推断，存在 $\boldsymbol{R}$（在 $\boldsymbol{Q}$ 上）的 Hamel 基 $H$，它包含在 $A \cup B$ 内，因而具有零测度. 数 $rh$（其中 $r \in \boldsymbol{Q}$, $h \in H$）所成的集 $P_1$ 也是零测度的.

c）以 $P_n$ 表示关于基 $H$ 至多有 $n$ 个坐标不等于零的实数的集，试证，若 $P_n$ 是可忽略的，$P_{n+1}$ 关于 Lebesgue 测度是可测的，则 $P_{n+1}$ 是可忽略的.（设 $h_0 \in H$，又设 $S$ 是满足下述条件的 $x \in P_{n+1}$ 的集：在 $x$ 表示为 $H$ 的元的线性组合中，$h_0$ 的系数不等于 0. 先证明 $S$ 是可忽略的. 然后利用问题 2 c）证明，若 $P_{n+1}$ 不是可忽略的，就会存在 $P_{n+1} \cap \complement S$ 的两个点 $x', x''$，使得 $(x'-x'')/h_0$ 是有理数，由此推出矛盾.）

d）由 b）与 c）推断，在 $\boldsymbol{R}$ 内存在两个可忽略集 $C$, $D$，使得 $C + D$（关于 Lebesgue 测度）是不可测的.

6）设 $G$ 是左作用于集 $X$ 上的群，$X$ 的子集 $P$（相应地，$C$）称为 $G$ 填补（相应地，$G$ 覆盖），如果对 $G$ 中每个 $s \neq e$，有 $s \cdot P \cap P = \phi$（相应地，如果 $X = \bigcup_{s \in G} s \cdot C$）. 如果子集 $P$ 既是 $G$ 填补又是 $G$ 覆盖，则称它为 $G$ 铺砌.

a）假定 $X$ 是可分可度量化与局部紧的，$G$ 至多可数且（关于 $G$ 上的离散拓扑）连续作用于 $X$ 上，并假定存在 $X$ 上的非零 $G$ 不变正测度 $\mu$. 设 $P$ 与 $C$ 分别是 $G$ 填补与 $G$ 覆盖，且都是 $\mu$ 可积集，试证 $\mu(C) \geqslant \mu(P)$（注意 $\mu(C) \geqslant \sum_{s \in G} \mu(C \cap s \cdot P) = \sum_{s \in G} \mu(s^{-1} \cdot C \cap P)$）.

b）假定在 $X$ 上存在定义 $X$ 的拓扑的 $G$ 不变距离 $d$，令 $\Delta(G)$ 是当 $C$ 取遍 $X$ 的所有可积 $G$ 覆盖时数 $\mu(C)$ 的下确界. 设 $r > 0$ 是这样的数：存在 $a \in X$，使得 $\mu(B(a;r)) > \Delta(G)$，试证在 $G$ 内存在 $s \neq e$，使得 $d(a, s \cdot a) < 2r$.

c）假定 $X$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $X$ 上的左 Haar 测度，$G$ 是 $X$ 的可数子群，并通过左平移作用于 $X$ 上. 试证，若 $A$ 是 $X$ 的可积子集，满足 $\mu(A) > \Delta(G)$，则存在 $s \in G \cap AA^{-1}$，且 $s \neq e$.

d）试证，在 a）中所述的条件下，若 $F$ 是 $\mu$ 可积的 $G$ 铺砌，$G_0$ 是 $G$ 的子群，且具有有限指数 $(G:G_0) = h$，于是，如果 $s_1, \cdots, s_h$ 形成 $G$ 内 $\operatorname{mod} G_0$ 的右陪集的表示系，则 $F_0 = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant h} s_i \cdot F$ 是 $G_0$ 铺砌.

e）在 a）的假定下，设 $f$ 是 $X$ 上的 $\mu$ 可积非负函数，试证存在 $X$ 的两个点 $a$, $b$，使得

$$\mu(C)\sum_{s\in G} f(s\cdot a)\geqslant\int_X f(x)d\mu(x),$$

$$\mu(P)\sum_{s\in G} f(s\cdot b)\leqslant\int_X f(x)d\mu(x).$$

（注意，若 $g$ 是非负可积函数，$E$ 是 $X$ 内的可积集，则存在 $c\in E$，使得

$$\int_E g(x)d\mu(x)\leqslant g(c)\mu(E),$$

并存在 $c'\in E$，使得

$$\int_E g(x)d\mu(x)\geqslant g(c')\mu(E).）$$

## 2. 特殊情形与例

**(14.2.1)** 在加法群 $\boldsymbol{R}$ 上，Lebesgue 测度 (13.1.4) 是 Haar 测度（它同时是左、右 Haar 测度，因为 $\boldsymbol{R}$ 是交换的）. 事实上这是把变量代换公式 (8.7.4) 应用于函数 $\varphi(\xi)=\xi+\alpha$ 的推论，因为这表明，对一切函数 $f\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{R})$ 与 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\alpha)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

**(14.2.2)** 考虑正实数的乘法群 $\boldsymbol{R}_+^*$，显然它是局部紧交换群 ((3.18.4), (4.1.2) 与 (4.1.4)). 另一方面，对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{R}_+^*)$，存在紧区间 $[a,b]$($0<a<b$)，它包含 $f$ 的支集；因而对 $\boldsymbol{R}_+^*$ 内每个包含 $f$ 的支集的区间 $[c,d]$，积分 $\int_c^d (f(t)dt)/t$ 有定义且具有相同的值，把这个值记作 $\int_0^{+\infty}(f(t)dt)/t$. 我们来证明 $f\to\int_0^{+\infty}(f(t)dt)/t$ 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 上的 Haar 测度. 事实上，由变量代换公式(8.7.4) 立即得到，对每个 $s>0$，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t}=\int_0^{+\infty}\frac{f(st)}{st}s\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(st)\,dt}{t},$$

由此即得我们的断言.

**(14.2.3)** 设 $G$ 是局部紧群，$e$ 是 $G$ 的幺元，$\mu$ 是 $G$ 上的左或右 Haar 测度，则为使 $G$ 是离散的，必须且只须 $\mu(\{e\})>0$；为使 $G$ 是

紧的,必须且只须 $\mu^*(G) < +\infty$(即 $\mu$ 是有界测度(13.20)).

显然,若 $G$ 是紧的,则 $\mu$ 是有界的. 若 $G$ 是离散的, 则 $\{e\}$ 是 $e$ 的一个开邻域,且因 $\mu$ 的支集是整个 $G$,所以 $\mu(\{e\}) > 0$,因而所述条件是必要的. 下面证明这些条件也是充分的. 设 $V$ 是 $e$ 的紧邻域, 如果 $\mu(\{e\}) > 0$, 则由 $\mu$ 为左不变或右不变, 就有 $\mu(\{s\}) = \mu(\{e\})$. 于是 $V$ 的点的数目为有限,且 $\leqslant \mu(V)/\mu(\{e\})$, 而由于 $G$ 是分离的,所以它是离散的.

现在假定 $\mu$ 是有界的且左不变的 (对右不变情形的证明完全类似). 考虑 $G$ 的满足下述条件的有限子集 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 的集 $\mathfrak{C}$: 对 $i \neq j$, 有 $s_iV \cap s_jV = \phi$. 我们有

$$n\mu(V) = \mu(s_1V \cup s_2V \cup \cdots \cup s_nV) \leqslant \mu(G),$$

从而 $n \leqslant \mu(G)/\mu(V)$. 于是在 $\mathfrak{C}$ 中有元 $\{s_1, \cdots, s_n\}$, 它具有最大可能的元素个数,由此推出,对每个 $s \in G$, $sV$ 至少与一个 $s_iV$ 相交,即 $s \in s_iVV^{-1}$. 于是 $G$ 是集 $s_iVV^{-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$的并,由于 $s_iVV^{-1}$ 是紧的 (12.10.4),从而 $G$ 是紧的.

**(14.2.4)** 设 $G$ 是局部紧群, $V$ 是 $G$ 的开子集, $\mu$ 是 $V$ 上的非零正测度,具有下述性质: 若 $U$ 是 $V$ 的开子集, $s \in G$ 满足 $sU \subset V$, 则 $\mu$ 在 $U$ 上所诱导的测度 (13.1.8)$\mu_U$ 在同胚 $x \to sx$ 下的象(13.1.6)就是 $\mu$ 在 $sU$ 上所诱导的测度 $\mu_{sU}$. 这时, 在 $G$ 上存在唯一的左 Haar 测度 $\alpha$, 它在 $V$ 上诱导出 $\mu$.

对每个 $s \in G$, 设 $\mu_s$ 是 $\mu$ 在 $V$ 到 $sV$ 上的同胚 $x \to sx$ 下的象. $\mu_s$ 在 $V \cap sV$ 上的限制是 $\mu_{s^{-1}V \cap V}$ 在 $x \to sx$ 在 $s^{-1}V \cap V$ 上的限制映射下的象. 由假定,这个象就是 $\mu_{V \cap sV}$. 通过平移可以推出, 对 $G$ 内任何 $s, t$, 测度 $\mu_s$ 与 $\mu_t$ 在 $sV \cap tV$ 上的限制是相同的. 于是根据 (13.1.9),在 $G$ 上存在正测度 $\alpha$, 使得对于每个 $s \in G$, $\alpha$ 在 $sV$ 上诱导出 $\mu_s$. 显然 $\alpha$ 是左不变的, 因而是 $G$ 上在 $V$ 上诱导出 $\mu$ 的唯一的左 Haar 测度.

以后,在第十九章中,我们将利用 Haar 测度的这个局部定义来确定 Lie 群上的左 Haar 测度. 现在给出 (14.2.4) 的下述推论:

**(14.2.5)** 设 $G$ 是局部紧群 $H$ 是 $G$ 的离散正规子群，$\pi: G \to G/H$ 是典则同态，$V$ 是 $G$ 的幺元的开邻域，使得 $\pi$ 在 $V$ 上的限制是 $V$ 到 $G/H$ 的幺元的邻域 $\pi(V)$ (12.11.2) 上的同胚．设 $\lambda$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，$\mu$ 是 $\lambda$ 在 $V$ 上的限制 $\lambda_V$ 在映射 $\pi|V$ 下的象，则 $\mu$ 是 $G/H$ 上的左 Haar 测度在 $\pi(V)$ 上的限制．

事实上，$\pi(V)$ 的每个开集都具有 $\pi(U)$ 的形式，其中 $U \subset V$ 是开集，并且 $\pi(s)\pi(U) \subset \pi(V)$ 等价于 $sU \subset V$．于是由定义立即推出 $\mu$ 满足 (14.2.4) 中的条件．

**(14.2.6)** 例．根据 (9.5.2) 与(9.5.7)，映射 $\varphi: t \to e^{2\pi it}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到绝对值为 1 的复数组成的紧群 $U$ 上的严格态射 (12.12.7)，它的核是整数离散子群 $\boldsymbol{Z}$，因而 $U$ 典则地等同于商群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{T}$ 称为一维环面或实数模 1 的加法群)．把(14.2.5)应用于 $V = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ 的情形，考虑到 $U$ 上的 Haar 测度必定是扩散的 (14.2.3)，并且 $\varphi(V)$ 在 $U$ 内的余集仅由一个点组成，从而推出，为使 $U$ 上的函数 $f$ 是 $\mu$ 可积的，必须且只须函数 $t \to f(e^{2\pi it})$ 在 $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ 上关于 Lebesgue 测度是可积的，此时并有 $\int f d\mu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(e^{2\pi it})\,dt$．

**(14.2.7)** 设 $G_1$，$G_2$ 是两个局部紧群，$\mu_i$ 是 $G_i$ 上的左 Haar 测度 $(i = 1, 2)$，则 $\mu_1 \otimes \mu_2$(13.21) 是 $G_1 \times G_2$ 上的左 Haar 测度．

事实上，对于每个函数 $f \in \mathscr{K}(G_1 \times G_2)$ 与每个 $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$，根据 (13.21.2)，有

$$\begin{aligned}\iint f(s_1x_1, s_2x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) &= \int d\mu_1(x_1)\int f(s_1x_1, s_2x_2)d\mu_2(x_2)\\ &= \int d\mu_1(x_1)\int f(s_1x_1, x_2)d\mu_2(x_2) = \int d\mu_2(x_2)\int f(s_1x_1, x_2)d\mu_1(x_1)\\ &= \int d\mu_2(x_2)\int f(x_1, x_2)d\mu_1(x_1) = \iint f(x_1, x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2),\end{aligned}$$

由此即得所述的结论．

特别，$\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度 (13.21.19) 是加法群 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Haar 测度．

## 问　　题

1）设 $G$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，$A$ 是 $G$ 的子集，$B$ 是 $G$ 的相对紧 $\mu$ 可积子集，且 $\mu(B)>0$．试证 若 $\mu_*(AB)<+\infty$，则 $A$ 是相对紧的（模仿（14.2.3）的证明）．

2）a）设 $G$ 是加法群 $\mathbf{R}^n$ 中秩为 $n$ 的离散子群，并通过平移作用于 $\mathbf{R}^n$ 上．试证，对于 Lebesgue 测度 $\lambda$，数 $\Delta(G)$（14.1 问题 6b））等于 $G$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的一个基（对于 $\mathbf{R}^n$ 的典则基）的行列式的绝对值（利用 14.1 问题 6a））．由此推断，若 $A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的闭对称凸集，其内部非空（12.14 问题 11）且 $\lambda(A)\geqslant 2^n\Delta(G)$，则在 $A\cap G$ 内存在异于 0 的点（**Minkowski 定理**）．

b）设 $u_i:(x_j)\rightarrow\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j(1\leqslant i\leqslant m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性形式，其系数 $c_{ij}$ 均为整数，并设 $m$ 是小于 $n$ 的整数．设 $p$ 是大于 1 整数，$A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中其内部为非空的对称凸集，试证，对每个满足 $\lambda(A)r^n\geqslant 2^np^m$ 的正数 $r$，存在点 $x\in rA$，它的坐标是异于 0 的整数，而且当 $1\leqslant i\leqslant m$ 时，有 $u_i(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$．（对 $\mathbf{Z}^n$ 的子群 $G_0$ 应用 Minkowski 定理，这里 $G_0$ 由满足 $u_i(z)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 的 $z\in\mathbf{Z}^n$ 组成；并利用 14.1 问题 6 c）．）特别，若 $c_1$，$c_2$ 是任意两个整数，试证存在不全为零的整数 $x_1$，$x_2$，使得 $|x_1|\leqslant\sqrt{p}$，$|x_2|\leqslant\sqrt{p}$，且 $c_1x_1+c_2x_2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$（**Thue 定理**）．

c）设 $a$，$b$ 是两个整数，利用 $b$）证明，存在不全为零的整数 $x_1,x_2,x_3,x_4$，使得

$$ax_1+bx_2\equiv x_3\ (\mathrm{mod}\,p),\quad bx_1-ax_2\equiv x_4(\mathrm{mod}\,p),$$

并且

$$y=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqslant\sqrt{2}\,p.$$

试证，若 $p$ 是素数，则能求出两个整数 $a$，$b$，使得 $a^2+b^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$．（限于 $p$ 为奇数的情形，注意当 $z$ 取 $(p+1)/2$ 个整数值 $0,1,2,\cdots,(p-1)/2$ 时，数 $z^2\ \mathrm{mod}\,p$ 的剩余类全不相同）；由此推断 $y=p$．最后，利用四元数的范数的乘法性质，由此推断每个非负整数 $n$ 是至多四个平方之和（**Lagrange 定理**）．

3）a）设 $\lambda$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度，$f$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $\lambda$ 可积非负实值函数，它有界并具有紧支集．令 $\gamma=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}f(t)$．对每个 $w\in\mathbf{R}$，以 $U_f(w)$ 表示使得 $f(t)\geqslant w$ 的 $t\in\mathbf{R}$ 的集，并令 $v_f(w)=\lambda^*(U_f(w))$．试证，对一切 $\alpha>1$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\alpha}(t)dt = \int_0^{\gamma} v_f(w)\alpha w^{\alpha-1}dw.$$

b) 设 $g$ 是满足与 $f$ 相同条件的另一非负实值函数，并设 $\delta = \sup_{t\in R} g(t)$. 设 $h$ 是 $R^2$ 上的函数，其定义如下：若 $f(u)g(v)\neq 0$，令 $h(u,v) = f(u) + g(v)$；若 $f(u)g(v) = 0$，令 $h(u,v) = 0$.最后,令 $k(t) = \sup_{u+v=t} h(u,v)$，于是 $k$ 是非负的，$\lambda$ 可积的，有界的，且具有紧支集．试证对一切 $\alpha > 1$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k^{\alpha}(t)dt \geqslant (\gamma+\delta)^{\alpha}\left(\frac{1}{\gamma^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\alpha}(t)dt + \frac{1}{\delta^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} g^{\alpha}(t)dt\right).$$

(注意，对 $0 < w \leqslant 1$，有 $U_k(\gamma w + \delta w) \subset U_f(\gamma w) + U_g(\delta w)$,并利用 a) 与 14.1 问题 4(d).)

c) 设 $\lambda_n$ 是 $R^n$ 上的 Lebesgue 测度，$A$，$B$ 是 $R^n$ 的两个 $\lambda_n$ 可积子集，试证

$$((\lambda_n)_*(A+B))^{1/n} \geqslant (\lambda_n(A))^{1/n} + (\lambda_n(B))^{1/n}$$

(**Brum-Minkowski 不等式**). (归结为 $A$ 与 $B$ 均为紧的情形．对 $n$ 进行归纳推理,同时利用 14.1 问题 4 d)，Lebesgue-Fubini 定理,b)中所证明的不等式，以及 Hölder 不等式.)

4) 设 $p$ 是素数,则 $p$-adic 整数(12.9 问题 4)所成的紧群 $Z_p$ 上的规范化 Haar 测度 $\mu$ 是这样的测度：任一半径为 $p^{-k}$ 的闭球的测度等于 $p^{-k}$(证明 $Z$ 是两两不相交的半径为 $p^{-k}$ 的 $p^k$ 个闭球的并).

## 3. 群上的模函数;自同构的模

设 $G$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度．对于 $G$ 内的 $s$，$t$，根据定义 (14.1.2),显然有

$$\gamma(t)(\delta(s)\mu) = \delta(s)(\gamma(t)\mu) = \delta(s)\mu,$$

因而 $\delta(s)\mu$ 也是左不变正测度．于是存在唯一的数 $\Delta_G(s) > 0$(也记作 $\Delta(s)$)，使得 $\delta(s)\mu = \Delta_G(s)\mu$ (14.1.5)，而且根据 (14.1.5)，显然这个数不依赖于左 Haar 测度 $\mu$ 的选取．映射 $s \to \Delta_G(s)$ 称为 $G$ 上的**模函数**．因此，对任何 $\mu$ 可积函数 $f$，函数 $x \to f(xs)$ 也是 $\mu$ 可积的,且有

**(14.3.1.1)**
$$\int f(xs)d\mu(x) = \Delta(s^{-1})\int f(x)d\mu(x).$$

特别地，对任何 $\mu$ 可积集 $A$，$As$ 是 $\mu$ 可积的，并且

(**14.3.1.2**) $$\mu(As) = \Delta(s)\mu(A).$$

(**14.3.2**) 映射 $s \to \Delta_G(s)$ 是 $G$ 到乘法群 $\boldsymbol{R}_+^*$ 的连续同态.

这可从公式 (14.3.1.1) 与引理 (14.1.5.5) 立即推出.

群 $G$ 称为**幺模的**，如果对一切 $s \in G$，有 $\Delta_G(s) = 1$；于是在幺模的情形下，Haar 左测度与右测度没有区别，因此就简称为 $G$ 上的 **Haar 测度**.

(**14.3.3**) 如果在 $G$ 内存在幺元 $e$ 的紧邻域 $V$，它在 $G$ 的所有内自同构下不变，则 $G$ 是幺模的. 特别，如果 $G$ 是紧的，或是离散的，或是交换的，则它是幺模的.

事实上，此时对每个 $s \in G$，由 (14.3.1.2) 与 (14.1.2.3)，有 $\mu(V) = \mu(s^{-1}Vs) = \Delta_G(s)\mu(V)$，根据 $\mu(V) \neq 0$ 由此即得所述的结论 (14.1.2).

(**14.3.4**) 对 $G$ 上的左 Haar 测度 $\mu$，有 $\check{\mu} = \Delta^{-1} \cdot \mu$；因而对 $G$ 上的 $\mu$ 可积函数 $f$，函数 $x \to f(x^{-1})\Delta(x)^{-1}$ 是 $\mu$ 可积的，且有

(**14.3.4.1**) $$\int f(x^{-1})\Delta(x)^{-1}d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x).$$

事实上，对每个 $s \in G$，有

$$\delta(s)(\Delta^{-1} \cdot \mu) = (\delta(s)\Delta^{-1}) \cdot (\delta(s)\mu) = (\Delta(s)^{-1}\Delta^{-1}) \cdot (\Delta(s)\mu) = \Delta^{-1} \cdot \mu,$$

这表明 $\Delta^{-1} \cdot \mu$ 是 $G$ 上的右 Haar 测度. 由于 $\check{\mu}$ 也是右 Haar 测度，所以存在常数 $a > 0$，使得 $\check{\mu} = a\Delta^{-1} \cdot \mu$；由此推出 $\mu = a(\Delta^{-1} \cdot \mu)^{\vee} = a\Delta \cdot \check{\mu} = a^2\mu$ (13.14.5)，从而 $a^2 = 1$. 由于 $a > 0$，故 $a = 1$. 这就证明了第一个论断. 由 (13.14.3) 即得第二个论断.

由此推出，若 $f$ 是局部 $\mu$ 可积函数，则有

(**14.3.4.2**) $$(f \cdot \mu)^{\vee} = (\Delta^{-1}\check{f}) \cdot \mu.$$

(**14.3.5**) 特别，如果 $G$ 是幺模的，则对每个 $\mu$ 可积函数 $f$，函数 $\gamma(s)f$，$\delta(s)f$ 与 $\check{f}$ 是 $\mu$ 可积的，且对任何 $s \in G$，有

(**14.3.5.1**) $$\int f(sx)d\mu(x) = \int f(xs)d\mu(x) = \int f(x^{-1})d\mu(x)$$

$$= \int f(x) d\mu(x),$$

并且对每个 $\mu$ 可积集 $A$，有

**(14.3.5.2)** $\mu(sA) = \mu(As) = \mu(A^{-1}) = \mu(\check{A})$.

当 $G$ 为无限且紧（相应地，$G$ 为无限且离散）因而为幺模(14.3.3)时，$G$ 上满足 $\mu(G) = 1$（相应地，$\mu(\{e\}) = 1$）的唯一 Haar 测度 $\mu$ 称为 $G$ 上的**规范化 Haar 测度**.

**(14.3.6)** 设 $u$ 是拓扑群 $G$ 的自同构，显然 $G$ 上的左 Haar 测度 $\mu$ 的象 $u^{-1}(\mu)$(13.1.6) 还是左 Haar 测度，因而(14.1.5)存在不依赖于 $\mu$ 的取法的正数 $a$，使得 $u^{-1}(\mu) = a\mu$. 称 $a$ 为自同构 $u$ 的**模**，记作 $\mathrm{mod}_G(u)$ 或 $\mathrm{mod}(u)$. 于是对每个 $\mu$ 可积函数 $f$，有

**(14.3.6.1)** $\int f(u^{-1}(x)) d\mu(x) = (\mathrm{mod}\, u) \int f(x) d\mu(x);$

特别是，对每个 $\mu$ 可积集 $A$，有

**(14.3.6.2)** $\mu(u(A)) = (\mathrm{mod}\, u)\mu(A)$.

特别，对每个 $s \in G$，设 $i_s$ 是内自同构 $x \to s^{-1}xs$，则可写 $i_s^{-1} = \delta(s)\gamma(s)$，因而

$$i_s^{-1}(\mu) = \delta(s)\mu = \Delta(s)\mu,$$

这表明

**(14.3.7)** $\mathrm{mod}(i_s) = \Delta(s)$.

当 $G$ 为紧或离散时，对 $G$ 的任一自同构 $u$，必有 $\mathrm{mod}(u) = 1$. 这是因为，显然 $u(G) = G$，$u(\{e\}) = \{e\}$，于是只须分别对 $A = G$ 与 $A = \{e\}$ 应用 (14.3.6.2).

由 (14.3.6.2) 立即推出，若 $u$ 与 $v$ 是 $G$ 的两个自同构，则有

**(14.3.8)** $\mathrm{mod}(u \circ v) = \mathrm{mod}(u) \cdot \mathrm{mod}(v)$.

**(14.3.9)** 对向量空间 $R^n$ 的任一自同构 $u$，有

$$\mathrm{mod}\, u = |\det u|.$$

设 $U = (\alpha_{ij})$ 是自同构 $u$ 关于典则基的矩阵，以 $E_{ij}$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列元素等于 1 而所有其余元素均等于 0 的 $n$ 阶方阵；对 $i \neq j$ 与每个 $\lambda \in \boldsymbol{R}$，令

$$B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},$$

于是有下面的引理:

**(14.3.9.1)** 每个 $n$ 阶可逆矩阵 $U$ 是一些形如 $B_{ij}(\lambda)$ 的矩阵与一个形如 $I + (a-1)E_{nn}$ 的矩阵的乘积.

我们对形如

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{1,n-h} & \cdots & \xi_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \xi_{2,n-h} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \xi_{n-h-1,n-h} & \cdots & \xi_{n-h-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{n,n-h} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

的可逆矩阵就 $h \geqslant 0$ 用归纳法进行证明;当 $h = n-1$ 时,$X$ 表示任一可逆矩阵. 注意 $B_{ij}(\lambda)X$ 是把 $X$ 的第 $j$ 行的 $\lambda$ 倍加到第 $i$ 行上而得到的矩阵. 当 $h = 0$ 时,必有 $\xi_{nn} \neq 0$. 如果相继左乘矩阵 $B_{in}(-\xi_{nn}^{-1}\xi_{in})$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, 就得到矩阵

$$I + (\xi_{nn} - 1)E_{nn},$$

由此 $h = 0$ 情形下的引理得证. 现在假定所述引理对 $h = 0, 1, \cdots, k-1 < n$ 已经得证转而证明 $h = k$ 的情形. 借助分块计算 $\det(X)$ 可知,必存在元 $\xi_{i,n-k} \neq 0$, 其中 $i$ 满足 $n-k \leqslant i \leqslant n$. 对某个满足 $n-k \leqslant j \leqslant n$ 的指标 $j \neq i$, 若以 $B_{ji}((1-\xi_{j,n-k})\xi_{i,n-k}^{-1})$ 左乘 $X$, 即可设 $\xi_{j,n-k} = 1$. 然后相继用矩阵 $B_{rj}(-\xi_{r,n-k})$ $(r \neq j)$ 相乘,就得到一个矩阵,对于这个矩阵,当 $r \neq j$ 时,有 $\xi_{r,n-k} = 0$, 而 $\xi_{j,n-k} = 1$. 最后,用 $B_{j,n-k}(-1)B_{n-k,j}(1)$ 乘这个矩阵,便得到一个形式相同的矩阵,只是此时 $j = n-k$. 现在只须对这个矩阵应用归纳法假设即可得到所需的结论.

根据 (14.3.8),我们看到,为证明 (14.3.9),可限于 $u$ 形如

**(14.3.9.2)** $\qquad (x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_{n-1}, ax_n)$

**(14.3.9.3)** $\qquad (x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_i + \lambda x_j, \cdots, x_n)$

之一的情形. 根据 (13.21.2), 对任一函数 $f \in \mathscr{K}(\boldsymbol{R}^n)$, 有

$$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_{n-1},ax_n)dx_1dx_2\cdots dx_n =$$
$$\int\cdots\int dx_1\cdots dx_{n-1}\int f(x_1,\cdots,ax_n)dx_n;$$

而变量代换公式 (8.7.4) 给出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\cdots,x_{n-1},ax_n)dx_n = |a^{-1}|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\cdots,x_n)dx_n,$$

因而当 $u$ 形如 (14.3.9.2) 时,(14.3.9) 为真. 类似地,我们可写

$$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_j+\lambda x_i,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$=\int\cdots\int dx_1\cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n\int f(x_1,\cdots,x_j+\lambda x_i,\cdots,x_n)dx_j;$$

根据 Lebesgue 测度的平移不变性,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\cdots,x_j+\lambda x_i,\cdots,x_n)dx_j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\cdots x_j,\cdots,x_n)dx_j,$$

这表明 $u$ 形如 (14.3.9.3) 时 (14.3.9) 成立.

**(14.3.10)** 应用于积分的计算: I. 超平行体与单形.

在 $R^n$ 内,设 $P$ 是在任意 $n$ 个向量 $x_1,\cdots,x_n$ 上构成的"**超平行体**",换言之,$P$ 是向量 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ (其中对每个指标 $i$, $\xi_i$ 满足 $0\leqslant\xi_i\leqslant 1$) 的集. 设 $\mu$ 是 $R^n$ 上的 Lebesgue 测度,且设 $x_i=(\alpha_{1i},\cdots,\alpha_{ni})$, 则有

**(14.3.10.1)** $$\mu(P)=|\det(\alpha_{ij})|.$$

事实上,设 $u$ 是向量空间 $R^n$ 的自同构,满足 $u(e_i)=x_i (1\leqslant i\leqslant n)$, 这里 $e_1,\cdots,e_n$ 表示构成 $\boldsymbol{R}^n$ 的典则基的向量. 我们有 $P=u(K)$, 这里 $K$ 是在向量 $e_1,\cdots,e_n$ 上构成的超平行体. 于是由 (14.3.6.2) 与 (14.3.9) 推出 $\mu(P)=|\det(u)|\mu(K)$. 然而由 (13.21.15) 立即得到 $\mu(K)=1$, 由此即得公式 (14.3.10.1).

现在设 $S$ 是在向量 $x_1,\cdots,x_n$ 上构成的"**单形**",换言之,$S$ 是 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ (这里对每个 $i$ 都有 $\xi_i\geqslant 0$, 并且 $\xi_1+\cdots+\xi_n\leqslant$

1）的集．此时我们有

(**14.3.10.2**) $$\mu(S)=\frac{1}{n!}\,|\det(\alpha_{ij})|.$$

再用同样的线性变换 $u$，就归结为证明当 $x_i=e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时 公式(14.3.10.2)成立．把相应的单形记作 $S_n$，用 $\mu_n$ 代替 $\mu$，并令 $a_n=\mu_n(S_n)$．使 $\boldsymbol{R}^n$ 等同于 $\boldsymbol{R}^{n-1}\times\boldsymbol{R}$，对每个 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，考虑 $S_n$ 在 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 内的截面 $S_n(\lambda)$．当 $\lambda<0$ 或 $\lambda>1$ 时，显然 $S_n(\lambda)$ 是空集；而当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时，$S_n(\lambda)$ 是满足下述条件的 $(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ 所成的集：

$$\xi_1\geqslant0,\cdots,\xi_{n-1}\geqslant0,\xi_1+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant1-\lambda.$$

因此推出它是 $S_n(0)$在比例为$1-\lambda$的相似变换下的象．把(14.3.6.2)与(14.3.9)应用于 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 上的这个相似变换，就得到

$$\mu_{n-1}(S_n(\lambda))=(1-\lambda)^{n-1}a_{n-1}.$$

把(13.21.8)应用到紧集 $S_n$ 上，得到

$$a_n=\int_0^1(1-\lambda)^{n-1}a_{n-1}d\lambda=\frac{1}{n}\,a_{n-1}.$$

显见 $a_1=1$，因此得到 $a_n=1/n!$．

(**14.3.11**) 应用于积分的计算：II．闭球．

使用与(14.3.10)相同的符号，我们计算 Euclid 单位球 $B_n$（即使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant1$ 的 $(x_1,\cdots,x_n)$的集）的测度 $V_n=\mu_n(B_n)$．使用计算 $\mu_n(S_n)$ 时所用的方法，得到

$$V_n=\int_{-1}^{1}\mu_{n-1}(B_n(\lambda))d\lambda.$$

而由于 $B_n(\lambda)$ 是使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\leqslant1-\lambda^2$ 的 $(x_1,\cdots,x_{n-1})$的集，因而推出它是 $B_{n-1}$在比例为$\sqrt{1-\lambda^2}$的相似变换下的象；于是

$$\mu_{n-1}(B_n(\lambda))=(1-\lambda^2)^{(n-1)/2}V_{n-1};$$

作变量代换 $\lambda=\sin\theta$，得到

(**14.3.11.1**) $$V_n=V_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta=2V_{n-1}\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta.$$

令 $c_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta$，应用分部积分公式 (8.7.5)，即得当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$c_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta d\theta = (n-1)(c_{n-2} - c_n),$$

或 $nc_n = (n-1)c_{n-2}$。由于 $c_0 = \pi/2$，$c_1 = 1$，所以最后有

$$c_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}, \qquad c_{2n-1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}.$$

又由于 $V_1 = 2$，$V_2 = \pi$，根据 (14.3.11.1) 得到

**(14.3.11.2)**
$$\begin{cases} V_{2n} = \dfrac{\pi^n}{n!}, \\ V_{2n-1} = \dfrac{2^n \pi^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}. \end{cases}$$

利用 $\Gamma$ 函数的性质，这个公式可以写成

**(14.3.11.3)**
$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}.$$

## 问　　题

1) 设 $G$ 是局部紧群，且在其内存在既开又紧的子群 $H$. 试证对 $G$ 的每个自同构 $u$，$\operatorname{mod}(u)$ 是有理数(注意 $u(H) \cap H$ 在 $H$ 内与在 $u(H)$ 内都是指数为有限的子群). 试证使得 $\Delta_G(s) = 1$ 的 $s \in G$ 的集是 $G$ 的开子群，并且包含 $H$.

2) 设 $G$ 是紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的 Haar 测度，$u$ 是 $G$ 的一个(连续)自同态，使得 $u(G)$ 是 $G$ 的开子群，而核 $u^{-1}(e)$ (记作 $G_u$) 是 $G$ 的有限子群.

a) 试证，存在实数 $h(u) > 0$ 与 $e$ 在 $G$ 内的开邻域 $U$，使对每个开集 $V \subset U$，$u(V)$ 在 $G$ 内都是开的且有 $\mu(u(V)) = h(u)\mu(V)$ (利用 (14.2.5)).

b) 试证 $h(u) = \operatorname{Card}(G/u(G))/\operatorname{Card}(G_u)$ (利用 a) 与公式 (14.4.2)，用两种方法计算 $\mu(u(G))$).

3) 对非零有理数集 $\mathbf{Q}^*$ 赋予离散拓扑，在局部紧空间 $G = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}^*$ 上，通过 $(x, r)(x', r') = (rx' + x, rr')$ 定义一个合成律，试证赋予这个合成律与积拓扑的 $G$ 是局部紧群，它局部同构于 $\mathbf{R}$，但却不是幺模的.

4) a) 设 $G$ 是局部紧群，$\chi$ 是 $G$ 到乘法群 $\mathbf{C}^*$ 的连续同态. 试证，若 $G$ 上

的复测度 $\nu$ 满足：对一切 $s\in G$，有 $\gamma(s)\nu=\chi(s)\nu$，则 $\nu=a\chi\cdot\mu$，其中 $\mu$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，而 $a$ 是复常数.

b) $G$ 上的复测度 $\nu$ 称为**左拟不变测度**，如果对每个 $s\in G$，$\gamma(s)\nu$ 等价于 $\nu$ (13.15.6)试证，为使 $\nu$ 是左拟不变的，必须且只须 $\nu$ 是等价于 (13.15.6) $G$ 上的左 Haar 测度 $\mu$ 的测度.（为证明条件是必要的，归结为 $\nu\geqslant 0$ 的情形；利用 (13.15.5) 的准则 b′)，对一个紧集 $A$ 与属于 $\mathscr{K}(X)$ 的一个非负函数 $f$ 考虑二重积分 $\iint f(x)\varphi_A(xy)d\mu(x)d\nu(y)$，并且利用 Lebesgue-Fubini 定理.）

5) a) 设 $G$ 是局部紧群，$X$ 与 $Y$ 是 $G$ 的两个闭子群，满足 $X\cap Y=\{e\}$，并且 $\Omega=XY$ ($xy$ 所成的集，其中 $x\in X, y\in Y$) 包含 $e$ 在 $G$ 内的一个邻域. 试证 $\Omega$ 是 $G$ 内的开集且 $X\times Y$ 到 $\Omega$ 上的映射 $(x,y)\to xy^{-1}$ 是一个同胚(把 $X\times Y$ 看作通过 $(x,y)\cdot z=xzy^{-1}$ 作用于 $\Omega$ 上，参阅(12.16.12)).

b) 设 $\mu_G$, $\mu_X$, $\mu_Y$ 分别是 $G$, $X$, $Y$ 上的左 Haar 测度，$\mu$ 是 $\mu_G$ 在 $\Omega$ 上的限制，试证，除一个常数因子外，$\mu$ 是 $\mu_X\otimes(\chi^{-1}\cdot\mu_Y)$ 在 $X\times Y$ 到 $\Omega$ 上的同胚 $(x,y)\to xy^{-1}$ 下的象，这里 $\chi$ 表示 $\Delta_G$ 在 $Y$ 上的限制. 由此推断，为使定义在 $\Omega$ 上的实值函数 $f$ 是 $\mu$ 可积的，必须且只须函数 $(x,y)\to f(xy)\Delta_G(y)\Delta_Y(y)^{-1}$ 是 $(\mu_X\otimes\mu_Y)$ 可积的，此时并有

$$\int_\Omega f(z)d\mu(z)=a\iint_{X\times Y}f(xy)\Delta_G(y)\Delta_Y(y)^{-1}d\mu_X(x)d\mu_Y(y),$$

其中 $a$ 是不依赖于 $f$ 的常数.

c) 此外，还假定 $Y$ 是 $G$ 的正规子群，则除常数因子外，测度 $\mu$ 是 $\mu_X\otimes\mu_Y$ 在 $X\times Y$ 到 $\Omega$ 上的同胚 $(x,y)\to xy$ 下的象，且对于 $x\in X, y\in Y$，有 $\Delta_G(xy)=\Delta_X(x)\Delta_Y(y)(\bmod\ i_x)$，其中 $i_x$ 表示 $Y$ 的自同构 $y\to x^{-1}yx$ (参阅 (14.4.6)).

d) 考虑局部紧空间 $G=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^*$，在其上由 $(x,y)(x',y')=(yx'+x, yy')$ 定义一个合成律，试证这个局部紧群不是幺模的(利用 c)).

e) 设 $G$ 是局部紧群，在局部紧空间 $E=\boldsymbol{R}\times G$ 上，由

$$(\xi,x)(\xi',x')=(\xi+\Delta_G(x)\xi',xx')$$

定义一个合成律. 试证对于这个合成律，$E$ 是幺模局部紧群(利用 b))；群 $G$ (它不一定是幺模的)同构于 $E$ 的一个子群，并且同构于 $E$ 的一个商群.

6) 设 $p$ 是素数，在 $\boldsymbol{Z}_p$ (12.9 问题 4)上定义一个环的结构如下：对 $z=(z_n)$, $z'=(z'_n)$，令 $zz'=(z_nz'_n)$ (典则地赋予 $\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$ 商环的结构). 于是 $\boldsymbol{Z}$ 到 $\boldsymbol{Z}_p$ (参见上引) 的典则单射是一个环同态，它使 $\boldsymbol{Z}$ 等同于 $\boldsymbol{Z}_p$ 的一个处处稠密子环，试证 $\boldsymbol{Z}_p$ 是整环. $\boldsymbol{Z}_p$ 的分式域称为 **$p$-adic 数域**，记作 $\boldsymbol{Q}_p$. $\boldsymbol{Z}_p$ 内以 0 为中心的球组成的 0 的基本邻域系是 $\boldsymbol{Q}_p$ 内关于与 $\boldsymbol{Q}_p$ 的加法群结构

协调的一个拓扑的基本邻域系，$Q_p$ 关于这个拓扑是可分、可度量化且局部紧的(12.8问题 1)．有理数域 $Q$ 在 $Q_p$ 内稠密，且 $Q$ 上的 $p$-adic 距离(3.2.6)延拓为 $Q_p$ 上定义 $Q_p$ 的拓扑的距离 $d$．在 $Q_p$ 内，我们还令 $|x|_p = d(0,x)$．对每个 $s \in Q_p$，试证 $Q_p$ 的相似变换 $x \to sx$ 的模是 $|s|_p$．由此推断，对 $Q_p$ 上的向量空间 $Q_p^n$ 的每个自同构 $u$，有 $\mathrm{mod}\,u = |\det u|_p$．

7) 在赋予 Euclid 纯量积 $(x|y) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$ 的空间 $R^n$ 上，以 $\lambda_n$ 表示 Lebesgue 测度．对每个普遍可测有界集 $A$，设 $\sigma_p(A)$ 是如下定义的集：使 $R^n$ 等同于 $R^p \times R^{n-p}$，对每个点 $x' \in \mathrm{pr}_1(A)$，令 $B_{n-p}(x')$ 是 $R^{n-p}$ 中以 0 为中心的闭 Euclid 球，使得测度 $\lambda_{n-p}(B_{n-p}(x'))$ 等于 $A$ 在 $x'$ 处的截面的测度 $\lambda_{n-p}(A(x'))$；以 $\sigma_p(A)$ 表示当 $x'$ 取遍 $\mathrm{pr}_1(A)$ 时集 $\{x'\} \times B_{n-p}(x')$ 的并，因而有 $\mathrm{pr}_1(\sigma_p(A)) = \mathrm{pr}_1(A)$．

a) 试证，若 $A$ 是紧的，则 $\sigma_p(A)$ 也是紧的（利用 13.21 问题 16b)）．由此推断，若 $A$ 是普遍可测的，则 $\sigma_p(A)$ 是 $\lambda_n$ 可测的且 $\lambda_n(\sigma_p(A)) = \lambda_n(A)$．

b) 试证，若 $A$ 与 $B$ 是 $R^n$ 内的两个普遍可测有界集，则

$\lambda_p(\sigma_p(A) \cap \sigma_p(B)) = \lambda_n(A \cap B) + \lambda_n(\sigma_p(A \cap \complement B) \cap \sigma_p(B \cap \complement A))$.

c) 试证，在由 $R^n$ 的非空有界闭子集组成的集上，对于由 3.16 问题 3 中的距离所定义的拓扑，映射 $A \to \sigma_p(A)$ 不是连续的(注意对于这个拓扑，每个紧集可以用有限紧集任意逼近，因而其测度为零)．

d) 设 $A$ 与 $B$ 是 $R^n$ 内的紧集，试证

$$\sigma_{n-1}(A) + \sigma_{n-1}(B) \subset \sigma_{n-1}(A + B)$$

(参阅 14.2 问题 4d))．特别是，对一切 $r>0$，都有

$$\sigma_{n-1}(V_r(A)) \supset V_r(\sigma_{n-1}(A))$$

(此处采用 3.6 中的记号；注意 $V_r(A) = A + B'(0;r)$)．

8) 对每个通过 0 的超平面 $H \subset R^n$，设 $T$ 是把 $H$ 变换为 $R^{n-1}$ 的一个旋转．对每个普遍可测有界集 $A \subset R^n$，令 $\sigma_H(A) = T^{-1} \cdot \sigma_{n-1}(T \cdot A)$($A$ 关于 $H$ 的 **"Steiner 对称化"**)．

a) 假定 $A$ 是闭的且包含在以 0 为中心的闭球 $B$ 内，试证，若 $W$ 是作为 $B$ 的边界的球面 $S$ 的开子集，且 $W$ 与 $A$ 不相交，则 $\sigma_H(A)$ 既与 $W$ 不相交，又与 $W$ 关于 $H$ 的对称化不相交．

b) 由 a) 推断，在同样的假定下，存在有限个通过 0 的超平面 $H_1, \cdots, H_r$，使得集 $\sigma_{H_r}\sigma_{H_{r-1}}\cdots\sigma_{H_1}(A)$ 包含在 $B$ 内，而且除非 $A = B$，否则 $\sigma_{H_r}\sigma_{H_{r-1}}\cdots\sigma_{H_1}(A)$

总与 $S$ 不相交(利用 $S$ 的紧性).

c) 假定 $A$ 是紧的，试证，若 $B_0$ 是以 0 为中心的闭球，满足 $\lambda_n(A)=\lambda_n(B_0)$，则存在由通过 0 的超平面组成的序列 $(H_m)$，使得对于由 3.16 问题 3 所定义的距离而言，紧集 $A_m=\sigma_{H_m}\sigma_{H_{m-1}}\cdots\sigma_{H_1}(A)$ 的序列趋于 $B_0$.(利用 3.16 问题 3 的结果，首先证明可以假定序列 $(A_m)$ 具有极限 $A'$，满足 $A'\subset B'(0;R)$，其中 $R$ 是以 0 为中心的满足下述条件的闭球的半径的下确界：这些闭球都包含 $A$ 在有限个 Steiner 对称化的合成下的象，这些对称化是关于通过 0 的超平面作的；然后用反证法并利用 b) 证明 $B'(0;R)=B_0$.)

9) a) 设 $A$ 是赋予 Euclid 纯量积的空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内的非空紧集，对每个满足 $(u|u)=1$ 的向量 $u\in\boldsymbol{R}^n$，令 $h(A;u)=\sup\limits_{x\in A}(x|u)$，$b(A;u)=h(A;u)+h(A;-u)$($A$ 在 $u$ 方向的**宽度**)，则当 $u$ 取遍单位球面 $S_{n-1}$ 时，数 $b(A;u)$ 的上确界等于 $A$ 的直径 $\delta(A)$(6.3 问题 2). 对任何紧集 $A$, $B$ 与任何实数 $\alpha>0$，有 $h(A+B;u)=h(A;u)+h(B;u)$，且 $h(\alpha A;u)=\alpha h(A;u)$，由此推出关系式 $\delta(A+B)\leqslant\delta(A)+\delta(B)$.

b) 设 $s$ 是元偶 $(\alpha_j, U_j)(1\leqslant j\leqslant m)$ 组成的有限序列 $((\alpha_j, U_j))$，其中 $\alpha_j$ 是满足 $\sum\limits_j\alpha_j=1$ 的非负实数，$U_j$ 是绕 0 的旋转(即 $\boldsymbol{SO}(n,\boldsymbol{R})$ 的元). 紧集

$$\rho_s(A)=\sum_j\alpha_jU_j(A)$$

称为 $A$ 对应于有限序列 $s$ 的**旋转平均**. 我们有 $\lambda_n(\rho_s(A))\geqslant\lambda_n(A)$ (14.1 问题 4d)). 对每个 $u\in S_{n-1}$，有

$$h(\rho_s(A);u)=\sum_j\alpha_jh(A,U_j^{-1}(u)).$$

c) 设 $A$ 是包含在以 0 为中心的闭球 $B$ 内的非空紧集，试证，如果存在作为 $B$ 的边界的球面 $S$ 的非空开子集 $W$，且 $W$ 与 $A$ 不相交，则存在旋转平均 $\rho_s(A)$，使得 $\rho_s(A)\subset B$, $S\cap\rho_s(A)=\varnothing$ (利用 $S$ 的紧性，作如同问题 7 的推理).

d) 设 $R$ 是以 0 为中心的满足下述条件的闭球的半径的下确界：这些闭球包含 $A$ 在有限个旋转平均的合成下的象. 试证，若 $B_0=B'(0;R)$，则存在由集 $A_p=\rho_{s_p}\rho_{s_{p-1}}\cdots\rho_{s_1}(A)$ 组成的序列，它关于 3.16 问题 3 中所定义的距离趋于 $B_0$. (用反证法，首先证明可以假定序列 $(A_p)$ 具有极限 $A'\subset B_0$；然后利用 c) 证明 $A'$ 包含 $B_0$ 的边界 $S_0$；最后注意 $\frac{1}{2}S_0+\frac{1}{2}S_0=B_0$. )

c) 试证，对 $\boldsymbol{R}^n$ 内的任一紧集 $A$，有

$$\lambda_n(A) \leqslant 2^{-n} V_n(\delta(A))^n,$$

这里直径 $\delta(A)$ 是关于 Euclid 距离取的，而 $V_n$ 是球 $B_n$ 的 Lebesgue测度（**Bieberbach 不等式**）(利用 d)，并注意

$$\delta(\rho_i(A)) \leqslant \delta(A)).$$

10) 使用问题 7 中的记号，对 $\boldsymbol{R}^n$ 的任一紧子集 $A$，数

$$\alpha^+(A) = \lim_{r\to 0}\sup(\lambda_n(V_r(A)) - \lambda_n(A))/r$$

（相应地，

$$\alpha^-(A) = \lim_{r\to 0}\inf(\lambda_n(V_r(A)) - \lambda_n(A))/r)$$

称为 $A$ 的**上**(相应地，**下**) **Minkowski 面积**，这里 $r$ 通过正值趋于 0.

a) 给出紧集 $A$ 的例子，使得 $\alpha^+(A) = 1$，$\alpha^-(A) = 0$.（取 $n = 2$，取 $A$ 为形如 $c_k + A_k$ 的有限集的并，其中序列 $(c_k)$ 趋于 0，而对每个 $k$，$A_k$ 是积集 $I_k \times J_k$，这里 $I_k$ 与 $J_k$ 是形如 $(pa_k)_{0<p<r_k}$，$(qb_k)_{0<q<s_k}$ 的有限序列；适当地选择序列 $(c_k)$，$(a_k)$，$(b_k)$，$(r_k)$，$(s_k)$.）

b) 试证

$$\alpha^-(A) \geqslant n V_n^{1/n}(\lambda_n(A))^{(n-1)/n}$$

（**等周不等式**）.（利用 Brunn–Minkowski 不等式.）

c) 设 $A$ 是紧凸集（8.5 问题 8）. 试证，对每个紧凸集 $B$，当 $0 \leqslant \xi < +\infty$ 时，函数

$$-(\lambda_n(A + \xi B))^{1/n}$$

是凸的. 证明时利用 Brunn–Minkowski 不等式与对于任何实纯量 $\alpha$，$\beta$ 成立的事实 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$，$(\alpha + \beta)B = \alpha B + \beta B$. 由此推断 $\alpha^-(A) = \alpha^+(A)$（利用 8.5 问题 8）. 此时令

$$\alpha(A) = \alpha^+(A) = \alpha^-(A),$$

称为 $A$ 的 **Minkowski 面积**.

d) 试证，当紧凸集 $A$ 包含在 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 内时，有

$$\alpha(A) = \lambda_{n-1}(A).$$

e) 试证，当 0 是紧凸集 $A \subset \boldsymbol{R}^n$ 的内点时，有

$$n r_i^{-1} \lambda_n(A) \geqslant \alpha(A) \geqslant n r_e^{-1} \lambda_n(A),$$

其中 $r_i$ 是包含在 $A$ 内的以 0 为中心的闭球的最大半径，而 $r_e$ 是包含 $A$ 的以 0 为中心的闭球的最小半径.（注意 $V_r(A)$ 包含 $A$ 在比例为 $(r_e + r)/r_e$ 的相似变换下的象且包含于 $A$ 在比例为 $(r_i + r)/r_i$ 的相似变换下的象之内.）

11) 设 $G$ 是紧群，$h$ 是 $G$ 上定义 $G$ 的拓扑的左不变距离 (12.9.1)，$\mu$ 是 $G$ 上的 Haar 测度，试证

$$h'(x,y)=\int h(xs,\ ys)d\mu(s)$$

是 $G$ 上的等价于 $h$ 的既左不变又右不变的距离.

## 4. 商群上的 Haar 测度

设 $G$ 是局部紧群，$G'$ 是 $G$ 的闭正规子群，$G''=G/G'$ 是商群，它是局部紧的 ((12.11.3) 与 (12.10.9))；分别以 $\alpha'$, $\alpha''$ 表示 $G'$ 与 $G''$ 上的左 Haar 测度，以 $\pi: G\to G''$ 表示典则同态.

**(14.4.1)** 对每个函数 $f\in\mathscr{K}(G)$ 与 $x\in G$，函数

$$g(x)=\int_{G'}f(x\xi)d\alpha'(\xi)$$

在 $G$ 内连续，且对一切 $\zeta\in G'$，有 $g(x\zeta)=g(x)$；因而可以写 $g(x)=h(\pi(x))$，这里 $h$ 在 $G''$ 内连续 (12.10.6)．此外，$h$ 的支集是紧的．正线性形式 $f\to\int_{G''}h(x'')d\alpha''(x'')$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度.

$g$ 为连续的事实由 (14.1.5.5) 推出．根据 $\alpha'$ 的左不变性，加之还有

$$g(x\zeta)=\int_{G'}f(x\zeta\xi)d\alpha'(\xi)=g(x).$$

若 $S$ 是 $f$ 的支集，则除非 $x''\in\pi(S)$，否则不可能有 $h(x'')\neq 0$，且 $\pi(S)$ 在 $G''$ 内是紧的 (3.17.9)．最后，对任何 $S\in G$，令 $f_1=r(S^{-1})f$，且 $g_1$, $h_1$ 是相应的函数．显然 $g_1(x)=g(Sx)$，因此 $h_1(x'')=h(\pi(S)x'')$．于是最后的断言由 $\alpha''$ 的左不变性得到(线性形式 $f\to\int_{G''}h(x'')d\alpha''(x'')$ 为非零的事实由 $\alpha'$ 与 $\alpha''$ 的支集分别等于 $G'$ 与 $G''$ 直接推出).

若以 $\alpha$ 表示 $G$ 上的由 (14.4.1) 所定义的左 Haar 测度，则在用语随便时，我们也写，对任一函数 $f\in\mathscr{K}(G)$，有

**(14.4.2)** $$\int_G f(x)d\alpha(x)=\int_{G''}d\alpha''(\dot{x})\int_{G'}f(x\xi)d\alpha'(\xi),$$

其中 $\dot{x}=\pi(x)$.

这种与乘积测度 (13.21.2) 记号上的类似性在下述命题中仍然存在:

**(14.4.3)** (i) 对 $G$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$, 数 $\int^* f(x\xi)d\alpha'(\xi)$ 只依赖于 $\dot{x}=\pi(x)$. 若 $f\in\mathscr{I}(G)$, 则函数 $\dot{x}\to\int^* f(x\xi)d\alpha'(\xi)$ 属于 $\mathscr{I}(G'')$, 且有

**(14.4.3.1)** $$\int^* f(x)d\alpha(x)=\int^* d\alpha''(\dot{x})\int^* f(x\xi)d\alpha'(\xi).$$

(ii) 对 $G$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任一映射 $f$, 有

**(14.4.3.2)** $$\int^* f(x)d\alpha(x)\geqslant\int^* d\alpha''(\dot{x})\int^* f(x\xi)d\alpha'(\xi),$$

**(14.4.3.3)** $$\int_* f(x)d\alpha(x)\leqslant\int_* d\alpha''(\dot{x})\int_* f(x\xi)d\alpha'(\xi).$$

(iii) 设 $N$ 是 $G$ 内的 $\alpha$ 可忽略集, $M$ 是使得 $x^{-1}(N\cap xG')$ 在 $G'$ 内不是 $\alpha'$ 可忽略的 $x\in G$ 所成的集, 则 $\pi(M)$ 是 $\alpha''$ 可忽略的.

利用 (14.4.1) 与 $\alpha'$ 的左不变性, 所述命题完全可以模仿 (13.21.3), (13.21.4) 与 (13.21.5) 的证明.

**(14.4.4)** 设 $u$ 是 $G$ 到拓扑空间 $E$ 的 $\alpha$ 可测映射, $N$ 是使得 $G'$ 到 $E$ 的映射 $\xi\to u(x\xi)$ 不是 $\alpha'$ 可测的 $x\in G$ 的集, 则 $\pi(N)$ 是 $\alpha''$ 可忽略的.

证明按照与 (13.21.6) 相同的步骤进行, 并利用 (14.4.3) 以代替 (13.21.5).

**(14.4.5)** 设 $f$ 是 $G$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的 $\alpha$ 可积映射, $N$ 是使得 $G'$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $\xi\to f(x\xi)$ 不是 $\alpha'$ 可积的 $x\in G$ 的集, 则 $\pi(N)$ 是 $\alpha''$ 可忽略的; 对每个 $\dot{x}\notin\pi(N)$, 数 $\int f(x\xi)d\alpha'(\xi)$ 对所有点 $x\in\dot{x}$ 都相同, 在 $G''$ 上几乎处处有定义的函数 $\dot{x}\to\int f(x\xi)d\alpha'(\xi)$ 是 $\alpha''$ 可积的, 且公式 (14.4.2) 成立.

利用 (14.4.3) 与 (14.4.4), 这里仍可完全模仿 Lebesgue-Fubini

定理(13.21.7)的证明.

**(14.4.6)** 设 $u$ 是拓扑群 $G$ 的自同构,满足 $u(G')=G'$, $u'$ 是 $u$ 在 $G'$ 上的限制, $u''$ 是 $u$ 通过商诱导的 $G''$ 的自同构(因而对 $x\in G$, 有 $u''(\pi(x))=\pi(u(x))$), 则 $\mathrm{mod}_G(u)=\mathrm{mod}_{G'}(u')\mathrm{mod}_{G''}(u'')$.

事实上,设 $f$ 是属于 $\mathscr{K}(G)$ 的任一函数, 对 $\pi(x)=x''$, 令

$$h(x'')=\int f(x\xi)d\alpha'(\xi).$$

根据(14.4.2), 有

$$\int f(u^{-1}(x))d\alpha(x)=\int d\alpha''(\dot{x})\int f(u^{-1}(x)u^{-1}(\xi))d\alpha'(\xi);$$

由于按定义有 $u^{-1}(\xi)=u'^{-1}(\xi)$, 所以

$$\int f(u^{-1}(x)u^{-1}(\xi))d\alpha'(\xi)=(\mathrm{mod}(u'))\int f(u^{-1}(x)\xi)d\alpha'(\xi)$$
$$=h(u''^{-1}(\dot{x}));$$

又因 $\int h(u''^{-1}(x''))d\alpha''(x'')=(\mathrm{mod}(u''))\int h(x'')d\alpha''(x'')$, 我们就得到所述公式.

**(14.4.7)** 对每个 $x\in G$,有

$$\Delta_G(x)=\Delta_{G''}(\pi(x))\mathrm{mod}_{G'}(i'_x),$$

其中 $i'_x$ 表示 $G'$ 的自同构 $s'\to x^{-1}s'x$.

只须把(14.4.6)应用到 $u=i_x$ 的情形并利用(14.3.7). 特别是,若 $x'\in G'$, 则 $\Delta_G(x')=\Delta_{G'}(x')$.

## 问　　题

1) 设 $G$ 是局部紧群, $G$ 上的测度 $\mu$ 称为**相对左**(相应地, **右**)**不变测度**, 如果对每个 $s\in G$, 存在复数 $\chi(s)\neq 0$, 使得 $\gamma(s)\mu=\chi(s)\mu$ (相应地, $\delta(s)\mu=\chi(s)\mu$). 试证 $\chi$ 是 $G$ 到乘法群 $\mathbf{C}^*$ 的连续同态, $\mu$ 具有 $a\chi^{-1}\cdot\beta$ 的形式, 其中 $\beta$ 是 $G$ 上的左(相应地, 右) Haar 测度, 而 $a$ 是不等于 0 的复数(14.3 问题 4a)). 考虑本命题的逆命题;由此推断 $G$ 上的每个相对左不变测度都是相对右不变的.

2) 设 $G$ 是局部紧群, $H$ 是 $G$ 的闭子群, $\alpha$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度, $\beta$ 是 $H$ 上的左 Haar 测度, $\pi$ 是 $G$ 到 $G/H$ 上的典则映射.

a) 试证，对每个函数 $f\in\mathscr{K}(G)$，存在唯一的函数 $f^{\flat}\in\mathscr{K}(G/H)$，使得 $f^{\flat}(\pi(x))=\int_H f(x\xi)d\beta(\xi)$. 反之，对每个函数 $h\in\mathscr{K}(G/H)$，存在函数 $f\in\mathscr{K}(G)$，使得 $f^{\flat}=h$.（设 $C$ 是 $h$ 的支集，考虑 $G$ 的紧子集 $K$，使得 $\pi(K)=C$ (12.10.9)，并考虑函数 $g\in\mathscr{K}(G)$，使在 $K$ 上有 $g(x)>0$，同时注意 $(g\cdot(h\circ\pi))^{\flat}=g^{\flat}\cdot h$.）

b) $G/H$ 上的非零测度 $\mu$ 称为在 $G$ 下**相对不变的**，如果对每个 $s\in G$，存在数 $\chi(s)\neq0$，使对每个函数 $h\in\mathscr{K}(G/H)$，有 $\int h(s^{-1}\cdot z)d\mu(z)=\chi(s)\int h(z)\times d\mu(z)$（$\mu$ 称为在 $G$ 下**不变的**，如果在 $G$ 上有 $\chi(s)=1$）. 设 $\mu$ 是在 $G$ 下不变的测度，则线性形式 $\nu:f\to\int f^{\flat}(z)d\mu(z)$ 是 $G$ 上的相对左不变测度（问题 1），由此推断 $\chi$ 是 $G$ 到 $\boldsymbol{C}^*$ 的一个连续同态，且对每个 $\xi\in H$，必有 $\chi(\xi)=\Delta_G(\xi)/\Delta_H(\xi)$（对每个 $\xi\in H$，在 $G$ 上考虑函数 $f_1(x)=f(x\xi)$ 并用两种方法计算 $\nu(f_1)$）. 反之，如果存在 $G$ 到 $\boldsymbol{C}^*$ 的连续同态 $\chi$，使得 $\chi$ 是 $H$ 到 $\boldsymbol{C}^*$ 的同态 $\xi\to\Delta_G(\xi)/\Delta_H(\xi)$ 的延拓，则存在 $G/H$ 上的非零测度，它在 $G$ 下是相对不变的.（证明，若 $f\in\mathscr{K}(G)$ 满足 $f^{\flat}=0$，则必有

$$\int\chi(x^{-1})f(x)d\alpha(x)=0;$$

为此注意，对每个函数 $g\in\mathscr{K}(G)$，有

$$\int_H\Delta_H(\xi^{-1})d\beta(\xi)\int_G g(x)\chi^{-1}(x)f(x\xi^{-1})d\alpha(x)=0,$$

并利用 a) 与 Lebesgue-Fubini 定理.）

c) 特别，若 $H$ 是幺模的，则在 $G/H$ 上存在在 $G$ 下相对不变的非零测度. 如果在 $G/H$ 上存在这样的测度，并且它是正的与有界的，试证 $\mu$ 在 $G$ 下是不变的且 $G$ 是幺模的.（设 $G'$ 是 $G$ 的正规子群且是 $\Delta_G$ 的核，证明 $H\subset G'$ 且 $\mu$ 在 $G/G'$ 上的典则象是群 $G/G'$ 上的 Haar 测度，这个测度是有界的；由此推出 $G/G'$ 是紧的，最后推出 $G'=G$.）

3) 在线性群 $\boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$（它等同于行列式不等于零的矩阵 $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ 所成的集）上，由 $\boldsymbol{R}^4$ 的拓扑诱导的拓扑与群的结构协调 (12.8.1)，因而使得 $\boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 成为局部紧群. 试证 $\boldsymbol{R}^4$ 上的 Lebesgue 测度在 $\boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 上诱导的测度 $\mu$ 是相对不变的（问题 1），并由此推断 $|\det(X)|^{-2}\cdot\mu$ 是 $\boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 上的左、右 Haar 测度.

设 $\boldsymbol{T}(2,\boldsymbol{R})^*$ 是 $\boldsymbol{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 的子群，它由形如 $Z=\begin{pmatrix}x&y\\0&t\end{pmatrix}$ 的矩阵所组

成，试证 $T(2, R)^*$ 上的一个左 Haar 测度由

$$f \to \iiint f(x, y, t)|x^{-2}t^{-1}|dxdydt$$

给出，并且这个群上的模是函数 $Z \to |x^{-1}t|$. 由此推断，在齐性空间 $GL(2,R)/T(2, R)^*$ 上不存在在 $GL(2,R)$ 下相对不变的测度（$GL(2,R)/T(2,R)^*$ 可等同于射影直线 $P_1(R)$）.（利用 $GL(2,R)$ 的换位子群是 $SL(2,R)$ 这一事实.）

4）设 $G$ 是局部紧群，$H$ 是 $G$ 的闭子群，使得在 $G/H$ 上存在有界非零正测度 $\mu$，它在 $G$ 下不变. 试证，对于 $e$ 在 $G$ 内的每个相对紧开邻域 $U$，存在正整数 $m$，使对每个 $s \in G$，存在整数 $n$，满足 $1 \leqslant n \leqslant m$ 与 $s^n \in UHU^{-1}$.（若 $\pi$: $G \to G/H$ 是典则映射，注意 $\mu(\pi(U)) > 0$ 并且集 $s^j \cdot \pi(U)$ 的测度全都相等.）

5）设 $G$ 是局部紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的右 Haar 测度.

a）为使 $G$ 上的具有支集 $S$ 的非零正测度 $\alpha$ 满足：$S$ 是 $G$ 的闭子群，并且 $\alpha$ 在 $S$ 上所诱导的测度是 $S$ 上的右 Haar 测度，必须且只须对一切 $s \in S$，有 $\delta(s)\alpha = \alpha$；此时使得 $\delta(t)\alpha = \alpha$ 的 $t \in G$ 所成的集等于 $S$.

b）以 $\Gamma$ 表示 $G$ 上满足 a）中条件的正测度 $\alpha$ 的集，试证 $\Gamma$ 在 $M_+(G) - \{0\}$ 内是粗疏闭的. 若 $f \in \mathscr{K}_+(G)$ 满足 $f(e) > 0$，则使得 $\int f(s)d\alpha(s) = 1$ 的测度 $\alpha \in \Gamma$ 所成的集 $\Gamma_f$ 是粗疏紧的（证明对 $G$ 的每个紧子集 $K$，有 $\sup_{\alpha \in \Gamma_f} \alpha(K) < +\infty$）. 由此推断映射 $\alpha \to (\alpha(f), \alpha/\alpha(f))$ 是 $\Gamma$ 到积空间 $R_+^* \times \Gamma_f$ 上的同胚.

c）对每个测度 $\alpha \in \Gamma$，记 $H_\alpha = \mathrm{Supp}(\alpha)$，它是 $G$ 的子群.

我们一方面考虑 $G$ 上的右不变距离 $d$，使在 $G \times G$ 上有 $d(x, y) \leqslant 1$ (12.9.1)，另一方面考虑紧集的递增序列 $(K_n)$，使得它覆盖 $G$ 且 $K_n$ 包含在 $K_{n+1}$ 的内部中 (3.18.3). 设 $h$ 是 $G$ 上对应于 $d$ 的 Hausdorff 距离（3.16 问题 3），对 $G$ 的两个非空闭子集 $M$, $N$，当 $M \cap K_n$ 或 $N \cap K_n$ 为空集时，令 $h_n(M, N) = 1$，否则令 $h_n(M, N) = h(M \cap K_n, N \cap K_n)$；对 $G$ 的非空闭子集所成的集 $\mathfrak{F}(G)$ 赋予由伪距离族 $(h_n)$ 所定义的拓扑. 试证映射 $\alpha \to H_\alpha$ 是赋予粗疏拓扑的 $\Gamma_f$ 到 $\Sigma$ 上的同胚，这里 $\Sigma$ 是 $G$ 的闭子群所成的集，赋予 $\mathfrak{F}(G)$ 的拓扑在 $\Sigma$ 上的诱导拓扑.

6）采用问题 5 的记号，考虑 $\Gamma$ 的子集 $\Gamma^0$. 它由使得 $H_\alpha$ 为幺模的测度 $\alpha \in \Gamma$ 组成；$\Gamma^0$ 也是使得 $\alpha(f) = \alpha(\check{f})$ 对一切函数 $f \in \mathscr{K}(G)$ 成立的 $\alpha \in \Gamma$ 所成的集. 因而 $\Gamma^0$ 在 $\Gamma$ 内是粗疏闭的. 对每个 $\alpha \in \Gamma^0$，令 $Q_\alpha = G/H_\alpha$；于是在 $Q_\alpha$ 上存在在 $G$ 下相对不变的测度 $\mu_\alpha > 0$，使对每个 $f \in \mathscr{K}(G)$，有

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_{Q_\alpha} d\mu_\alpha(\dot{x})\int_{H_\alpha} f(xs)d\alpha(s)$$

(其中 $\dot{x}$ 是 $Q_\alpha$ 内 $x$ 的陪集 $xH_\alpha$)(问题 2).

a) 对 $\alpha\in\Gamma^0$ 与 $f\in\mathscr{K}(G)$, 令 $f_\alpha(x)=\int_{H_\alpha} f(xs)d\alpha(s)$, 试证映射 $\alpha\to\|f\|_\alpha$ 是粗疏连续的;由此推断映射 $\alpha\to\|\mu_\alpha\|$ 关于粗疏拓扑是下半连续的.

b) 设 $g$ 是非负实值 $\mu$ 可积函数, 且设 $\Gamma^0(g)$ 是满足下述条件的测度 $\alpha\in\Gamma^0$ 的集: 对一切 $x\in G$, 有 $\int^* g(xs)d\alpha(s)\geqslant 1$. 试证明 $\Gamma^0(g)$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射 $\alpha\to\|\mu_\alpha\|$ 是粗疏连续的. (只须证明这个函数是上半连续的. 设 $h\in\mathscr{K}_+(G)$ 满足 $\int|g(x)-h(x)|d\mu(x)\leqslant\varepsilon$, 且设 $K=\mathrm{Supp}(h)$. 若 $\pi_\beta: G\to Q_\beta$ 是典则映射, 试证对 $\beta\in\Gamma^0(g)$, 有 $\mu_\beta(Q_\beta-\pi_\beta(K))\leqslant\varepsilon$. 另一方面, 考虑函数 $f\in\mathscr{K}_+(G)$, 使在 $G$ 上满足 $\int_G f(xs)d\alpha(s)\leqslant 1$ 而在 $K$ 上满足 $\int_G f(xs)d\alpha(s)=1$(利用问题 2a)). 设 $U_\varepsilon$ 是满足下述条件的测度 $\beta\in\Gamma^0(g)$ 所成的集: 对一切 $x\in K$, 有 $\int_G f(xs)d\beta(s)>1-\varepsilon$, 证明 $(1-\varepsilon)\mu_\beta(\pi_\beta(K))\leqslant\|\mu_\alpha\|$.)

c) 设 $\Gamma_c^0$ 是使得 $G/H_\alpha$ 为紧的测度 $\alpha\in\Gamma^0$ 所成的集, 试证, 对于 $g\in\mathscr{K}_+(G)$, 有 $\Gamma^0(g)\subset\Gamma_c^0$. 设 $\alpha\in\Gamma_c^0$ 且 $g\in\mathscr{K}_+(G)$ 满足: 对一切 $x\in G$, 有 $\int g(xs)d\alpha(s)=2$ (问题 2a)). 对每个紧集 $L\subset G$, 设 $W$ 是使得 $\int g(xs)d\beta(s)\geqslant 1$ 对于一切 $x\in L$ 成立的 $\beta\in\Gamma^0$ 的集, 则 $W$ 是 $\alpha$ 在 $\Gamma^0$ 内关于粗疏拓扑的一个邻域. 试证, 若 $G$ 由 $e$ 的一个紧邻域 $U$ 所生成; 且若取上面的 $L=UK$, 则 $W\subset\Gamma^0(g)$; 由此推断映射 $\alpha\to\|\mu_\alpha\|$ 在 $\Gamma^0$ 上的限制是粗疏连续的.

d) 设 $\Gamma_d\subset\Gamma^0$ 是使得 $H_\alpha$ 为离散的测度 $\alpha$ 的集, 且设 $N\subset\Gamma_\alpha$ 是 $\Gamma_d$ 中使得 $\alpha(\{e\})=1$ 的测度 $\alpha$ 组成的子集. 对 $e$ 在 $G$ 内的每个相对紧开邻域 $U$, 设 $N_U$ 是使得 $H_\alpha\cap U=\{e\}$ 的 $\alpha\in N$ 所成的集; 试证 $N_U$ 是紧的(注意关系 $\alpha\in N_U$ 等价于 $\alpha(\{e\})\geqslant 1$ 与 $\alpha(U)\leqslant 1$). 当 $U$ 取遍 $e$ 在 $G$ 内的相对紧开邻域所成的集时, 集 $N_U$ 的内部形成 $N$ 的一个覆盖. 为使 $N$ 的子集 $M$ 在 $N$ 内是相对紧的, 必须且只须在 $G$ 内存在 $e$ 的相对紧开邻域 $U$, 使得 $M\subset N_U$.

7) 使用问题 5 与 6 的记号. 假定在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域, 它不包含 $G$ 的任何异于 $\{e\}$ 的有限子群, 试证 $\Gamma_d$ 到 $\boldsymbol{R}_+^*$ 的映射 $\alpha\to\alpha(\{e\})$ 是粗疏连续的. (用反证法证明在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域 $V$, 在 $\Gamma_d$ 内存在 $\alpha$ 的邻域 $W$, 使得关系 $\beta\in W$ 蕴涵 $(V^2-V)\cap H_\beta=\varnothing$.)

8) 使用问题 5 与 6 的记号，假定群 $G$ 是交换的且由 $e$ 的一个紧邻域所生成. 以 $N_c$ 表示 $N$ 中使得 $Q_\alpha = G/H_\alpha$ 为紧的测度 $\alpha$ 所成的子集，因而 $N_c = N \cap \Gamma_c^0$；$N_c$ 在 $N$ 内是开的(问题 6c)). 为使 $N_c$ 的子集 $A$ 在 $N_c$ 内是相对紧的，必须且只须它满足下面两个条件：1° 在 $G$ 内存在 $e$ 的开邻域 $U$，使对一切 $\alpha \in A$，有 $H_\alpha \cap U = \{e\}$；2° 存在常数 $k$，使对一切 $\alpha \in A$，有 $\mu_\alpha(G/H_\alpha) \leqslant k$（利用问题 6 与 $\mu_\alpha$ 是 $G/H_\alpha$ 上的 Haar 测度这一事实).

9) 把问题 6 到 8 的结果表达为关于由 $G$ 的闭子群所成的空间 $\Sigma$ 的子空间(问题 5c)) 的命题，特别是表达为关于幺模闭子群所成的子空间 $\Sigma^0$，关于使得 $G/H$ 为紧的子群 $H \in \Sigma^0$ 的子空间 $\Sigma_c^0$，关于离散子群所成的子空间 $D$，以及关于子空间 $D_c = D \cap \Sigma_c^0$ 的命题. 特别得到 **Mahler 准则**：若对每个离散子群 $H \in D_c$，以 $v(H)$ 表示 $G/H$ 关于测度 $\mu_\alpha$ 的总质量，这里 $\mu_\alpha$ 对应于 $H$ 上满足 $\alpha(\{e\}) = 1$ 的 Haar 测度 $\alpha$，则为使 $D_c$ 的子集 $A$ 在 $D_c$ 内是相对紧的，必须且只须：1° 在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域 $U$，使对一切 $H \in A$，有 $H \cap U = \{e\}$；2° 存在常数 $k$，使对一切 $H \in A$，有 $v(H) \leqslant k$. 考虑 $G = \boldsymbol{R}^n$ 的情形.

## 5. 局部紧群上测度的卷积

设 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是局部紧群 $G$ 上的有限个(复)测度，序列 $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 称为**可卷积的**，如果对每个函数 $f \in \mathscr{K}_c(G)$，函数

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

关于 $G^n$ 上的乘积测度 $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ 是可积的. 由这个定义与 (13.21.17) 立即推出，为使序列 $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是可卷积的，必须且只须这些测度的绝对值组成的序列 $(|\mu_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是可卷积的. 显然此时还有，

$$f \to \int \cdots \int f(x_1 x_2 \cdots x_n) d|\mu_1|(x_1) \cdots d|\mu_n|(x_n)$$

是 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(G)$ 上的一个正线性形式，因而它是 $G$ 上的正测度 (13.3.1)；根据 (13.16.5) 与 (13.21.17)，对于 $f \in \mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(G)$，有

**(14.5.1)**
$$\left| \int \cdots \int f(x_1 x_2 \cdots x_n) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n) \right| \leqslant \int \cdots \int |f(x_1 x_2 \cdots x_n)| d|\mu_1|(x_1) \cdots d|\mu_n|(x_n);$$

由此即知 (13.1.1) $f \to \int \cdots \int f(x_1 x_2 \cdots x_n) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n)$ 也是 $G$ 上的(复)测度．我们把这个测度记作 $\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n$，并称它为序列 $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 的**卷积**．公式 (14.5.1) 还表明

(**14.5.2**) $\quad |\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n| \leqslant |\mu_1| * |\mu_2| * \cdots * |\mu_n|.$

我们注意到，对每个函数 $f \in \mathscr{K}_C(G)$，函数

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

是连续的，因而对于 $G^n$ 上每个测度是可测的．于是根据 (13.21.10)，为使序列 $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 是可卷积的，必须且只须对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个置换 $\sigma$，有

(**14.5.3**)
$$\int^* d|\mu_{\sigma(1)}|(x_{\sigma(1)}) \int^* d|\mu_{\sigma(2)}|(x_{\sigma(2)}) \cdots$$
$$\cdots \int^* |f(x_1 x_2 \cdots x_n)| d|\mu_{\sigma(n)}|(x_{\sigma(n)}) < +\infty.$$

这等价于：对 $G$ 的每个紧子集 $K$，使得 $x_1 x_2 \cdots x_n \in K$ 的 $(x_1, \cdots, x_n)$ 组成的(闭)集 $A \subset G^n$ 关于 $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ 是可积的．

当两个测度的有序对 $(\mu, \nu)$ 为可卷积时，我们也称 $\mu$ 与 $\nu$ (按这个顺序)是可卷积的，或 $\mu$ 对 $\nu$ 是**左可卷积的**，$\nu$ 对 $\mu$ 是**右可卷积的**．显见，若 $\mu$ 与 $\nu$ 是可卷积的，则根据 (14.5.3)，满足 $|\mu'| \leqslant |\mu|$ 与 $|\nu'| \leqslant |\nu|$ 的两个测度 $\mu'$ 与 $\nu'$ 也是可卷积的．

(**14.5.4**) 若序列 $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是可卷积的，且若 $S_i = \operatorname{Supp}(\mu_i)$ (13.19)，则 $\operatorname{Supp}(\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n) \subset \overline{S_1 S_2 \cdots S_n}$；当测度 $\mu_i$ 为正时，$\operatorname{Supp}(\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n) = \overline{S_1 S_2 \cdots S_n}$.

事实上，设 $x$ 是不属于 $S_1 S_2 \cdots S_n$ 的闭包的点，$V$ 是 $x$ 的开邻域，它与 $S_1 S_2 \cdots S_n$ 不相交．对每个其支集包含在 $V$ 内的连续函数 $f$，可写出 (13.21.18)

$$\int \cdots \int f(x_1 x_2 \cdots x_n) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n)$$
$$= \int_{S_1} d\mu_1(x_1) \cdots \int_{S_n} f(x_1 x_2 \cdots x_n) d\mu_n(x_n).$$

但当 $x_i \in S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时，按假定有 $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0$，由此得到

第一个论断．另一方面，若 $\mu_i$ 都是正的，则 $\mu=\mu_1*\mu_2*\cdots*\mu_n$ 同样是正的．若 $U$ 是 $\mu$ 可忽略的开集，$K\subset U$ 是紧集，$f\in\mathscr{K}_{R}(G)$ 是在 $[0,1]$ 中取值的函数，它在 $K$ 上等于 1 而在 $\complement U$ 上等于 0 (4.5.2)，则由假定有

$$\int\cdots\int f(x_1x_2\cdots x_n)d\mu_1(x_1)\cdots d\mu_n(x_n)=0;$$

因而使得 $f(x_1x_2\cdots x_n)>\frac{1}{2}$ 的点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 组成的开集关于乘积测度 $\mu_1\otimes\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n$ 是可忽略的，从而与这个测度的支集 $S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$(13.21.18) 不相交．由此推出(因为映射 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to x_1x_2\cdots x_n$ 连续) $K$ 与 $\overline{S_1S_2\cdots S_n}$ 不相交，故 $\overline{S_1S_2\cdots S_n}$ 包含在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 内．这就完成了证明．

## 6. 测度的卷积的例与特殊情形

**(14.6.1)** $G$ 上的 Dirac 测度 (13.1.3) $\varepsilon_s$ 对 $G$ 上任一测度 $\mu$ 是(左、右)可卷积的，且有

(14.6.1.1) $\qquad \varepsilon_s*\mu=\gamma(s)\mu,\quad \mu*\varepsilon_s=\delta(s^{-1})\mu,$

(14.6.1.2) $\qquad \varepsilon_s*\varepsilon_t=\varepsilon_{st}.$

例如，验证 (14.6.1.1) 的第一个公式．这归结为证明，对每个函数 $f\in\mathscr{K}_C(G)$，连续函数 $(x,y)\to f(xy)$ 关于乘积测度 $\varepsilon_s\otimes\mu$ 是可积的．函数 $x\to f(xy)$ 关于测度 $\varepsilon_s$ 是可积的，且有 $\int f(xy)d\varepsilon_s(x)=f(sy)$；由于函数 $y\to f(sy)$ 是连续的且具有紧支集，所以它关于 $\mu$ 是可积的．于是我们的断言由 (13.21.10) 得到，此时 Lebesgue-Fubini 定理 (13.21.7) 给出 $\iint f(xy)d\varepsilon_s(x)d\mu(y)=\int f(sy)d\mu(y)$；这样第一个公式 (14.6.1.1) 由 (14.1.1) 与(14.1.2) 得到．

**(14.6.2)** $G$ 上的有界测度的任一有限族 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 是可卷积的，测度 $\mu_1*\mu_2*\cdots*\mu_n$ 有界，并且

(14.6.2.1) $\|\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n\| \leqslant \|\mu_1\|\|\mu_2\|\cdots\|\mu_n\|$.

为证明第一个论断，注意 $G^n$ 上的测度 $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ 是有界的(13.21.18)；对每个函数 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，函数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\to f(x_1x_2\cdots x_n)$ 在 $G^n$ 上是连续且有界的，因而关于 $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ 是可积的(13.20.4)。为证明(14.6.2.1)，只须注意，若 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$ 且满足 $\|f\|\leqslant 1$，则根据(13.21.18)，有

$$\left|\int\cdots\int f(x_1x_2\cdots x_n)d\mu_1(x_1)\cdots d\mu_n(x_n)\right|\leqslant\|\mu_1\|\cdot\|\mu_2\|\cdots\|\mu_n\|.$$

**(14.6.3)** $G$ 上的左 Haar 测度 $\lambda$ 对 $G$ 上任一有界测度 $\mu$ 是右可卷积的，并且 $\mu*\lambda=\mu(1)\lambda$。

可以限于 $\mu\geqslant 0$ 的情形(参阅(14.7.1.2))。对每个函数 $f\in\mathscr{K}_+(G)$，有 $\int^* d\mu(x)\int^* f(xy)d\lambda(y)=\int^* d\mu(x)\int f(y)d\lambda(y)=\lambda(f)\|\mu\|$，因而根据(13.21.9)，函数 $(x, y)\to f(xy)$ 关于 $\mu\otimes\lambda$ 是可积的，且其积分等于 $\lambda(f)\|\mu\|$。

相反地，同样的计算表明，当 $G$ 非紧时，$\lambda$ 同自身是不可卷积的，因为此时函数 1 不是 $\lambda$ 可积的(14.2.3)。

**(14.6.4)** 设 $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 是 $G$ 上测度的有限序列，且设这些测度至多除一个外都具有紧支集，则序列 $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 是可卷积的。

令 $S_i=\text{Supp}(\mu_i)$，且假定至多除去指标 $j$ 外，所有 $S_i$ 都是紧的。设 $f\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，$K$ 是 $f$ 的紧支集。只须证明满足下述条件的点 $(x_1, \cdots, x_n)\in G^n$ 的集在 $G^n$ 内是相对紧的：$(x_1, \cdots, x_n)$ 属于 $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ 的支集 $\prod_{i=1}^{n} S_i$(13.21.18)且使得 $x_1x_2\cdots x_n\in K$。然而，条件 $x_i\in S_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 与 $x_1x_2\cdots x_n\in K$ 蕴涵

$$x_j\in S_{j-1}^{-1}\cdots S_1^{-1}KS_n^{-1}\cdots S_{j+1}^{-1},$$

而上式右边在 $G$ 内是紧集(12.10.5)；由于按假定当 $i\neq j$ 时 $S_i$ 是紧集，从而建立了我们的断言(3.20.16)。

(14.6.2)或(14.6.3)的结果表明，两个都不具有紧支集的测度可以是可卷积的；稍后(14.10.7)我们将看到两个无界测度为可

卷积的例子.

## 7. 卷积的代数性质

**(14.7.1)** 设 $\lambda, \mu, \nu$ 是 $G$ 上的三个测度，且 $(\lambda, \mu)$ 与 $(\lambda, \nu)$ 是可卷积的,则 $(\lambda, \mu+\nu)$ 也是可卷积的,且有

**(14.7.1.1)** $$\lambda*(\mu+\nu)=\lambda*\mu+\lambda*\nu.$$

事实上，根据关系式 $|\mu+\nu| \leqslant |\mu|+|\nu|$，我们可以限于 $\lambda, \mu, \nu$ 均为正的情形,而在这种情形,所述断言由 (13.16.1) 立即推出.

同样,若 $(\lambda, \nu)$ 与 $(\mu, \nu)$ 是可卷积的,则 $(\lambda+\mu, \nu)$ 也是可卷积的,且有

**(14.7.1.2)** $$(\lambda+\mu)*\nu=\lambda*\nu+\mu*\nu.$$

另一方面,若 $(\lambda, \mu)$ 是可卷积的, 则显然 $(a\lambda, b\mu)$ 也是可卷积的,这里 $a, b$ 是任意的纯量,且有

**(14.7.1.3)** $$(a\lambda)*(b\mu)=(ab)\lambda*\mu.$$

**(14.7.2)** 设 $\lambda, \mu, \nu$ 是 $G$ 上的三个非零测度.

(i) 若序列 $(\lambda, \mu, \nu)$ 是可卷积的,则序列$(\lambda,\mu)$,$(|\lambda|*|\mu|, \nu)$, $(\mu, \nu)$, $(\lambda, |\mu|*|\nu|)$ 也是可卷积的,且有

**(14.7.2.1)** $$\lambda*\mu*\nu=(\lambda*\mu)*\nu=\lambda*(\mu*\nu).$$

(ii) 若序列 $(\lambda, \mu)$ 与 $(|\lambda|*|\mu|, \nu)$是可卷积的,则$(\lambda,\mu,\nu)$ 也是可卷积的;若序列 $(\mu, \nu)$ 与 $(\lambda, |\mu|*|\nu|)$ 是可卷积的,则同样的结论成立.

可以限于考虑 $\lambda, \mu, \nu$ 均为正的情形. 假定序列 $(\lambda, \mu, \nu)$是可卷积的,则对 $G$ 的每个紧子集 $K$, 使得 $xyz \in K$ 的三元组 $(x, y, z)$ 的集是 $(\lambda\otimes\mu\otimes\nu)$ 可积的. 设 $A$ 是使得 $xy \in K$ 的元偶 $(x, y)$ 的集,则对 $G$ 的每个紧子集 $K'$, 集 $A \times K' \subset G^3$ 包含在使得 $xyz \in KK'$ 的三元组 $(x, y, z)$ 的集内,由于 $KK'$ 是紧的,故可推断 $A \times K'$ 是 $((\lambda\otimes\mu)\otimes\nu)$ 可积的. 因为 $\nu \neq 0$,从而 $A$ 是 $(\lambda\otimes\mu)$ 可积的 (13.21.11),故 $(\lambda, \mu)$是可卷积的.于是,对每个函数 $f \in \mathscr{K}_+(G)$,

根据假定与 Lebesgue-Fubini 定理，因为对每个 $z\in G$，$t\to f(tz)$ 属于 $\mathscr{K}_+(G)$，所以

$$\int^* d\nu(z)\int^* f(tz)d(\lambda*\mu)(t)=\int^* d\nu(z)\iint f(xyz)d\lambda(x)d\mu(y)$$
$$=\iiint f(xyz)d\lambda(x)d\mu(y)d\nu(z).$$

这表明 $\lambda*\mu$ 与 $\nu$ 是可卷积的．用同样的方法可证元偶 $(\mu,\nu)$ 与 $(\lambda,\mu*\nu)$ 是可卷积的．于是公式（14.7.2.1）是 Lebesgue-Fubini 定理的推论．

反之，假定 $(\lambda,\mu)$ 与 $(\lambda*\mu,\nu)$ 是可卷积的且设 $f\in\mathscr{K}_+(G)$．对每个 $z\in G$，$t\to f(tz)$ 属于 $\mathscr{K}_+(G)$，因而它是 $(\lambda*\mu)$ 可积的且有 $\int f(tz)d(\lambda*\mu)(t)=\iint f(xyz)d\lambda(x)d\mu(y)$．

根据假定并通过 Lebesgue-Fubini 定理得到

$$\int^* d\nu(z)\int^* d\mu(y)\int^* f(xyz)d\lambda(x)$$
$$=\int^* d\nu(z)\int^* f(tz)d(\lambda*\mu)(t)<+\infty,$$

这表明 $(\lambda,\mu,\nu)$ 是可卷积的．

我们能给出 $G$ 上的测度 $\lambda,\mu,\nu$ 的例子，使得元偶 $(\lambda,\mu)$，$(\lambda*\mu,\nu)$，$(\mu,\nu)$ 与 $(\lambda,\mu*\nu)$ 是可卷积的，然而 $(\lambda*\mu)*\nu\neq\lambda*(\mu*\nu)$（问题 1）．

**(14.7.3)** 若序列 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 是可卷积的，则序列 $(\check{\mu}_n,\cdots,\check{\mu}_1)$ 也是可卷积的，且有

**(14.7.3.1)** $(\mu_1*\mu_2*\cdots*\mu_n)^\vee=\check{\mu}_n*\check{\mu}_{n-1}*\cdots*\check{\mu}_1.$

事实上（14.1.4 与 13.7.10），

$$\int\cdots\int^* |f(x_1x_2\cdots x_n)|d|\mu_1|(x_1)\cdots d|\mu_n|(x_n)<+\infty$$

与

$$\int\cdots\int^* |f(x_n^{-1}x_{n-1}^{-1}\cdots x_1^{-1})|d|\check{\mu}_n|(x_n)\cdots d|\check{\mu}_1|(x_1)<+\infty$$

是等价的，并且这两个积分相等．

反之,若序列 $(\lambda, \mu)$ 是可卷积的,序列 $(\mu, \lambda)$ 却不一定是可卷积的(问题 2). 但是,当 $G$ 为交换时,显然 $(\lambda, \mu)$ 为可卷积与 $(\mu, \lambda)$ 为可卷积是等价的,并且 $\lambda * \mu = \mu * \lambda$.

特别是,由上面的结果推出:

**(14.7.4)** 在 $G$ 上的有界测度的集 $M^1_{\mathbf{C}}(G)$ 上,合成律 $(\lambda, \mu) \to \lambda * \mu$ (连同 $M^1_{\mathbf{C}}(G)$ 的向量空间结构)定义 $\mathbf{C}$ 上的一个代数结构,其单位元是 $G$ 的幺元 $e$ 处的 Dirac 测度 $\varepsilon_e$. $G$ 上具有紧支集的测度的集 $M^c_{\mathbf{C}}(G)$ 是 $M^1_{\mathbf{C}}(G)$ 的子代数. 为使代数 $M^1_{\mathbf{C}}(G)$ 是交换的,必须且只须 $G$ 是交换的.

从公式 (14.6.1.2) 得到下述事实:若 $M^1_{\mathbf{C}}(G)$ 是交换代数,则 $G$ 是交换群.

当 $G$ 为离散时,代数 $M^c_{\mathbf{C}}(G)$ 是线性组合 $\sum\limits_{s \in G} a_s\varepsilon_s$ 的集,其中 $a_s$ 除有限个点 $s \in G$ 外均等于 0 (3.16.3). 公式 (14.6.1.2) 表明,

$$\left(\sum_{s \in G} a_s\varepsilon_s\right) * \left(\sum_{s \in G} b_s\varepsilon_s\right) = \sum_{s \in G}\left(\sum_{tu=s} a_t b_u\right)\varepsilon_s.$$

这就是代数学中所说的域 $\mathbf{C}$ 上的群 $G$ 的**群代数**.

## 问　　题

1) 在群 $\mathbf{R}$ 上,设 $\lambda$ 是 Lebesgue 测度,$\mu = \varphi_I \cdot \lambda$,其中 $I = [0, +\infty]$,又设 $a < b$ 是 $\mathbf{R}$ 的两个不同的点. 试证卷积 $((\varepsilon_a - \varepsilon_b) * \mu) * \lambda$ 有定义,然而 $\mu$ 与 $\lambda$ 不是可卷积的. 又证明卷积 $\mu * ((\varepsilon_a - \varepsilon_b) * \lambda)$ 与 $(\mu * (\varepsilon_a - \varepsilon_b)) * \lambda$ 都有定义但却不相等.

2) 设 $G$ 是非幺模局部紧群.

a) 试证,存在 $G$ 上的有界正测度 $\mu$,使得测度 $\Delta_G \cdot \mu$ 无界(取 $\mu$ 为离散的).

b) 设 $\lambda$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度. 我们已知 $\mu$ 与 $\lambda$ 是可卷积的 (14.6.3),试证 $\lambda$ 与 $\mu$ 不是可卷积的.

3) 设 $G$ 是局部紧群.

a) 设 $\mu, \nu$ 是 $G$ 上的两个正测度. 试证,若 $\mu * \nu = \varepsilon_e$,则必有 $\mu = a\varepsilon_x$,$\nu = a^{-1}\varepsilon_{x^{-1}}$,其中 $x \in G$ 且 $a \neq 0$ (参阅 14.5.4).

b）在有两个元的群 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 上给出正测度的例子，使得它的支集是整个群，且它关于卷积而言具有逆元.

4）a）在 $M^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})$ 中考虑由有界测度 $\mu_n=\varepsilon_n$, $\nu_n=\varepsilon_{-n}$ 组成的两个序列，它们关于 13.20 问题 1 中定义的拓扑 $\mathscr{T}_2$ 趋于 0. 试证测度 $\mu_n*\nu_n$ 的序列关于 $\mathscr{T}_1$ 不趋于 0.

b）设 $G$ 是局部紧群，$(\mu_n)$ 与 $(\nu_n)$ 是 $G$ 上的两个有界实测度序列. 假定 $\mu_n$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_2$ 趋于 $\mu$ 而 $\nu_n$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_3$ 趋于 $\nu$（13.20问题 1 中的记号）. 试证序列 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_a$ 趋于 $\mu*\nu$.（注意，若 $f$, $g$ 是属于 $\mathscr{K}(G)$ 的两个函数，则函数 $(x,y)\rightarrow g(y)f(xy)$ 具有紧支集，并且能由函数 $u_i\otimes v_i$ 的线性组合一致逼近，其中 $u_i$, $v_i$ 属于 $\mathscr{K}(G)$.）给出一个例子，其中 $G=\boldsymbol{R}$, $\mu=\nu=0$，而序列 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 不趋于 0. 试证，若 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 0，且范数序列 $(\|\nu_n\|)$ 保持有界，则序列 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 趋于 0. 若 $\mu_n$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 $\mu$ 且 $\nu_n$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 $\nu$，试证 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 $\mu*\nu$（方法类似）.

c）使用同样的记号，试证，若 $\mu_n$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 趋于 $\mu$ 且 $\nu_n$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 趋于 $\nu$，则 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 趋于 $\mu*\nu$（利用 13.20 问题 2 与 Егоров 定理）.

d）取 $G=\boldsymbol{R}^2$，设 $a$, $b$ 是组成 $G$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的典则基的向量，$\rho_n$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内 $I=[0,\pi]$ 上的测度，它关于 Lebesgue 测度以函数 $\sin(1^n x)$ 为其密度，$\mu_n$ 是 $G$ 上的测度 $\rho_n\otimes\varepsilon_0$. 另一方面，设 $\nu_n$ 是 $G$ 上的测度 $\varepsilon_{b/2^n}-\varepsilon_0$，试证序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 趋于 0 且序列 $(\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 0，然而序列 $(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 不趋于 0.

5）设 $G$ 是紧群，$\mu$ 是 $G$ 上的正测度，其支集为 $G$，且 $\mu*\mu=\mu$. 首先证明 $\mu(G)=1$，然后证明 $\mu$ 是 $G$ 上的 Haar 测度.（设 $f\in\mathscr{C}_+(G)$；令 $g(x)=\int f(yx)d\mu(y)$，它在 $G$ 内连续. 证明 $g(x)=\int g(yx)d\mu(y)$，并通过考虑达到 $g$ 的上确界的点所成的集以推断 $g$ 是常数.）

6）a）设 $\mu$ 是局部紧群 $G$ 上的测度. 试证，为使 $\mu*\nu=\nu*\mu$ 对所有使得 $\mu*\nu$ 与 $\nu*\mu$ 有定义的测度 $\nu$ 成立，必须且只须对一切 $x\in G$，有 $\mu*\varepsilon_x=\varepsilon_x*\mu$.

b）假定 $G$ 是紧的，试证，对 $G$ 上任一测度 $\mu$，由

$$\mu^\natural(f)=\int f(xyx^{-1})d\mu(y)d\beta(x)$$

（这里 $\beta$ 是 $G$ 上的 Haar 测度）所定义的测度 $\mu^\natural$ 满足：对 $G$ 上的任一测度 $\nu$，有 $\mu^\natural*\nu=\nu*\mu^\natural$.

7) 设$G$是紧群，$\beta$是$G$上的 Haar 测度，满足$\beta(G)=1$，$\mu$是$G$上的正测度，满足$\mu(G)=1$且$\mu\geqslant c\beta$，其中$0<c<1$．试证$\|\mu^{*n}-\beta\|\leqslant 2^n(1-c)^n$，这里$\mu^{*n}$表示$n$个等于$\mu$的测度的卷积（利用(14.6.3)）．

8) 设$r$是满足$0<r\leqslant\frac{1}{2}$的数．对每个大于1的整数$n$，以$\rho_{n,r}$表示$\boldsymbol{R}$上的测度$(\varepsilon_{r^n}+\varepsilon_{-r^n})/2$，并令$\mu_{n,r}=\rho_{1,r}*\rho_{2,r}*\cdots*\rho_{n,r}$．

a) 试证序列$(\mu_{n,r})_{n\geqslant1}$粗疏收敛于$\boldsymbol{R}$上的一个测度$\mu_r$，其支集包含在$I=[-1,1]$内（证明对每个区间$U\subset\boldsymbol{R}$，序列$(\mu_{n,r}(U))$收敛）．

b) 试证对$r<\frac{1}{2}$，测度$\mu_r$与$\boldsymbol{R}$上的 Lebesgue 测度互相奇异，然而$\mu_{1/2}$是 Lebesgue 测度在$I$上诱导的测度．

c) 设$\nu_{1/4}$是$\mu_{1/4}$在$\boldsymbol{R}$上的相似变换$t\to2t$下的象，试证$\mu_{1/4}*\nu_{1/4}=\mu_{1/2}$，但是$\mu_{1/4}$与$\nu_{1/4}$都与 Lebesgue 测度互相奇异（利用问题 4b)）．

## 8. 测度与函数的卷积

以下我们总假设在$G$上固定了一个左 Haar 测度$\beta$．对$G$到$\bar{\boldsymbol{R}}$或$\boldsymbol{C}$的任一映射$f$与$p=1,2$或$+\infty$，我们假定$N_p(f)$总是关于测度$\beta$取的．

**(14.8.1)** 设$\mu$是$G$上的测度，$f$是局部$\beta$可积(13.13.1)(复值)函数，则为使测度$\mu$与$f\cdot\beta$是可卷积的，必须且只须存在$\beta$可忽略集$N$，使对每个$x\notin N$，函数$s\to f(s^{-1}x)$是$\mu$可积的，且关于$\beta$几乎处处有定义的函数

$$x\to\int|f(s^{-1}x)|d|\mu|(s)$$

是局部$\beta$可积的．当这个条件满足时，关于$\beta$几乎处处有定义的函数$g(x)=\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$是局部$\beta$可积的，且$\mu*(f\cdot\beta)$等于$g\cdot\beta$．

首先证明下面的引理：

**(14.8.1.1)** 测度$\mu\otimes\beta$在$G^2$到自身的同胚

$$(s,x)\to(s,s^{-1}x)$$

下的象是测度 $\mu\otimes\beta$.

可以限于考虑 $\mu\geqslant 0$的情形.此时,对每个函数$F\in\mathscr{K}_+(G^2)$,函数$(s,x)\to F(s,s^{-1}x)$属于$\mathscr{K}_+(G^2)$. 根据$\beta$的左不变性与 Lebesgue-Fubini 定理,有

$$\begin{aligned}\iint F(s,s^{-1}x)d\mu(s)d\beta(x) &= \int d\mu(s)\int F(s,s^{-1}x)d\beta(x)\\ &= \int d\mu(s)\int F(s,x)d\beta(x)\\ &= \iint F(s,x)d\mu(s)d\beta(x),\end{aligned}$$

这就证明了我们的断言.

现在假定 $\mu$ 与 $f\cdot\beta$ 是可卷积的; 由于 $|f\cdot\beta|=|f|\cdot\beta$ (13.13.4),故可以限于考虑 $\mu\geqslant 0$ 与 $f\geqslant 0$ 的情形. 由假定,对每个函数 $h\in\mathscr{K}_C(G)$, 函数 $(s,x)\to h(sx)f(x)$ 是 $\mu\otimes\beta$ 可积的 (13.21.16 与 13.14.3);因而根据(14.8.1.1),函数$(s,x)\to h(x)\times f(s^{-1}x)$ 也是$(\mu\otimes\beta)$可积的(13.7.10). 设 $A_h$ 是使得 $h(x)\neq 0$ 的 $x\in G$的集,则由 Lebesgue-Fubini 定理推出,在 $A_h$ 内存在 $\beta$ 可忽略集 $N_h$, 使对 $x\in A_h\cap\complement N_h$, 函数 $s\to f(s^{-1}x)$ 是 $\mu$ 可积的. 取属于 $\mathscr{K}_+(G)$ 的函数 $h$ 的序列,使得对应的集 $A_h$ 覆盖 $G$(4.5.2),于是首先得知, 除了属于一个 $\beta$ 可忽略集$N$的点 $x$ 外, 函数 $s\to f(s^{-1}x)$ 都是 $\mu$ 可积的. 又由 Lebesgue-Fubini 定理推出,关于 $\beta$ 几乎处处有定义的函数 $x\to h(x)\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$ 是 $\beta$ 可积的, 且有

$$\iint h(sx)f(x)d\mu(s)d\beta(x)=\int h(x)d\beta(x)\int f(s^{-1}x)d\mu(s).$$

这就证明了所述条件的必要性与 $\mu*(f\cdot\beta)=g\cdot\beta$(13.13.1).

反之,假定所述条件得到满足,则问题归结为证明, 对每个函数 $h\in\mathscr{K}_+(G)$, 函数

$$(s,x)\to h(sx)f(x)$$

是$(\mu\otimes\beta)$可积的; 而由于 $h$ 连续, 上述函数是 $(\mu\otimes\beta)$ 可测的 (13.21.13),因此只须证明

$$\iint^* h(sx)f(x)d\mu(s)d\beta(x) < +\infty.$$

然而根据引理 (14.8.1.1)，这等价于关系

$$\iint^* h(x)f(s^{-1}x)d\mu(s)d\beta(x) < +\infty,$$

又由于 (13.21.10)，也等价于

$$\int^* h(x)d\beta(x)\int^* f(s^{-1}x)d\mu(s) < +\infty;$$

而这个关系可由所作的假定得到 (13.13.1).

当 (14.8.1) 的条件满足时，我们也称**测度 $\mu$ 与函数 $f$ 是可卷积的**；任一(关于 $\beta$) 几乎处处等于上述函数 $g$ 的函数，在用语随便时，称为 $\mu$ 与 $f$ 的**卷积**，记作 $\mu*f$ (如果可能混淆，就记作 $\mu*^{\beta}f$). 关于 $\beta$ 几乎处处有

(14.8.2) $$(\mu*f)(x) = \int f(s^{-1}x)d\mu(s).$$

当几乎处处等于 $g$ 的函数中有一个在 $G$ 内连续时，由于 $\beta$ 的支集等于 $G$，所以这是具有所述性质的唯一函数. 我们就把这个函数记作 $\mu*f$. 于是特别有

(14.8.3) $$(\mu*f)(e) = \int f(s^{-1})d\mu(s).$$

同样以 $f\cdot\beta$ 与 $\mu$ 可卷积来定义 $f$ 与 $\mu$ 的可卷积性. 为使 $f$ 与 $\mu$ 是可卷积的，必须且只须对几乎所有(关于 $\beta$ 而言) $x$，函数 $s\to f(xs^{-1})\Delta(s^{-1})$ 是 $\mu$ 可积的，并且函数

$$x\to\int |f(xs^{-1})\Delta(s^{-1})|d|\mu|(s)$$

是局部 $\beta$ 可积的；此时测度 $(f\cdot\beta)*\mu$ 关于 $\beta$ 具有密度，我们以 $f*\mu$ 表示任何一个这样的密度，因而关于 $\beta$ 几乎处处有

(14.8.4) $$(f*\mu)(x) = \int f(xs^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s).$$

特别是，对每个 $x\in G$ 与每个局部 $\beta$ 可积函数 $f$，卷积 $\varepsilon_x*f$ 与 $f*\varepsilon_x$ 有定义且(连同上面所作的约定)由公式

(14.8.5) $(\varepsilon_x*f)(y) = f(x^{-1}y)$, $(f*\varepsilon_x)(y) = f(yx^{-1})\Delta(x^{-1})$

给出.

## 9. 测度与函数的卷积的例

一般地说，在寻求使得$G$上的测度$\mu$与函数$f$为可卷积的便于使用的条件时，加在一个因子上的限制条件愈多，则加在另一个因子上的条件愈少. 再者，函数$\mu*f$一般至少具有$f$所具有的正则性（对于 Lie 群$G$，我们将在第十七章中在更一般的背景下获得卷积的这些特征）.

**(14.9.1)** 具有紧支集的测度$\mu$与任一局部$\beta$可积函数$f$是可卷积的. 进而若$f$还连续(相应地，连续且具有紧支集)，则(14.8.2)右边的积分对一切$x\in G$有定义，并且函数$x\to(\mu*f)(x)=\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$为连续(相应地，连续且具有紧支集).

第一个断言是(14.6.4)的殊特情形，而$s\to f(s^{-1}x)$为$\mu$可积是(13.19.3)的推论；当$f$连续时$\mu*f$的连续性由(14.1.5.5)得到；最后，当$f$具有紧支集时$\mu*f$也具有紧支集是(14.5.4)的特殊情形.

**(14.9.2)** 设$\mu$是$G$上的有界测度.

(i) 对于$p$等于1,2 或$+\infty$，$\mu$与任一函数$f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{p}(G,\beta)$都是可卷积的；此时函数$\mu*f$(由(14.8.2)，它几乎处处有定义)属于$\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{p}(G,\beta)$，且有

**(14.9.2.1)** $$N_p(\mu*f)\leqslant\|\mu\|\cdot N_p(f).$$

(ii) 若$f$是连续且有界的，则(14.8.2)右边的积分对一切$x\in G$都有定义，且函数$x\to\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$在$G$上连续并有界.

(iii) 若$f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{0}(G)$(13.20.5)，则$\mu*f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{0}(G)$.

关于论断(i)，由(14.8.1.1)推出函数$(s,x)\to f(s^{-1}x)$是$(\mu\otimes\beta)$可测的；此外，对于$p=1$，测度$f\cdot\beta$有界(13.14.4)，因而$\mu$与$f$是可卷积的(14.6.2)，且$\|\mu*(f\cdot\beta)\|\leqslant\|\mu\|\cdot N_1(f)$；然而

$\|\mu*(f\cdot\beta)\| = N_1(\mu*f)$，故此时 (14.9.2.1) 成立． 对于 $p=2$，由 (13.11.2.2)，对任一函数 $h\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，有

$$\left(\iint^* |h(x)f(s^{-1}x)|d|\mu|(s)d\beta(x)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\iint^* |h(x)|^2 d\beta(x)d|\mu|(s)\right)\cdot\left(\iint^*|f(s^{-1}x)|^2 d\beta(x)d|\mu|(s)\right),$$

且根据 (13.21.9) 与 $\beta$ 的左不变性，有

$$\iint^* |f(s^{-1}x)|^2 d\beta(x)d|\mu|(s)=\int^* d|\mu|(s)\int^* |f(s^{-1}x)|^2 d\beta(x)$$
$$=\|\mu\|(N_2(f))^2,$$

由此可见 $\mu$ 与 $f\cdot\beta$ 是可卷积的．再由 (13.11.2.2)，有

$$\left(\int^* |f(s^{-1}x)|d|\mu|(s)\right)^2\leqslant\|\mu\|\cdot\int^* |f(s^{-1}x)|^2 d|\mu|(s),$$

根据上面的关系式与 (13.21.9)，便得

$$\int^* d\beta(x)\left(\int^* |f(s^{-1}x)|d|\mu|(s)\right)^2\leqslant\|\mu\|^2\cdot(N_2(f))^2,$$

因而证明了 (14.9.2.1) 在这种情形下成立．最后，对于 $p=+\infty$，注意到由 (14.6.3)，$\mu$ 与函数 1 是可卷积的，并且 $\mu*1$ 等于常数 $\mu(1)$． 由此立即推出 $\mu$ 与属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(G,\beta)$ 的任一函数可卷积而且不等式 (14.9.2.1)仍然成立(参阅 (14.5.3))．

关于 (ii)，积分 $\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$ 对一切 $x\in G$ 均存在这一事实由 (13.20.4) 得到．为证明 $\mu*f$ 在点 $x_0\in G$ 处连续，可以限于考虑 $\mu\geqslant0$的情形．对每个 $\varepsilon>0$，存在$G$的紧子集 $K$，使得 $\mu(\complement K)\leqslant\varepsilon$；另一方面，设 $V_0$ 是 $x_0$ 的一个紧邻域；$f$ 在紧集 $K^{-1}V_0$ 上一致连续，因而在$G$内存在 $x_0$ 的邻域 $V\subset V_0$，使得关系 $x\in V$ 蕴涵

$$|f(s^{-1}x)-f(s^{-1}x_0)|\leqslant\varepsilon/\mu(K)$$

对一切 $s\in K$ 成立 (3.16.5)．由此得知，对一切 $x\in V$，有

$$\left|\int f(s^{-1}x)\,d\mu(s)-\int f(s^{-1}x_0)d\mu(s)\right|$$
$$\leqslant 2\|f\|\mu(\complement K)+\int_K\frac{\varepsilon}{\mu(K)}d\mu(s)\leqslant\varepsilon(1+2\|f\|),$$

断言 (ii) 得证.

对于 (iii), 仍可假定 $\mu \geqslant 0$. 于是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $G$ 的紧子集 $H$, 使对 $x \notin H$, 有 $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. 如 (ii) 的证明中那样取 $K$, 并假定 $x \notin KH$. 若 $s \in K$, 则 $s^{-1}x \notin H$, 从而

$$\left|\int f(s^{-1}x)d\mu(s)\right| \leqslant \left|\int_{G-K} f(s^{-1}x)d\mu(s)\right| + \left|\int_K f(s^{-1}x)d\mu(s)\right|$$
$$\leqslant \|f\| \cdot \mu(\complement K) + \varepsilon \cdot \mu(K) \leqslant \varepsilon(\|f\| + \|\mu\|),$$

这表明 $\mu * f \in \mathscr{C}_C^0(G)$.

**(14.9.3)** $G$ 上任一测度 $\mu$ 与任一函数 $f \in \mathscr{K}_C(G)$ 是可卷积的; (14.8.2) 右边的积分对一切 $x \in G$ 有定义, 且函数 $x \to \int f(s^{-1}x) d\mu(s)$ 在 $G$ 内连续.

由于测度 $f \cdot \beta$ 具有紧支集, 所以 $\mu$ 与 $f \cdot \beta$ 是可卷积的 (14.6.4). 显见积分 $\int f(s^{-1}x)d\mu(s)$ 对一切 $x \in G$ 有定义; 函数 $x \to \int f(s^{-1}x)d\mu(s)$ 的连续性由 (14.1.5.5) 得到.

我们让读者来表述关于卷积 $f * \mu$ 的相应命题. 要特别注意, (14.9.2) 以及关于卷积 $f * \mu$ 与 (14.9.2) 类似的命题表明, 若 $G$ 是幺模的 (14.3), 则 $\mathscr{L}_C^p(G)$ 是代数 $M_C^1(G)$ 上的右模与左模, 且由 (14.7.2), 这两个模结构的外合成律是可置换的.

**(14.9.4)** 设 $\mu, \nu$ 是 $G$ 上的两个测度, $f$ 是属于 $\mathscr{K}_C(G)$ 的函数, 并假定 $\check{\mu}$ 与 $\nu$ 是可卷积的, 则函数 $\mu * f$ 是 $\nu$ 可积的, 且有

**(14.9.4.1)** $$\langle f, \check{\mu} * \nu \rangle = \langle \mu * f, \nu \rangle.$$

同样地, 若 $\mu$ 与 $\nu$ 有界且 $f \in \mathscr{C}_C^\infty(G)$, 则函数 $\mu * f$ 是连续且有界的(因而是 $\nu$ 可积的), 而且关系式 (14.9.4.1) 成立.

事实上, 所作的假设蕴涵函数 $(s, x) \to f(s^{-1}x)$ 是 $\mu \otimes \nu$ 可积的, 因而所述命题可由 Lebesgue–Fubini 定理得到.

## 问　　题

1) 设 $G$ 是局部紧群, $\mu$ 是 $G$ 上的非零有界正测度, 满足 $\mu * \mu = \mu$.

a) 试证 $S = \mathrm{Supp}(\mu)$ 是紧的（若 $f \in \mathscr{K}_+(G)$ 不恒等于零，注意 $\mu * f$ 在 $S$ 上必为常数并利用（14.9.2,(iii))).

b) 试证 $S$ 是 $G$ 的紧子群，$\mu$ 是 $S$ 上满足 $\mu(S) = 1$ 的 Haar 测度（利用 a)，12.9 问题 2 与 14.7 问题 5).

2) a) 利用 Hölder 不等式（13.11 问题 12)把（14.9.2,(i)）推广到 $1 < p < +\infty$ 的情形.

b) 设 $\mu$ 是 $G$ 上的有界测度，则 $L^1(G, \beta)$ 上由 $f \to \mu * f$ 诱导的连续自同态的范数(14.9.2)等于 $\|\mu\|$.（设 $(f_n)$ 是满足（14.11.1）中所述性质的序列，如果所考虑的自同态的范数是 $\|\mu\| - \alpha$，其中 $\alpha > 0$，就会有 $N_1(\mu * f_n * g) \leqslant (\|\mu\| - \alpha) N_1(f_n * g) \leqslant (\|\mu\| - \alpha) N_1(g)$；由此推断

$$N_\infty(\mu * f_n) \leqslant \|\mu\| - \alpha;$$

令 $n \to \infty$，从而得出矛盾.）

c) 作与 b) 相同的假定，试证 $L^\infty(G, \beta)$ 上由 $f \to \mu * f$ 诱导的连续自同态的范数等于 $\|\mu\|$（归结为 $\mu$ 具有紧支集且 $\mu$ 关于 $|\mu|$ 具有连续密度的情形).

d) 假定 $G$ 是紧的，$\mu$ 是正的，试证对于 $1 < p < +\infty$，$L^p(G, \beta)$ 上由 $f \to \mu * f$ 诱导的连续自同态的范数等于 $\|\mu\|$.

e) 取 $G$ 为 3 阶循环群，给出 $G$ 上的测度 $\mu$ 的例子，使得 $L^2(G, \beta)$ 上由 $f \to \mu * f$ 诱导的自同态的范数严格地小于 $\|\mu\|$.

3) a) 设 $\mu$ 是 $G$ 上的有界测度，试证，为使

$$N_1(\mu * f) = N_1(f)$$

对任一函数 $f \in \mathscr{L}^1(G, \beta)$ 成立，必须且只须 $\mu$ 具有 $c \cdot \varepsilon_s$ 的形式，其中 $|c| = 1$.（利用问题 2b)证明，对任一函数 $f \in \mathscr{K}(G)$，必有 $\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d|\mu|$；由此先推断 $\mu = c|\mu|$，其中 $c$ 是满足 $|c| = 1$ 的常数，然后证明 $\mu$ 是点测度.）

b) 取 $G$ 为 3 阶循环群，给出 $G$ 上的测度 $\mu$ 的例子，使得 $\mu$ 不是点测度，而对任一定义在 $G$ 上的实值函数 $f$，有 $N_2(\mu * f) = N_2(f)$.

4) 设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，又设 $f$ 是 $G$ 上的有界实值函数，它关于 $G$ 上的一个左不变距离是一致连续的. 试证对 $G$ 上的任一有界测度 $\mu$，（关于 $\beta$ 的）$\mu * f$ 关于 $G$ 上的一个左不变距离是一致连续的.

5) 设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是其左 Haar 测度.

a) 采用 13.20 问题 1 的记号，设 $(\mu_n)$ 是 $G$ 上的有界测度序列，它关于 $\mathscr{T}_s$ 收敛于 $\mu$，又 $(f_n)$ 是属于 $\mathscr{L}^1(G, \beta)$ 的函数序列，使得有界测度序列 $(f_n \cdot \beta)$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 收敛于 $f \cdot \beta$. 试证有界测度序列 $(\mu_n * (f_n \cdot \beta))$ 关于 $\mathscr{T}_6$ 收敛于 $\mu *$

$(f\cdot\beta)$比较 14.7 问题 4d))(利用 13.20 问题 1 与 2).

b) 以 $E_{s/2}$ 表示$G$上关于$G$的左不变距离为一致连续的有界实值函数所成的空间，以 $\mathscr{T}_{s/2}$ 表示$M_R^1(G)$上对应于向量空间 $E_{s/2}$ 的弱拓扑；$\mathscr{T}_{s/2}$ 精于 $\mathscr{T}_s$ 而粗于 $\mathscr{T}_3$. 给出关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 趋于 0 的序列 $(\mu_n)$ 与属于 $\mathscr{L}^1(G,\beta)$ 的函数的序列 $(f_n)$ 的例子，使得序列 $(f_n\cdot\beta)$ 关于 $\mathscr{T}_s$ 趋于0，然而序列 $(\mu_n*(f_n\cdot\beta))$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 不趋于 0(取 $G=\boldsymbol{R}$, $f_n(t)$ 为：在区间 $[0,\pi]$ 上，$f_n(t)=\sin nt$，而对其余的 $t$, $f_n(t)=0$).

c) 设 $(\mu_n)$ 是$G$上的有界测度的一个序列，它关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 趋于 $\mu$, $(f_n)$是属于 $\mathscr{L}^1(G,\beta)$ 的函数的一个序列，使对函数 $f\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$, $N_1(f-f_n)$ 趋于 0. 试证 $N_1(\mu_n*f_n-\mu*f)$ 趋于 0. (归结为 $\mu=0$ 与对一切 $n$ 均有 $f_n=f$ 的情形，然后归结为 $f\in\mathscr{K}(G)$ 的情形. 注意若 $g$ 是$G$上的有界连续函数，则函数 $f*g$ 关于$G$上的一个左不变距离是一致连续的，由此证明序列 $(\mu_n*(f\cdot\beta))$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 趋于 0. )试证当以 $\mathscr{T}_2$ 代替 $\mathscr{T}_{s/2}$ 时，所述结论不再成立.

d) 设 $(\mu_n)$ 是$G$上的有界测度的一个序列，它关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 趋于 0, $(\nu_n)$是$G$上的有界测度的一个序列，它关于 $\mathscr{T}_2$ 趋于 $\nu$，试证序列$(\mu_n*\nu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 趋于0. (利用(14.11.1)，归结为证明：若 $f\in\mathscr{K}(G)$, $g$ 关于一个左不变距离是一致连续的，则 $\langle f*g,\mu_n*\nu_n\rangle$ 趋于 0；然后利用 c).)

6) 采用问题 5 的记号.

a) 设 $(\mu_n)$ 是$G$上的有界测度的一个序列，假定对任一函数 $f\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$，序列 $(\mu_n*(f\cdot\beta))$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 收敛于0，试证范数序列 $(\|\mu_n\|)$ 有界 (把 Banach–Steinhaus 定理应用于由 $L^1(G,\beta)$ 到自身的映射 $\tilde{f}\to(\mu_n*f)^{\sim}$ 组成的序列，然后应用问题 2b)). 由此推断序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_2$ 趋于 0.

b) 假定对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$，序列 $(\mu_n*(f\cdot\beta))$ 粗疏收敛于 0，试证序列 $(\mu_n)$ 粗疏收敛于 0 (对$G$的任一紧子集 $K$，用如同 a)的推理证明序列 $(|\mu_n|(K))$ 有界). 给出序列 $(\|\mu_n\|)$ 无界的例子(取 $G=\boldsymbol{Z}$).

c) 假定对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$，序列 $(\mu_n*(f\cdot\beta))$ 关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 收敛于 0，试证 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_{s/2}$ 趋于 0(利用 a)). 给出这样的例子：对每个函数 $f\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$, $N_1(\mu_n*f)$ 趋于 0，然而序列 $(\mu_n)$ 关于 $\mathscr{T}_3$ 却不趋于 0.

## 10. 两个函数的卷积

**(14.10.1)** 设 $f$, $g$ 是$G$上的两个局部 $\beta$ 可积(复值)函数，则为使

测度 $f\cdot\beta$ 与 $g\cdot\beta$ 是可卷积的，必须且只须存在 $\beta$ 可忽略集 $N$，使对一切 $x\notin N$，函数 $s\to g(s^{-1}x)f(s)$ 是 $\beta$ 可积的，并且（关于 $\beta$ 几乎处处有定义的）函数 $x\to\int|g(s^{-1}x)f(s)|d\beta(s)$ 是局部 $\beta$ 可积的。当这些条件满足时，关于 $\beta$ 几乎处处有定义的函数 $h(x)=\int g(s^{-1}x)\times f(s)d\beta(s)$ 是局部 $\beta$ 可积的，并且 $(f\cdot\beta)*(g\cdot\beta)$ 等于 $h\cdot\beta$.

这是把 (14.8.1) 应用到 $\mu=f\cdot\beta$ 与 $g\cdot\beta$ 上的特殊情形.

当 (14.10.1) 中的条件得到满足时，我们称 $f$ 与 $g$ 是（关于 $\beta$）**可卷积的**；任一（关于 $\beta$）几乎处处等于上述 $h$ 的函数称为 $f$ 与 $g$（关于 $\beta$）的**卷积**，记作 $f*g$（如果可能混淆，就记作 $f*^{\beta}g$）. 于是，关于 $\beta$ 几乎处处有

**(14.10.2)** $$(f*g)(x)=\int g(s^{-1}x)f(s)d\beta(s);$$

同样地，利用 (14.8.4) 得知，关于 $\beta$ 几乎处处有

**(14.10.3)** $$(f*g)(x)=\int f(xs^{-1})g(s)\Delta_G(s^{-1})d\beta(s).$$

当几乎处处等于 $h$ 的函数中有一个在 $G$ 上连续时，我们也采用类似于 (14.8) 中所述的约定.

当 $f*g$ 为连续时，特别有

**(14.10.4)** $$(f*g)(e)=\int f(s)g(s^{-1})d\beta(s).$$

应当注意，$f$ 与 $g$ 为可卷积这一事实不依赖于左 Haar 测度 $\beta$ 的选取，但 $f*^{\beta}g$ 却依赖于 $\beta$ 的选取. 若 $\beta$ 代之以 $a\beta(a>0)$，则 $f*^{a\beta}g=a\cdot f*^{\beta}g$.

当 $G$ 为离散时，$f$ 与 $g$ 可卷积意味着对任一 $x\in G$，族 $(g(s^{-1}x)f(s))_{s\in G}$ 是绝对可和的 (5.3.3)，并且有 $(f*g)(x)=\sum_{s\in G}g(s^{-1}x)f(s)$（取 $G$ 上的 Haar 测度 $\beta$，使得 $\beta(\{e\})=1$）.

(14.9) 的结果在这里特别给出：

**(14.10.5)** 假定 $f$ 与 $g$ 是局部 $\beta$ 可积的. 如果函数 $f,g$ 中有一连续，且 $f,g$ 中有一具有紧支集，则 $f$ 与 $g$ 是可卷积的，(14.10.2) 与

(14.10.3) 的右边对一切 $x \in G$ 有定义，并且函数 $f*g$ 连续．如果 $f$ 与 $g$ 都属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，则 $f*g$ 也属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$．

这从 (14.9.1) 与 (14.9.3) 得到．

**(14.10.6)** 设 $f$ 是 $\beta$ 可积函数．

(i) 对于 $p=1, 2$ 或 $+\infty$，$f$ 同任一函数 $g \in \mathscr{L}_{C}^{p}(G, \beta)$ 是可卷积的，函数 $f*g$ 属于 $\mathscr{L}_{C}^{p}(G, \beta)$，且有

**(14.10.6.1)** $$N_p(f*g) \leqslant N_1(f)N_p(g).$$

(ii) 当 $p=+\infty$，$g \in \mathscr{L}_{C}^{p}(G, \beta)$ 时，积分

$$\int g(s^{-1}x)f(s)d\beta(s) = \int f(xs^{-1})g(s)\Delta(s^{-1})d\beta(s)$$

对一切 $x \in G$ 有定义，并且函数 $x \to \int f(xs^{-1})g(s)\Delta(s^{-1})d\beta(s)$

对于 $G$ 上的每个右不变距离是一致连续的．

(iii) 若 $p=1$，则有

**(14.10.6.2)** $$\int (f*g)(x)d\beta(x) = \left(\int f(s)d\beta(s)\right)\left(\int g(s)d\beta(s)\right).$$

(iv) 若 $g \in \mathscr{C}_{C}^{0}(G)$，则还有 $f*g \in \mathscr{C}_{C}^{0}(G)$．

断言 (i) 与 (iv) 由 (14.9.2) 与关系式

$$\|f \cdot \beta\| = N_1(f)$$

(13.20.3)得到．为证明 (14.10.6.2)，根据 (14.8.1.1) 与函数$(s, x) \to g(x)f(s)$ 为 $\beta \otimes \beta$ 可积 (13.21.14) 得知，$(s, x) \to g(s^{-1}x)f(s)$ 同样为 $\beta \otimes \beta$ 可积；于是公式 (14.10.6.2) 可从 Lebesgue-Fubini 定理与 $\beta$ 的左不变性直接推出．

为证明(ii)，注意对每个 $x \in G$，函数 $s \to g(s^{-1}x)$属于 $\mathscr{L}_{C}^{\infty}(G)$，因而(14.10.2)右边的积分对一切 $x \in G$ 都有定义．若令 $\nu = \Delta^{-1} \cdot \beta$，则 $\nu$ 是右 Haar 测度 (14.3.4)，且可把 (14.10.3)写成

$$(f*g)(x) = \int f(xs^{-1})g(s)d\nu(s)$$

的形式．因而

$$|(f*g)(x) - (f*g)(x')| \leqslant N_\infty(g)\int |f(xs^{-1}) - f(x's^{-1})|d\nu(s)$$

$$= N_\infty(g)\int |f(s^{-1})-f(x'x^{-1}s^{-1})|d\nu(s).$$

于是所述结论由下面的更一般的引理得到：

**(14.10.6.3)** 对于 $p=1$ 或 $p=2$，设 $\nu$ 是 $G$ 上的任一右 Haar 测度，$h$ 是属于 $\mathscr{L}^p_C(G,\nu)$ 的任一函数，则 $G$ 到 $\mathscr{L}^p_C(G,\nu)$ 的映射 $s\to\delta(s)h$ 连续，并且 $N_p(\delta(s)h)=N_p(h)$。

第二个论断是 $\nu$ 的右不变性的直接推论．为证明第一个断言，先假定 $h\in\mathscr{K}_C(G)$，此时 $s\to\delta(s)h$ 的连续性由 (14.1.5.5) 得到．在一般情形，若 $(h_n)$ 是属于 $\mathscr{K}_C(G)$ 的函数的序列，它收敛于 $\mathscr{L}^p_C(G,\beta)$ 中的 $h$(13.11.6)，则关系式 $N_p(\delta(s)h-\delta(s)h_n)=N_p(h-h_n)$ 表明函数 $s\to\delta(s)h_n$ 所成的序列在 $G$ 上一致收敛于函数 $s\to\delta(s)h$，由此即得所需的结论 (7.2.1)。

**(14.10.6.4)** 用同样的方法可见，若 $h\in\mathscr{L}^p_C(G,\beta)$，且 $p=1$ 或 $p=2$，则 $G$ 到 $\mathscr{L}^p_C(G,\beta)$的映射 $s\to\gamma(s)h$ 连续，并且 $N_p(\gamma(s)h($ $=N_p(h)$。

**(14.10.7)** 设 $f$ 是属于 $\mathscr{L}^2_C(G,\beta)$ 的函数，$g$ 是属于 $\mathscr{L}^2_C(G,\check{\beta})$ 的函数，则积分 $\int g(s^{-1}x)f(s)d\beta(s)$ 对一切 $x\in G$ 有定义，函数 $f*g$ 属于 $\mathscr{L}^0_C(G)$，并且

**(14.10.7.1)** $$\|f*g\|\leqslant N_2(f)N_2(\check{g}).$$

对每个 $x\in G$，函数 $s\to g(s^{-1}x)$ 属于 $\mathscr{L}^2_C(G,\beta)$，因而第一个论断由 (13.11.7) 得到．再者，由 (13.11.7)推出

$$\int|g(s^{-1}x)f(s)|d\beta(s)\leqslant\left(\int|f(s)|^2d\beta(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|g(s^{-1}x)|^2d\beta(s)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=N_2(f)\left(\int|\check{g}(x^{-1}s)|^2d\beta(s)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=N_2(f)N_2(\check{g}),$$

此即关系式 (14.10.7.1)．若 $f$ 与 $g$ 都属于 $\mathscr{K}_C(G)$，则 $f*g$ 也属于 $\mathscr{K}_C(G)$；由于关系式 (14.10.7.1) 表明 $\mathscr{L}^2_C(G,\beta)\times\mathscr{L}^2_C(G,\check{\beta})$ 到 $\mathscr{B}_C(G)$ 的双线性映射 $(f,g)\to f*g$ 连续 (5.5.1)，并且由于 $\mathscr{K}_C(G)$ 在 $\mathscr{L}^2_C(G,\beta)$ 与 $\mathscr{L}^C_2(G,\check{\beta})$ 内稠密 (13.11.6)，故映

射 $(f, g)\to f*g$ 的值属于 $\mathscr{K}_C(G)$ 在 $\mathscr{B}_C(G)$内的闭包(3.11.4)，换言之，属于 $\mathscr{C}_C^0(G)$ (13.20.5).

命题 (14.10.7) 导致下述推论：

**(14.10.8)** 设$A$与$B$是$G$内的两个$\beta$可积集，则函数 $x\to\beta(A\cap xB)$ 在$G$内连续且在无穷远处趋于0 (13.20.6). 若 $B^{-1}$ 也是$\beta$可积集，则函数 $x\to\beta(A\cap xB)$ 是$\beta$可积的，且有$\int\beta(A\cap xB)d\beta(x)=\beta(A)\beta(B^{-1})$. 如果此外$A$与$B$都不是$\beta$可忽略的，则集 $AB^{-1}$具有非空的内部. 最后，对于每个$\beta$可测且非$\beta$可忽略的子集$A$，$AA^{-1}$是幺元$e$的一个邻域.

事实上，我们有 $\varphi_A\in\mathscr{L}^2(G,\beta)$，$\varphi_B\in\mathscr{L}^2(G,\beta)$ 因而可把(14.10.7)用到 $f=\varphi_A$ 与 $g=\check{\varphi}_B$ 上. 由于 $\check{\varphi}_B(s^{-1}x)=\varphi_B(x^{-1}s)=\varphi_{xB}(s)$，故 $(\varphi_A*\check{\varphi}_B)(x)=\int\varphi_{A\cap xB}(s)d\beta(s)=\beta(A\cap xB)$，这证明了第一个断言. 若 $B^{-1}$ 也$\beta$可积，则注意到$\varphi_A$与$\varphi_{B^{-1}}$都属于 $\mathscr{L}^1(G,\beta)$，应用(14.10.6.2)就给出公式 $\int\beta(A\cap xB)d\beta(x)=\beta(A)\beta(B^{-1})$. 如果此式右边不等于零，就可推出$\beta(A\cap xB)$不恒等于零，因而存在非空开集$U$，使在$U$内连续函数 $\beta(A\cap xB)>0$，而这就推出 $U\subset AB^{-1}$. 为证明最后一个论断，我们注意，存在非$\beta$可忽略的紧集 $K\subset A$，因而只须假定$A$为紧集. 此时 $\beta(A)=(\varphi_A*\check{\varphi}_A)(e)>0$，由上可见，存在$e$的一个邻域，它包含在 $AA^{-1}$内.

**(14.10.9)** 设$f$是局部$\beta$可积函数，$\mu$是$G$上的测度，$g$是属于 $\mathscr{L}_C^1(G,\beta)$ 的函数. 若 $\check{\mu}$ 与 $g$ 是可卷积的，则 $f$ 与 $\check{g}$ 是可卷积的，函数 $f*\check{g}$ 是$\mu$可积的，且

**(14.10.9.1)** $$\langle g,\check{\mu}*(f\cdot\beta)\rangle=\langle f*\check{g},\mu\rangle.$$

事实上，由(14.8.1)，(14.8.1.1)与(13.21.14)，函数 $(s,x)\to g(x)f(s^{-1}x)$ 是 $(\check{\mu}\otimes\beta)$ 可积的，因而函数

$$(s,x)\to g(x)f(sx)$$

是 $(\mu\otimes\beta)$ 可积的；把 Lebesgue-Fubini 定理用到二重积分

$\iint g(x)f(sx)d\mu(s)d\beta(x)$ 上，且由 $\beta$ 的左不变性，即得所需的结论。

## 问　　题

1) a) 设 $g$ 是 $G$ 上的 $\beta$ 可测函数且具有紧支集. 试证，在下面两种情形下，$f$ 与 $g$ 是可卷积的并且卷积 $f*g$ 在 $G$ 内连续:

1° $g$ 为本性有界，$f$ 为局部 $\beta$ 可积;

2° $g$ 属于 $\mathscr{L}_C^2(G,\beta)$，$f$ 为 $\beta$ 可测，且 $f^2$ 为局部 $\beta$ 可积.

b) 假定 $G$ 是幺模的. 试证，若 $f\in\mathscr{L}_C^q(G,\beta)$，$g\in\mathscr{L}_C^p(G,\beta)$，且 $p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$，则 $f$ 与 $g$ 是可卷积的，$f*g$ 属于 $\mathscr{L}_C^r(G,\beta)$，并且 $N_r(f*g)\leqslant N_q(f)N_p(g)$，其中 $r$ 满足 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ (**W. Young 不等式**). (先考虑 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的情形，然后利用 (14.10.6.1) 与 Riesz-Thorin 定理 (13.17 问题 7).)

2) 设 $G$ 是紧群，$\beta$ 是 $G$ 上满足 $\beta(G)=1$ 的 Haar 测度，$A$ 与 $B$ 是两个 $\beta$ 可积集. 试证对每个 $\varepsilon>0$，存在 $x\in G$，使得 $\beta(A\cap xB)\leqslant(1+\varepsilon)\beta(A)\beta(B)$. 由此推断，对每个满足 $\beta(A)\geqslant 1/n$ 的整数 $n$，存在 $G$ 的 $n$ 个点 $x_1,\cdots,x_n$，使得 $\beta(x_1A\cup x_2A\cup\cdots\cup x_nA)\geqslant 1/2$ (考虑集 $x_j\complement A(1\leqslant j\leqslant n)$).

3) 设 $G$ 是交换紧群，$\beta$ 是 $G$ 上满足 $\beta(G)=1$ 的 Haar 测度，$g$ 是 $G$ 上的 $\beta$ 可测实值函数; 又设 $(r_n)$ 是 Rademacher 正规正交函数系 (13.21 问题 10). 设 $\alpha>0$，而 $A$ 是使得 $|g(x)|>\alpha$ 的 $x\in X$ 所成的集.

设 $n$ 是满足 $n\cdot\beta(A)\geqslant 1$ 的正整数，试证存在 $\beta$ 可测集 $B$，使得 $\beta(B)\geqslant\frac{1}{2}$，且存在 $G$ 内的 $n$ 个点 $s_1,\cdots,s_n$，使得若 $F(x,t)=\sum_{k=1}^{n}r_k(t)g(s_kx)$，则有下述性质: 对于每个 $x\in B$，存在 $[0,1]$ 内有限个区间的并 $I(x)$，满足: 1° $\lambda(I(x))\geqslant\frac{1}{2}$ ($\lambda$ 是 Lebesgue 测度); 2° 对一切 $t\in I(x)$，有 $|F(x,t)|>\alpha$. (利用问题 2，另一方面注意，由于关系式 $r_n(1-t)=-r_n(t)$，因而对某个整数 $h\in[1,n]$，使得数 $r_h(t)g(s_hx)$ 与 $\sum_{k\neq h}r_k(t)g(s_kx)$ 同号的 $t\in[0,1]$ 的集具有不小于 1/2 的测度.)

4) 设 $G$ 是交换紧群，$\beta$ 是 $G$ 上满足 $\beta(G)=1$ 的 Haar 测度. 设 $(U_n)$ 是 $L_R^1(G,\beta)$ 的连续自同态的一个序列，其中每个 $U_n$ 与所有平移 $\tilde f\mapsto(\gamma(s)f)^\sim$

$(s\in G)$ 可交换. 对每个函数 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(G,\beta)$, 以 $U_n\cdot f$ 表示类 $U_n\cdot\tilde{f}$ 中的一个函数,并令 $U^*\cdot f=\sup_n U_n\cdot f$; 对每个 $\alpha>0$,设 $E_\alpha(f)$ 是使得 $(U^*\cdot f)(x)>\alpha$ 的 $x\in G$ 所成的集.

a) 设 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(G,\beta)$,且 $N_2(f)\leqslant 1$, $n$ 是满足 $n\cdot\beta(E_\alpha(f))>1$ 的一个整数. 设 $s_1,\cdots,s_n$ 是 $G$ 的点, 使得 $s_j^{-1}E_\alpha(f)(1\leqslant j\leqslant n)$ 的并 $B$ 具有测度 $\beta(B)\geqslant\frac{1}{2}$ (问题 2),设 $F(x,t)=\sum_{k=1}^{n}r_k(t)f(s_kx)$. 试证,对每个 $x\in B$, 存在有限个区间的并 $I(x)\subset[0,1]$, 使得 $\lambda(I(x))\geqslant\frac{1}{2}$, 并且对一切 $t\in I(x)$, 有 $x\in E_\alpha(F(\cdot,t))$. (注意若 $x\in B$, 则存在整数 $m$ 与整数 $j\in[1,n]$,使得 $(U_m\cdot f)(s_jx)>\alpha$, 并把问题 3 应用到 $g=U_m\cdot f$ 上. )

b) 设 $S\subset[0,1]$是 $\lambda$ 可积集,$\lambda(S)\geqslant 3/4$. 试证存在 $t\in S$,使得$\beta(E_\alpha(F(\cdot,t)))>1/8$. (若 $H$ 是使得 $(U^*\cdot F(\cdot,t))(x)>\alpha$ 的$(x,t)\in X\times[0,1]$所成的集,注意对一切 $x\in B$ 有 $\lambda(H(x))\geqslant 1/4$, 并由此推断 $(\beta\otimes\lambda)(H)>1/8$.)

c) 对每个 $M>0$, 设 $S_M$ 是使得 $N_2(F(\cdot,t))\leqslant M$ 的 $t\in[0,1]$ 所成的集, 试证 $\lambda(S_M)\geqslant 1-\frac{n}{M^2}$. 由b) 推断,若 $M^2\geqslant 4n$, 则存在 $t\in[0,1]$, 使得

$$N_2(F(\cdot,t))\leqslant M \text{ 与 } \beta(E_\alpha(F(\cdot,t)))>1/8$$

同时成立.

d) 假定对每个函数 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(G,\beta)$, 函数 $U^*\cdot f$ 几乎处处有限. 试证存在常数 $c>0$, 使对一切函数 $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(G,\beta)$ 与 $\alpha>0$, 有

$$(\beta(E_\alpha(f)))^{1/2}\leqslant\frac{C}{\alpha}\cdot N_2(f)$$

(**E. Stein 定理**). (由 13.12 问题 12 推断, 存在常数 $c>0$, 使对任一满足 $N_2(h)\leqslant M$ 的函数 $h\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(G,\beta)$, 有 $\beta(E_{cM}(h))<1/8$. 取 $M=\frac{\alpha}{c}$,$h=F(\cdot,t)$, $n=\left[\frac{M^2}{4}\right]$,借助 c) 得出所需的结论.)

5) 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $f$ 是 $\lambda$ 可积函数且具有紧支集. 对 $\varepsilon>0$,令

$$\theta_\varepsilon(f)(x)=\sup_{h>\varepsilon}\frac{1}{2h}\int_{h}^{h}|f(x-t)|dt,$$

且

$$\theta(f)(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x-t)|dt,$$

它们都是 $\boldsymbol{R}$ 上的下半连续函数(问题 1)，且具有紧支集；$\theta(f)$ 称为关于 $f$ 的 **Hardy-Littlewood 极大函数.**

a) 对每个 $\alpha>0$，设 $E_{\varepsilon,\alpha}(f)$ 是使得 $\theta_\varepsilon(f)(x)>\alpha$ 的 $x\in\boldsymbol{R}$ 所成的集，则任一紧集 $K\subset E_{\varepsilon,\alpha}(f)$ 都包含在有限个紧区间 $I_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的并之内，这些紧区间的测度满足 $\alpha\cdot\lambda(I_k)\leqslant\int_{I_k}|f(t)|dt$.

b) 试证存在指标序列 $(k_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$，使得区间 $I_{k_j}$ 两两不相交，并且

$$\lambda\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}I_k\right)\leqslant 2\sum_{j=1}^{m}\lambda(I_{k_j}).$$

(可以假定任一 $I_k$ 都不包含在指标 $h\neq k$ 的 $I_h$ 的并之内. 若令 $I_k=[a_k,b_k]$，且把 $I_k$ 排列得使 $a_k\leqslant a_{k+1}$，考虑指标相继的三个区间，证明必有 $a_k<a_{k+1}$，$b_{2k-1}<a_{2k+1}$，$b_{2k}<a_{2k+2}$. 推断区间族 $(I_{2k-1})$ 与区间族 $(I_{2k})$ 是两两不相交的，因而对于 $k_j$，可以都取偶指标 $k$ 或者奇指标 $k$.)

c) 由 a) 与 b) 推断，若 $E_\alpha(f)$ 是使得 $\theta(f)(x)>\alpha$ 的 $x\in\boldsymbol{R}$ 所成的集，则

$$\lambda(E_\alpha(f))\leqslant\frac{2}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt.$$

d) 设 $g$ 是属于 $\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(\lambda)$ 的非负函数，满足 $g(-t)=g(t)$，$g$ 在 $[0,+\infty]$ 上递减且 $\int g(t)dt=1$，试证对一切 $x\in\boldsymbol{R}$，有

$$|(g*f)(x)|\leqslant\theta(f)(x).$$

(对每个 $\alpha>0$，设 $]-h(\alpha),h(\alpha)[$ 是在其上 $g(t)>\alpha$ 的最大开区间，证明

$$(g*f)(x)=\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-h(\alpha)}^{h(\alpha)}f(x-t)dt,$$

并注意

$$\int_0^{+\infty}h(\alpha)d\alpha=1/2.)$$

e) 就对于环面 $\boldsymbol{T}$ 上的 Haar 测度为可积的函数叙述并证明类似的性质.

## 11. 正 则 化

**(14.11.1)** 设 $(f_n)$ 是 $\beta$ 可积函数序列，满足下列条件：

a) 积分 $\int|f_n(x)|d\beta(x)$ 所成的序列有界；

b) 积分 $\int f_n(x)d\beta(x)$ 所成的序列趋于1；

c）对 $e$ 的每个邻域 $V$，积分 $\int_{\complement V}|f_n(x)|d\beta(x)$ 所成的序列趋于 0 .

此时有：

(i) 对 $G$ 上的每个有界连续函数 $g$，序列 $(f_n*g)$ 在 $G$ 的每个紧子集上一致收敛于 $g$. 若 $g$ 关于 $G$ 上的一个右不变距离一致连续，则序列 $(f_n*g)$ 在 $G$ 上一致收敛于 $g$.

(ii) 若 $p=1$ 或 $p=2$，则对每个函数 $g\in\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(G)$, $N_p(f_n*g-g)$ 当 $n\to+\infty$ 时趋于 0 .对每个函数 $g\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(G)$, $(f_n*g)^\sim$ 所成的序列在 $L^\infty_{\mathbf{C}}(G)$ 内弱收敛于 $\tilde{g}$，这里 $L^\infty_{\mathbf{C}}(G)$ 看作 $L^1_{\mathbf{C}}(G)$ 的对偶 ((12.15) 与 (13.17)).

(iii) 此外我们还假定所有 $f_n$ 的支集都包含在 $G$ 的一个固定的紧子集内，则对 $G$ 上的每个测度 $\mu$，由测度

$$\mu*(f_n\cdot\beta)=(\mu*f_n)\cdot\beta$$

组成的序列粗疏收敛于 $\mu$(13.4).

关于 (i)，按照定义，对每个 $x\in G$ 与 $e$ 在 $G$ 内的每个紧邻域 $V$，有

$$\begin{aligned}g(x)-(f_n*g)(x)=g(x)\left(1-\int_V f_n(s)d\beta(s)\right)\\+\int_V f_n(s)(g(x)-g(s^{-1}x))d\beta(s)\\-\int_{\complement V} f_n(s)g(s^{-1}x)d\beta(s).\end{aligned}$$

设 $V_0$ 是 $e$ 的一个紧邻域，$L$ 是 $G$ 的紧子集，由于 $V_0^{-1}L$ 是紧的 (12.10.5)，故 $g$ 在 $V_0^{-1}L$ 上的限制关于 $G$ 上的一个右不变距离是一致连续的 (3.16.5). 因而对每个 $\varepsilon>0$，存在 $e$ 的紧邻域 $V\cup V_0$，使对 $x\in L$ 与 $s\in V$，有 $|g(x)-g(s^{-1}x)|\leqslant\varepsilon$. 于是选择 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，$\int_{\complement V}|f_n(s)|d\beta(s)\leqslant\varepsilon$ 与 $|1-f_n(s)d\beta(s)|\leqslant\varepsilon$ 成立. 由此推出 $\left|1-\int_V f_n(s)d\beta(s)\right|\leqslant 2\varepsilon$，因而对一切 $x\in L$，有

$$\left|g(x)\left(1-\int_V f_n(s)d\beta(s)\right)\right|\leqslant 2\|g\|\varepsilon,$$

$$\left|\int_V f_n(s)(g(x)-g(s^{-1}x))d\beta(s)\right| \leqslant a\varepsilon,$$

$$\left|\int_{\complement V} f_n(s)g(s^{-1}x)d\beta(s)\right| \leqslant \|g\|\varepsilon$$

(其中 $a = \sup_n \int |f_n(s)|d\beta(s)$)；由此得到 $|g(x)-(f_n*g)(x)| \leqslant (a+3\|g\|)\varepsilon$.

当 $g$ 在 $G$ 上关于右不变距离为一致连续时，取 $L = G$，同样的推理仍然适用。

关于 (ii)，对于 $p=1$ 或 $p=2$，存在函数 $h \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，使得 $N_p(g-h) \leqslant \varepsilon$(13.11.6)；由 (14.10.6.1) 得出

$$N_p(f_n*g-f_n*h) \leqslant aN_p(g-h) \leqslant a\varepsilon.$$

于是归结为证明当 $g \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$时的 (ii)。设 $S$ 是 $g$ 的支集，$V$是 $e$ 的紧邻域，在 (i) 中我们已看到，$f_n*g-g$ 在紧集 $K = S\cup VS$ 上一致收敛于 0 。另一方面，若 $x \notin K$，则

$$(f_n*g)(x)-g(x) = \int_{\complement V} f_n(s)g(s^{-1}x)d\beta(s),$$

由此根据 Lebesgue-Fubini定理与 Haar 测度的不变性，有

$$\begin{aligned}\int_{\complement K} |(f_n*g)(x)-g(x)|d\beta(x) &\leqslant \int_G d\beta(x) \\ &\quad \times \int_{\complement V} |f_n(s)|\cdot|g(s^{-1}x)|d\beta(s) \\ &= \int_{\complement V} d\beta(s)\int_G |f_n(s)|\cdot|g(s^{-1}x)|d\beta(x) \\ &= N_1(g)\int_{\complement V} |f_n(s)|d\beta(s).\end{aligned}$$

另一方面，由于积分

$$\int_K |(f_n*g)(x)-g(x)|d\beta(x)$$

随着 $1/n$ 趋于 0 而趋于 0 ，可见 $N_1(f_n*g-g)$趋于 0 。我们有 $N_\infty(f_n*g-g) \leqslant (a+1)\|g\|$，同样有

$$N_2(f_n*g-g)^2 \leqslant (a+1)\|g\|N_1(f_n*g-g).$$

现在假定 $g \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(G)$，$h \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(G)$，则对 $e$ 在 $G$ 内的每个紧邻域

$V$，有

$$\langle h, f_n * g - g\rangle = \left(1 - \int_V f_n(s)d\beta(s)\right)\langle h, g\rangle$$
$$- \int_{\complement V} f_n(s)d\beta(s)\int_G g(s^{-1}x)h(x)d\beta(x)$$
$$+ \int_V f_n(s)d\beta(s)\int_G h(x)(g(x) - g(s^{-1}x))d\beta(x).$$

然而我们有$\int h(x)(g(x)-g(s^{-1}x))d\beta(x) = \int g(x)(h(x)-h(sx))d\beta(x)$，$\left|\int h(x)(g(x) - g(s^{-1}x))d\beta(x)\right| \leqslant N_\infty(g)N_1(h-\gamma(s^{-1})h)$。对每个$\varepsilon > 0$，由(14.10.6.4)得到，在$G$内存在$e$的紧邻域$V$，使对一切$s\in V$，有$N_1(h - \gamma(s^{-1})h) \leqslant \varepsilon$，因之

$$\left|\int_V f_n(s)d\beta(s)\int_G h(x)(g(x) - g(s^{-1}x))d\beta(x)\right| \leqslant aN_\infty(g)\varepsilon.$$

选取$n_0$，使当$n \geqslant n_0$时，$\int_{\complement V}|f_n(s)|d\beta(s)\leqslant\varepsilon$，$\left|1-\int f_n(s)d\beta(s)\right| \leqslant \varepsilon$，则有

$$\left|\left(1 - \int_V f_n(s)d\beta(s)\right)\langle h, g\rangle\right| \leqslant 2|\langle h, g\rangle|\varepsilon,$$
$$\left|\int_{\complement V} f_n(s)d\beta(s)\int_G g(s^{-1}x)h(x)d\beta(x)\right| \leqslant N_\infty(g)N_1(h)\varepsilon,$$

由此最后得到，当$n \geqslant n_0$时，

$$|\langle h, f_n * g - g\rangle| \leqslant (2|\langle h, g\rangle| + N_\infty(g)N_1(h) + aN_\infty(g))\varepsilon,$$

这表明$(f_n * g)^\sim$弱收敛于$\tilde{g}$。

至于(iii)，问题在于证明，对每个函数$h\in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(G)$，序列$\{\langle h, \mu*(f_n\cdot\beta)\rangle\}$趋于$\langle h, \mu\rangle$。然而我们有(14.10.9)

$$\langle h, \mu*(f_n\cdot\beta)\rangle = \langle f_n * \check{h}, \check{\mu}\rangle,$$

且由于函数$f_n * \check{h}$的支集全都包含在$G$的一个固定的紧子集$H$内，又由于序列$(f_n * \check{h})$在$H$上一致收敛于$\check{h}$，所以所需的结论由测度的定义(13.1.1)与(14.1.4)得到。

**(14.11.2)** 例．设$(V_n)$是$G$内幺元$e$的基本邻域系．因为$\beta$的支集是整个$G$，所以对每个$n$，存在函数$f_n\in \mathscr{K}_+(G)$，使得它的支集

包含在 $V_n$ 内，且 $\int f_n(x)d\beta(x) \neq 0$(13.19.1)。对 $f_n$ 乘以适当的常数，还可以假定 $\int f_n(x)d\beta(x) = 1$，从而序列 $(f_n)$ 满足(14.11.1)的条件。于是我们看到，$G$ 上的每个测度 $\mu$ 都可以用"**正则化**"序列来(在粗疏拓扑的意义下)逼近，这些正则化是关于 $\beta$ 具有连续密度的测度(14.9.3)。

**(14.11.3)** 取 $G = \boldsymbol{R}$，且取 $\beta$ 为 Lebesgue 测度，令

**(14.11.3.1)**
$$\begin{cases} g_n(x) = (1-x^2)^n, & \text{当 } x \in [-1,1], \\ g_n(x) = 0, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

设 $a_n = \int_{-1}^{1} g_n(x)dx$，$f_n = a_n^{-1}g_n$，则序列 $(f_n)$ 满足(14.11.1)的条件：事实上，对 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，有 $1-x^2 \geqslant 1-|x|$，因而

$$a_n \geqslant 2\int_0^1 (1-x)^n dx = 2/(n+1),$$

因此对一切 $x \in [-1, 1]$，有 $f_n(x) \leqslant (n+1)(1-x^2)^n$，这表明 $f_n(x)$ 在每个不含有 0 的紧区间上一致收敛于 0。设 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，其支集包含在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 内，于是

$$(\mu * f_n)(x) = a_n^{-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(x-y)d\mu(y),$$

若 $x$ 自身属于区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，则这个式子给出

$$(\mu * f_n)(x) = a_n^{-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-(x-y)^2)^n d\mu(y),$$

因此函数 $\mu * f_n$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上与一个多项式相等。特别取 $\mu$ 形如 $h \cdot \beta$，其中 $h$ 是支集包含在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 内的连续函数，则由(14.11.1(i))，我们就再次得到关于在一个紧区间上通过多项式一致逼近连续函数的 Weierstrass 定理(7.4.1)。

## 问　　题

1）试证，若 $G$ 是局部紧群，使得代数 $\mathscr{K}(G)$ 关于卷积是交换的，则 $G$ 是交换的(通过正则化证明具有紧支集的测度组成的代数是交换的)。

2）设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，则为使代数 $L^1(G,\beta)$ 具有单位元，必须且只须 $G$ 是离散的.（假定 $G$ 非离散，设 $f_0\in\mathscr{L}^1(G,\beta)$，则存在 $e$ 的紧邻域 $V$，使得 $\int_V|f_0(x)|d\beta(x)<1$. 试证若 $U$ 是 $e$ 的对称紧邻域，满足 $U^2\subset V$，则对几乎所有 $x\in U$，有 $|(\varphi_U * f_0)(x)|<1$，因而 $\tilde{f}_0$ 不可能是 $L^1(G,\beta)$ 的单位元.）

3）设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度. 若 $G$ 不只含有 $e$，则代数 $L^1(G,\beta)$ 具有不等于 0 的零因子. 我们可构造 $\mathscr{L}^1(G,\beta)$ 中的两个不可忽略函数 $f$，$g$，使得 $f*g$ 是可忽略的：

1° $G$ 包含紧子群 $H\neq\{e\}$ 的情形. 取 $f$ 为某个特征函数 $\varphi_A$，$g$ 为差 $\varphi_{sB}-\varphi_B$，适当选取其中的 $A$，$B$ 与 $s$，并注意在 $H$ 内有 $\Delta_G(x)=1$.

2° $G=\mathbf{Z}$ 的情形. 证明此时可取

$$f(n)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$(n\in\mathbf{Z})$，且取 $g=f$.

3° 一般情形. 先证明在 $G$ 内存在 $a\neq e$，使得 $\Delta(a)=1$. 于是由 $a$ 生成的子群在 $G$ 内的闭包 $H$ 或者是紧子群，或者是同构于 $\mathbf{Z}$ 的子群（12.9 问题 10）. 在第一种情形，利用 1° 的结果；在第二种情形，借助 2° 适当选取 $U$ 与序列 $(\alpha_n)$，$(\beta_n)$，并取

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\varphi_{Ua^{-n}}(t),\qquad g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\beta_n\varphi_{a^nU}(t).$$

4）设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，则为使 $\mathscr{L}^p(G,\beta)(1\leqslant p<+\infty)$ 的子集 $H$ 在 $L^p(G,\beta)$ 内具有相对紧的象 $\tilde{H}$，必须且只须下列条件得到满足：1° $\tilde{H}$ 在 $L^p(G,\beta)$ 内有界；2° 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $G$ 的紧子集 $K$，使对一切函数 $f\in H$，有 $N_p(f\varphi_{G-K})\leqslant\varepsilon$；3° 对每个 $\varepsilon>0$，在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域 $V$，使对一切函数 $f\in H$ 与一切 $s\in V$，有 $N_p(\gamma(s)f-f)\leqslant\varepsilon$（为证明所述条件是充分的，注意若 $g\in\mathscr{K}(G)$ 且 $L$ 是 $G$ 的紧子集，则属于 $H$ 的函数在 $L$ 上的限制所成的集在映射 $f\to g*f$ 下的象是 $\mathscr{K}(G)$ 的等度连续子集.）

5）设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，$\mu$ 是 $G$ 上的正测度. 试

证，若 $A$ 是 $G$ 内的 $\mu$ 可积集，$B$ 是 $G$ 内的普遍可测集，则函数 $u: s \to \mu(A \cap sB)$ 在 $G$ 内是 $\beta$ 可测的，进而，若 $B^{-1}$ 还是 $\beta$ 可积集，则 $u$ 也是 $\beta$ 可积的，且有

$$\int \mu(A \cap sB) d\beta(s) = \mu(A)\beta(B^{-1})$$

（利用 Lebesgue-Fubini 定理与 13.9 问题 21）．给出测度 $\mu$ 的例子，使得函数 $s \to \mu(A \cap sB)$ 不连续；若 $\mu$ 是以 $\beta$ 为基的测度，且若 $A$ 为 $\mu$ 可积而 $B$ 为普遍可测，则函数 $s \to \mu(A \cap sB)$ 在 $G$ 内连续．

6）设 $G$ 是局部紧群，$G'$ 是拓扑群，$f$ 是 $G$ 到 $G'$ 的同态，它关于 $G$ 上的左 Haar 测度 $\beta$ 为可测，试证 $f$ 连续．（注意若令 $g(x) = f(x^{-1})$，则存在 $G$ 的紧子集 $K$，它不是 $\beta$ 可忽略的，且使得 $f$ 与 $g$ 在 $K$ 上的限制是连续的；利用（12.3.8），由此推断 $f$ 在 $K \cdot K^{-1}$ 上的限制是连续的；最后应用（14.10.8）．）

7）设 $G$ 是局部紧群．对 $t \in \boldsymbol{R}_+^*$，设 $\mu_t$ 是 $G$ 上的非零有界正测度．假定映射 $t \to \mu_t$ 关于拓扑 $\mathscr{T}_s$（13.20问题 1 中的记号）是连续的，且对 $\boldsymbol{R}_+^*$ 中的 $s$，$t$，有 $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$．

a）试证存在实数 $c$，使得 $\|\mu_t\| = e^{ct}$（注意映射 $t \to \|\mu_t\|$ 是下半连续的并应用问题 6）．

b）试证当 $t$ 趋于 0 时，$\mu_t$ 关于 $\mathscr{T}_s$ 趋于在 $G$ 的某个紧子群上的总质量等于 1 的 Haar 测度．（利用（12.15.9）证明存在趋于 0 的序列 $(s_n)$，使得 $(\mu_{s_n})$ 关于 $\mathscr{T}_s$ 具有极限 $\mu$，并且对一切 $t>0$ 有 $\mu_t * \mu = \mu_t = \mu * \mu_t$；由此推断 $\mu$ 是 $\mu_t$ 当 $t$ 趋于 0 时的极限，并且 $\mu * \mu = \mu$；借助 14.7 问题 5 得到所需的结论．）

8）以 $\lambda$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，设 $A$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 内的有界凸开集（8.5 问题 8），设 $D(A) = A - A$ 是当 $x$，$y$ 取遍 $A$ 时点 $x - y$ 的集，则 $D(A)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内是凸的、开的、对称的，并且是有界的．对每个 $x \in D(A)$，$x \neq 0$，令 $\rho(x)$ 是 $]0,1[$ 内使得 $\rho(x)^{-1}x$ 属于 $D(A)$ 的边界的数，若令 $\rho(0) = 0$，则 $\rho$ 是 $D(A)$ 上的连续函数（12.14 问题 12）．

a）对任一 $x \in D(A)$，试证

$$\lambda(A \cap (A + x)) \geqslant (1 - \rho(x))^n \lambda(A).$$

（注意若 $x \neq 0$ 且 $\rho(x)^{-1}x = b - a$，其中 $a$，$b$ 属于 $\bar{A}$，则有

$$(1 - \rho(x))A + \rho(x)b = (1 - \rho(x))A + \rho(x)a + x.)$$

b）试证

$$(\lambda(A))^2 = \int_{D(A)} (\varphi_A * \check{\varphi}_A)(x) d\lambda(x).$$

c）由 a）与 b）推断

$$\lambda(A) \geqslant \int_{D(A)} (1-\rho(x))^n d\lambda(x).$$

试证此不等式右边的积分等于

$$\lambda(D(A)) \int_0^1 nt^{n-1}(1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \lambda(D(A)).$$

(用递增序列 $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ 把区间 $[0, 1]$ 分解为 $m$ 个子集，把 $D(A)$ 看作由 $t_k < \rho(x) \leqslant t_{k+1}$ 所定义的那些集的并，然后使 $m$ 无限增大。)

试证

$$\lambda(D(A)) \leqslant \binom{2n}{n} \lambda(A).$$

9) 设 $G$ 是局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的左 Haar 测度，$V$ 是 $e$ 在 $G$ 内的对称紧邻域，它不包含任何 $\neq \{e\}$ 的子群.

a) 设 $f$ 是 $G$ 上的连续函数，它在 $[0, 1]$ 内取值，其支集含在 $V$ 内，且 $f(e) > 0$。令

$$g(x) = \int f(xs)f(s)d\beta(s).$$

试证对 $x \in G$，有 $\|\gamma(x)g - g\| \leqslant c\|\gamma(x)f - f\|$，其中 $c = \int f(s)d\beta(s)$；且若 $x \neq e$，则 $g(x) < g(e)$。(注意在相反的情形下，就会有 $\gamma(x^{-1})f = f$，而这将推出对一切 $k$，有 $x^k \in V$。)

b) 设$(f_n)$是非负函数的一致有界且等度连续序列，每个 $f_n$ 的支集包含在 $V$ 内，且假定对每个 $n$，存在子集 $A_n \subset V$，使对任何 $n$ 与任何 $x \in A_n$，有$\|\gamma(x)f_n - f_n\| \leqslant M$. 试证函数

$$g_n(x) = \int f_n(xs)f_n(s)d\beta(s)$$

组成的集是等度连续的；同样，函数 $\gamma(x)g_n - g_n$（其中对每个 $n$，都有 $x \in A_n$）组成的集也是等度连续的.

10) 设 $G$ 是局部紧群，$u$ 与 $v$ 是 $G$ 上的两个有界非负函数. 对每个 $x \in G$，令

$$w(x) = \sup_{y \in G} u(y)v(y^{-1}x).$$

a) 试证 $w(x) = \sup_{y \in G} u(xy^{-1})v(y)$. 且对每个 $s \in G$，有

$$\|\gamma(s)w - w\| \leqslant \|v\| \cdot \|\gamma(s)u - u\|.$$

此外，若 $A$ 与 $B$ 分别是 $u$ 与 $v$ 的支集，则 $w$ 的支集包含在 $AB$ 的闭包内.

b) 假定 $v(x^{-1}) = v(x)$. 试证，对 $G$ 内任何 $x$, $x'$，有

$$|w(x)-w(x')|\leqslant\|\gamma(x)v-\gamma(x')v\|\cdot\|u\|.$$

(注意对每个 $y\in G$，有

$\|u\|\cdot\|\gamma(x)v-\gamma(x')v\|\geqslant u(y)(v(y^{-1}x)-v(y^{-1}x'))\geqslant u(y)v(y^{-1}x)-w(x')$.)

特别是，若 $v$ 连续且具有紧支集，则 $w$ 也连续且具有紧支集.

11) 设 $G$ 是局部紧群，$V$ 是 $e$ 的对称紧邻域，使得 $V^2$ 不包含任何不等于 $\{e\}$ 的子群. 对每个整数 $i$，设 $U_i$ 是使得 $x^k\in V(1\leqslant k\leqslant i)$ 的点 $x$ 的集. 当 $i$ 取遍正整数集时，$U_i$ 在 $G$ 内形成 $e$ 的一个基本邻域系 (12.9 问题 6b)). 设 $n_i$ 是使得 $U_i^{n_i}\subset V$ 的最大整数. 我们在 $G$ 上定义函数 $u_i$ 如下:

$$u_i(e)=1;\ 对\ x\in U_i^k-U_i^{k-1}\ 与\ 1\leqslant k\leqslant n_i,\ u_i(x)=1-\frac{k}{n_i};$$

最后对 $x\notin U_i^{n_i}$，$u_i(x)=0$.

a) 试证对一切 $x\in U_i$，有

$$\|\gamma(x)u_i-u_i\|\leqslant 1/n_i.$$

b) 借助问题 10 构成非负连续函数序列 $(w_i)$，使得这些 $w_i$ 的支集都包含在 $V^2$ 内，对一切 $i$ 有 $\|w_i\|\geqslant 1$，这些函数 $w_i$ 一致有界且等度连续，而且当 $i$ 取遍正整数集且对每个 $i$，$z_i$ 取遍 $U_i$ 时，函数 $n_i(\gamma(z_i)w_i-w_i)$ 的集一致有界.

c) 借助问题 9 构成非负连续函数序列 $(g_i)$，使得这些 $g_i$ 的支集都包含在 $V^4$ 之内，这个序列一致有界且等度连续，而且当 $i$ 取遍正整数集且对每个 $i$，$z_i$ 取遍 $U_i$ 时，函数 $n_i(\gamma(z_i)g_i-g_i)$ 的集一致有界且等度连续；最后，对任一成为 $(g_i)$ 的某个子序列的一致极限的函数 $f$，当 $x\neq e$ 时有 $f(x)<f(e)$.

12) 设 $G$ 是没有任意小子群的局部紧群，$V$ 是 $e$ 的对称紧邻域，它不包含 $G$ 的任一异于 $\{e\}$ 的子群，并且对 $V$ 的两个点 $x$, $y$，关系 $x^2=y^2$ 蕴涵 $x=y$ (12.9 问题 6a)). $\boldsymbol{R}$ 到 $G$ 的任一连续同态 $r\to X(r)$ (12.9 问题 7) 称为 $G$ 的一个**单参数子群**. 以 0 表示单常值参数子群 $r\to e$；对每个 $t\in\boldsymbol{R}$，以 $tX$ 表示单参数子群 $r\to X(tr)$. 设 $X$ 是 $G$ 的任一单参数子群，$G$ 上的连续实值函数 $f$ 称为 **$X$ 可导的**，如果当 $r$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内保持不等于 0 而趋于 0 时，$r^{-1}(\gamma(X(r))f-f)$ 在 $G$ 上一致收敛于极限 $D_Xf$. 此时对任一实数 $t$，$f$ 也是 $tX$ 可导的，且有 $D_{tX}f=tD_Xf$. 若 $f$ 是 $X$ 可导的，则对每个 $x\in G$，函数 $r\to(X(-r)x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内是可导的，且其导数是函数 $r\to D_Xf(X(-r)x)$.

$G$ 上的有界连续实值函数 $f$ 称为**适当的**，如果在 $G$ 内存在 $e$ 的邻域 $V$，使对一切 $z\in V$，有 $\|\gamma(z)f-f\|\neq 0$. 问题 11c) 中所构造的作为 $(g_i)$ 的子序列的极限的函数 $f$ 是适当的. 试证，若 $f$ 是适当的，且若对于单参数子群

$X\neq 0$，$D_Xf$ 存在，则 $D_Xf\neq 0$. 反之，若 $f$ 不是适当的，则存在单参数子群 $X\neq 0$，使得 $D_Xf=0$.（考虑由不等于 $e$ 的元组成的序列 $(a_i)$，它趋于 $e$ 且使得 $\|\gamma(a_i)f-f\|=0$；证明可以假定存在整数序列 $(m_i)$，使对一切 $r\in\boldsymbol{R}$，序列 $(a_i^{[rm_i]})$ 收敛于 $X(r)$，其中 $X\neq 0$（12.9问题 7）.）

13）关于 $G$ 与 $V$ 的记号以及假定都与问题 12）相同. 设 $(f_i)$ 是 $G$ 上的有界连续函数序列，它一致收敛于函数 $f$. 设 $(a_i)$ 是由 $G$ 的元组成的序列，它收敛于 $e$，并设 $(m_i)$ 是正整数序列.

a）假定 $f$ 是适当的，函数族 $(m_i(\gamma(a_i)f_i-f_i))$ 一致有界，则对 $e$ 的每个邻域 $U$，存在数 $\varepsilon>0$，使得关系 $|r|<\varepsilon$ 蕴涵 $a_i^{[rm_i]}\in U$.（可以假定 $\bar{U}\subset V$. 设 $\alpha=\sup\limits_i m_i\|\gamma(a_i)f_i-f_i\|$；取 $i$ 充分大，又可以假定 $a_i\in U$，且对 $z\in V-U$ 有 $\|\gamma(z)f_i-f_i\|\geqslant\beta>0$. 利用不等式

（*） $$\|\gamma(st)f-f\|\leqslant\|\gamma(s)f-f\|+\|\gamma(t)f-f\|$$

证明，对于 $k<\alpha m_i/\beta$，不可能有 $a_i^k\in V-U$.）

b）假定函数族 $(m_i(\gamma(a_i)f_i-f_i))$ 一致有界且一致等度连续，并且还假定对每个 $r\in\boldsymbol{R}$，序列 $(a_i^{[rm_i]})$ 趋于 $X(r)$，这里 $X$ 是一个单参数子群. 试证 $D_Xf$ 存在且是序列 $(m_i(\gamma(a_i)f_i-f_i))$ 的极限.（只须证明，若函数序列 $(m_i(\gamma(a_i)f_i-f_i))$ 收敛于函数 $F$，则 $D_Xf$ 存在且等于 $F$. 为此确定 $e$ 的邻域 $W$，使对 $z\in W$，有 $\|\gamma(z)F-F\|\leqslant\varepsilon/2$，然后确定数 $\delta>0$，使对 $0\leqslant k<\delta m_i$，有 $a_i^k\in W$. 证明对充分大的 $i$ 与 $k<\delta m_i$，有

$$\|k^{-1}m_i(\gamma(a_i^k)f_i-f_i)-F\|\leqslant\varepsilon,$$

由此推断，对 $0\leqslant r<\delta$，有 $\|r^{-1}(\gamma(X(r))f-f)-F\|\leqslant\varepsilon$.）

特别是，若对一切 $r\in\boldsymbol{R}$，序列 $(a_i^{[rm_i]})$ 趋于 $e$，则序列 $(m_i(\gamma(a_i)f_i-f_i))$ 一致趋于 0.

14）a）考虑问题 11c）中所构造的序列 $(g_i)$. 试证序列 $(i/n_i)$ 是上有界的.（用反证法，假定存在子序列 $(i(k))_{k\in N}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}n_{i(k)}/i(k)=0$. 可以归结为序列 $(g_{i(k)})$ 在 $G$ 上一致收敛于极限 $g$，而且存在点 $c_{i(k)}\in U_{i(k)}^{n_{i(k)}}$ 组成的序列收敛于元 $c\neq e$ 的情形；此时存在元 $a_{i(k)}\in U_{i(k)}$，使得

$$\|\gamma(c_{i(k)})g_{i(k)}-g_{i(k)}\|\leqslant n_{i(k)}\|\gamma(a_{i(k)})g_{i(k)}-g_{i(k)}\|.$$

于是由假定 $\lim\limits_{k\to\infty}n_{i(k)}/i(k)=0$，12.9 问题 7 与 $U_i$ 的定义推断，对每个 $r\in\boldsymbol{R}$，序列 $(a_{i(k)}^{[rn_{i(k)}]})$ 就会趋于 $e$，由此借助问题 13b）推出 $\|\gamma(c)g-g\|=0$，而这与 $g$ 是适当的相矛盾.）

b）试证，若 $g$ 是 $(g_i)$ 的一个子序列的一致极限，则 $g$ 对每个单参数子群

$X$ 是 $X$ 可导的(利用 a) 与问题 11c) 证明函数 $t(\gamma(X(1/t)g_i - g_i)$ 形成一致等度连续与一致有界集,并应用问题 13b))。

15) 设 $G$ 是幺模局部紧群，$\beta$ 是 $G$ 上的一个 Haar 测度，则为使函数 $f \in \mathscr{L}^{\infty}_{C}(G, \beta)$ 几乎处处等于一个关于 $G$ 上的某个右不变距离为一致连续的函数，必须且只须取值于 $\mathscr{L}^{\infty}_{C}(G, \beta)$ 中的函数 $s \mapsto \gamma(s)f$ 在点 $e$ 处连续. (为证明所述条件是充分的，考虑属于 $\mathscr{K}_{+}(G)$ 的函数的序列 $(u_n)$，使得 $\mathrm{Supp}(u_n) \subset V_n$((14.11.2)的记号),并且 $\int u_n(x)d\beta(x) = 1$. 利用 (13.17.1)与 Lebesgue-Fubini 定理证明当 $1/n$ 趋于 0 时,$N_{\infty}(u_n * f - f)$ 也趋于0.)

16) 对 $\boldsymbol{R}$ 上的任一有界测度 $\mu$, 积分

$$F_{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t - z}$$

对每个满足 $\mathscr{I}z \neq 0$ 的复数 $z$ 有定义，且在半平面 $\mathscr{I}z > 0$ 或半平面 $\mathscr{I}z < 0$ 内是 $z$ 的解析函数; 它在每个不属于 $\mu$ 的支集的点 $x \in \boldsymbol{R}$ 处也解析. $F_{\mu}$ 称为 $\mu$ 的 **Stieltjes 变式.**

a) 设 $x_0$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的点. 假定 $\mu$ 在 0 的开邻域 $V$ 上的限制关于 $V$ 上的 Lebesgue 测度具有连续密度 $g$. 试证当 $y$ 通过大于 0 的值趋于 0 时,$\mathscr{I}(F_{\mu}(x_0 + iy))$ 具有等于 $\pi g(x_0)$ 的极限.

b) 试证,若解析函数 $F_{\mu}$ 在 $\mathscr{I}z > 0$ 内恒等于零,则 $\mu = 0$. (若用正则化 $\mu * (f \cdot \beta)$ 代替 $\mu$, 则可证明

$$F_{\mu * f}(z) = \iint \frac{f(u) du d\mu(t)}{t + u - z} = 0;$$

并利用 a) 证明 $\mu * (f \cdot \beta)$ 为零.)

17) 试证，为使在圆盘 $B: |z| < 1$ 内全纯的函数 $G$ 在该圆盘内满足 $\mathscr{R}G(z) \geqslant 0$, 必须且只须在区间 $[0, 2\pi]$ 上存在正测度 $\nu$,使得对于 $z \in B$,有

$$G(z) = c \cdot i + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\nu(\varphi),$$

其中 $c \in \boldsymbol{R}$. (为证明所述条件是必要的,注意对 $|z| < r < 1$, 有

$$G(z) = i \cdot \mathscr{I}G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} p_r(\varphi) d\varphi,$$

其中 $p_r(\varphi) = \mathscr{R}G(re^{i\varphi})$; 注意测度 $p_r \cdot \lambda$ ($\lambda$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的 Lebesgue 测度) 是正的且其总质量是 $\mathscr{R}G(0)$, 且利用(13.4.3).)

由此推断，为使在半平面 $\mathscr{I}z > 0$ 内全纯的函数 $F$ 在该半平面内满足 $\mathscr{R}F(z) \geqslant 0$, 必须且只须在 $\boldsymbol{R}$ 上存在有界正测度 $\mu$ 与两个常数 $a \geqslant 0, b \in \boldsymbol{R}$,使

对 $\mathscr{I}z>0$, 有

$$F(z) = az + b + (1 + z^2)\int\frac{d\mu(t)}{t - z}.$$

(作 $B$ 到半平面 $\mathscr{I}z>0$ 的变换 $z \to i\frac{1+z}{1-z}$.)

18) a) 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $f$ 是 $\lambda$ 可积函数. 对每个 $h>0$, 令

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x-t)dt.$$

试证, 对几乎一切 $x \in \boldsymbol{R}$, 当 $h$ 通过大于 0 的值趋于 0 时, $f_h(x)$ 趋于 $f(x)$ (Lebesgue 定理). (令 (12.7 问题 8))

$$R(f)(x) = \limsup_{h\to 0}|f_h(x) - f(x)|,$$

注意对任一函数 $g \in \mathscr{K}(R)$ 有 $R(f-g) = R(f)$; 另一方面, 采用 14.10 问题 5 的记号, 有 $R(f) \leqslant \theta(f) + |f|$. 利用 14.10 问题 5c), 推断对于每个 $\alpha>0$, 使得 $R(f)(x)>\alpha$ 的 $x$ 的集是零测度的.)

b) 设 $(g_n)$ 是属于 $\mathscr{K}(R)$ 的非负函数的一个序列, 满足 (14.11.1) 的条件 a), b) 与 c); 且假定 $g_n(-t) = g_n(t)$, $g_n$ 在 $[0, +\infty]$ 上递减. 试证当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时, $(g_n * f)(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上几乎处处趋于 $f(x)$ (Lebesgue 定理). (方法相同, 利用 14.10 问题 5d).)

c) 对于环面 $\boldsymbol{T}$ 上的 Haar 测度证明类似的性质.

# 第十五章　赋范代数与谱论

算子谱理论是现代分析的主要部分之一，我们在第十一章中已经研究过它的初等内容．谱论的主要对象是，对于 Hilbert 空间或准 Hilbert 空间上满足适当的连续性条件的线性算子，得到类似于代数中下述经典定理的结果：借助于“Jordan 矩阵”给出 $\boldsymbol{C}$ 上的 $n$ 阶方阵（或等价地，给出有限维复向量空间的自同态）的标准形式．正如在第十一章中所看到的，适当加以修改，这个结果可以推广到紧算子上．然而 Hilbert 及其继承者作了另外的推广，这种推广并不那么显然，却具有更大的意义，因为它还可以应用到连续自伴算子（11.5）上（并且更一般地可以应用到正规算子（15.11）上）．如同在经典情形中 $\boldsymbol{C}$ 上的自伴（或正规）矩阵具有对角标准形那样，在这里，我们可以借助一个单独模型来描述连续正规算子，就是通过空间 $L^2_{\boldsymbol{C}}(\mu)$ 中乘以本性有界函数 $u$ 的类的乘法 $M_u(u)$: $\tilde{f}\to(uf)^{\sim}$（15.10）来描述．这里不可避免地要用到 Lebesgue 理论（即使从自伴算子——它来自具有我们所要求的正则性的微分方程（第二十三章）——出发，情形也是如此）；而且可以毫不夸张地说，Lebesgue 理论进入谱论以及与之相关的理论（诸如调和分析或局部紧群表示理论等），正是它在分析中具有极大重要性的基本原因．

现代阐述谱论的方式并不是按照 Hilbert 所设计的途径，而是使用基于赋范代数理论的更为优美与有力的方法，这一理论是由 Гельфанд 及其学派开创的．在这一章中，我们主要研究对合赋范代数（15.4），因为正是这种代数出现在谱论中．然而赋范代数的一般理论，尤其是谱与 Гельфанд 变换（15.3）的基本概念，已经在现代分析特别是解析函数论中得到另外的应用．我们以问题的形式指明这些应用的某些方面，并请有兴趣的读者参考[35]与[29]．

本章的中心部分是研究这样一种对合代数表示,它能把"抽象地"给出的一个代数"实现"为 Hilbert 空间上的算子代数.

现代研究对合代数表示理论的基本概念是 Hilbert 形式,它与 Hilbert 代数(15.7)密切相关. 我们只就两种特殊情形深入展开研究:一(15.8)是紧群表示理论(第二十一章)的准备,二(15.9)是谱论与调和分析(第二十二章)的准备. 我们向愿意进一步深入研究(尤其为愿意深入研究局部紧群的表示这一丰富而又困难的理论)的读者热忱推荐 J. Dixmier 所写的两卷优美的教本([24]与[25]),它是关于这一主题的权威著作.

在本书中, Hilbert 谱理论(15.10与15.11)是作为 Bochner-Godement 一般定理(15.9)的特殊情形出现的. 我们可以从 Гельфанд-Наймарк 定理(15.4)出发,更快地直接达到这一理论;然而我们觉得,从一条作为调和分析基础的强有力的定理导出这个理论会更有教益,尽管这样做需要稍微多付出一些努力.

谱论的应用不限于上面所列举的那些方面. 在谱论最著名的应用中,至少应当举出以下三个方面: 1° 分析中最优美的理论之一——由 Stieltjes 创始的"矩问题"以及它的种种分支(解析函数,正交多项式, Jacobi 矩阵,连分式,等等),它奇妙地寓于无界 Hermite 算子理论之中;2°遍历理论与谱论之间的有趣关系; 3°摄动理论. 我们已在问题中提到这些理论的某些重要结果,至于更为丰富的内容,请读者参考书目中所举的专著[20],[28],[30],[32].

## 1. 赋范代数

本章中所说的代数都是指复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的代数. 代数 $A$ 称为**赋范代数**,如果赋予 $A$ 一个范数 $x \to \|x\|$(5.1),满足:对 $A$ 中任何 $x$, $y$, 有不等式

(15.1.1) $$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

如果 $A$ 还具有单位元 $e$ 并且不是单元素集 $\{0\}$(即如果 $e \neq$

0)，则我们总是假定 $A$ 的范数满足补充条件

(15.1.2) $$\|e\| = 1.$$

公式 (15.1.1) 表明，$A \times A$ 到 $A$ 的双线性映射 $(x, y) \to xy$ 是连续的 (5.5.1)。

完备的赋范代数(即它的基赋范向量空间是 Banach 空间)称为 **Banach 代数**.

显然，赋范代数 $A$ 的任一子代数 $B$ (当 $A$ 具有单位元时，假定 $B$ 含有 $A$ 的单位元)，以 $x \to \|x\|$ 在 $B$ 上的限制作为范数，就成为一个赋范代数. 如果 $\mathfrak{m}$ 是 $A$ 的闭双边理想，则赋予 $x \to \|x\|$ 所诱导的范数 (12.14.10.1) 的商代数 $A/\mathfrak{m}$，当 $A$ 没有单位元时，就是一个赋范代数. 事实上，若 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 是 $A/\mathfrak{m}$ 的两个元，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in \dot{x}$ 与 $y \in \dot{y}$，使得

$$\|x\| \leqslant \|\dot{x}\| + \varepsilon, \quad \|y\| \leqslant \|\dot{y}\| + \varepsilon,$$

由此 $\|xy\| \leqslant (\|\dot{x}\| + \varepsilon)(\|\dot{y}\| + \varepsilon)$；因 $xy \in \dot{x}\dot{y}$，且 $\varepsilon$ 是任意的，这就证明了 $\|\dot{x}\dot{y}\| \leqslant \|\dot{x}\| \cdot \|\dot{y}\|$。进而，若 $A$ 还具有单位元 $e$ 且若 $\mathfrak{m} \neq A$，则 $\dot{e}$ 是 $A/\mathfrak{m}$ 的单位元且不等于 0，因之由定义得到 $\|\dot{e}\| \leqslant \|e\| = 1$；另一方面，$\|\dot{e}\| = \|\dot{e}^2\| \leqslant \|\dot{e}\|^2$，这表明 $\|\dot{e}\| \geqslant 1$，从而 $\|\dot{e}\| = 1$ 且 $A/\mathfrak{m}$ 是赋范代数。

**(15.1.3)** 设 $A$ 是赋范代数，则 $A$ 的子代数(相应地，$A$ 的交换子代数，或 $A$ 的左理想，或 $A$ 的右理想)在 $A$ 内的闭包是子代数(相应地，$A$ 的交换子代数，或 $A$ 的左理想，或 $A$ 的右理想)。

根据 (5.4.1) 与恒等式延拓原理，通过类似于 (5.4.1) 的证明，这个命题可从 $A$ 中乘法的连续性得到。

给定两个赋范代数 $A$, $B$，代数同构 $u: A \to B$ 称为**拓扑同构**，如果它是双方连续的，换言之 (5.5.1)，如果存在两个数 $a > 0$，$b > 0$，使对一切 $x \in A$，有 $a\|x\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant b\|x\|$ (5.5.1)。$u$ 称为**等距同构**，如果对一切 $x \in A$，有 $\|u(x)\| = \|x\|$。

**(15.1.4)** 赋范代数的例. 对任一非空集 $X$，$X$ 上的有界复值函数组成的集 $\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(X)$ 关于范数 (7.1.1) 与通常乘法构成一个交换 Banach 代数，不等式 (15.1.1) 是显然的，而等于 1 的常值函数是

$\mathscr{B}_C(X)$ 的单位元且满足 (15.1.2). 当 $X$ 是拓扑空间时，有界连续函数所成的子空间 $\mathscr{C}_C^{\infty}(X)$ 是 $\mathscr{B}_C(X)$ 的闭子代数. 当 $X$ 为可度量化、可分与局部紧时，在无穷远处趋于零的连续函数所成的空间 $\mathscr{C}_C^0(X)$(13.20.6)与具有紧支集的连续函数所成的空间 $\mathscr{K}_C(X)$，是代数 $\mathscr{C}_C^{\infty}(X)$ 中的理想，而 $\mathscr{C}_C^0(X)$ 是 $\mathscr{K}_C(X)$ 的闭包.

**(15.1.5)** 当 $X$ 是 $\boldsymbol{C}$ 内的闭圆盘 $|z| \leqslant 1$ 时，根据解析函数的收敛定理 (9.12.1)，在 $X$ 上连续且在 $X$ 的内部 $|z| < 1$ 内解析的函数所成的集 $\mathscr{A}(X) \subset \mathscr{C}_C(X)$ 是 $\mathscr{C}_C(X)$ 的闭子代数.

**(15.1.6)** 我们已经看到 (11.1)，复赋范空间 $E$ 的连续自同态组成的代数 $\mathscr{L}(E)$ 是赋范代数(一般不是交换的)，它以 $E$ 的恒等映射 $1_E$ 为单位元 (在这里不等式 (15.1.1) 就是 (5.7.5)，而关系式 (15.1.2)是显然的). 此外，当 $E$ 是 Banach 空间时，$\mathscr{L}(E)$ 是 Banach 代数 (5.7.3).

根据 (11.2.6) 与 (11.2.10)，在 $\mathscr{L}(E)$ 内，由紧算子组成的集是闭双边理想.

**(15.1.7)** 设 $G$ 是可分可度量化的局部紧群，对 $G$ 上的有界测度集 $M_C^1(G)$，赋予卷积 $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda * \mu$ 与范数(13.20.1)，它就成为 Banach 代数. 事实上，这里不等式 (15.1.1) 就是 $n = 2$ 时的 (14.6.2.1); 单位元 $\varepsilon_e$($G$ 的幺元 $e$ 处的 Dirac 测度)满足 $\|\varepsilon_e\| = 1$；最后，赋范空间 $\mathscr{C}_C^0(G)$的对偶 $M_C^1(G)$(13.20.6) 是完备的(5.7.3). $M_C^1(G)$ 中以 $G$ 上的左 Haar 测度 $\beta$ 为基的测度所构成的子空间 (连同它的范数)等同于 Banach 空间 $L_C^1(G, \beta)$，这是因为 $N_1(f) = \|f \cdot \beta\|$ (13 20.3)，且由 (14.9.2) 得到，若 $G$ 是幺模的，则 $L_C^1(G, \beta)$ 是 $M_C^1(G)$的闭双边理想；我们总是使 $L_C^1(G, \beta)$等同于这个理想(自然这样的等同依赖于 $\beta$ 的选取). 在这样的等同下，$\mathscr{K}_C(G)$ 等同于 $M_C^1(G)$ 的一个子代数 (14.10.5)，它一般不是理想(除非当 $G$ 为紧时 (14.9.1))，并且由于它的闭包是 $L_C^1(G, \beta)$(13.11.6)，所以它一般不是闭的.

**(15.1.8)** 附注. $\boldsymbol{C}$ 上赋予一个拓扑的代数 $A$ 称为**可赋范代数**，如果它的拓扑能通过一个范数定义，而 $A$ 关于这个范数成为赋范代

数。为此必须且只须$A$的拓扑能由一个范数来定义，这个拓扑与$A$的向量空间结构协调，而且$A\times A$到$A$的映射$(x, y)\to xy$关于这个拓扑是连续的。事实上，这些条件显然是必要的。为证明它们是充分的，注意若$\|x\|$是定义$A$的拓扑的一个范数，则存在常数$a>0$，使对$A$中任何$x$，$y$，有$\|xy\|\leqslant a\cdot\|x\|\cdot\|y\|$(5.5.1)。如果以与$\|x\|$等价的范数(5.6.1) $a\|x\|=\|x\|_1$代替$\|x\|$，则显见$\|xy\|_1\leqslant\|x\|_1\cdot\|y\|_1$，于是在$A$没有单位元的情形下我们的断言成立。在$A$具有单位元$e\neq 0$的情形，对每个$x\in A$考虑左平移$L_x: y\to xy$，它是赋范空间$A$的一个连续自同态，且有$L_{x+x'}=L_x+L_{x'}$，对$\lambda\in \mathbf{C}$有$L_{\lambda x}=\lambda L_x$，以及$L_{xx'}=L_x\circ L_{x'}$；换言之，映射$x\to L_x$是代数$A$到$\mathscr{L}(A)$的同态，这里$\mathscr{L}(A)$是赋范空间$A$的连续自同态组成的代数。此外，这个同态还是单射，因为由关系$L_x=0$推出$x=xe=L_x(e)=0$。现在一方面注意到$\|L_x\|\leqslant a\|x\|$(5.7)，另一方面注意到$\|x\|=\|xe\|\leqslant\|L_x\|\cdot\|e\|$，即可由此推出，若令$\|x\|_2=\|L_x\|$，则$\|x\|_2$是$A$上的一个范数，它等价于给定的范数$\|x\|$(5.6.1)，而$A$关于$\|x\|_2$是赋范代数。

## 问　　题

1) 设$A$是$\mathbf{C}$上的由定义于$[0, 1]$且在$[0, 1]$上$k$次连续可导的复值函数组成的代数，试证在$A$上，函数

$$\|x\|=\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(h)}(t)|$$

是一个范数，而$A$关于这个范数是 Banach 代数。

2) 设$(\alpha_n)$是正数列，满足$\alpha_0=1$，$\alpha_{m+n}\leqslant\alpha_m\alpha_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{1/n}=0$。以$A$表示具有复系数的形式幂级数$x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\xi_n T^n$（其中$(\xi_n)$满足$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|<+\infty$）所成的集，试证$A$是$T$的形式幂级数所成的代数$C[[T]]$的子代数，而$\|x\|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|$是$A$上的范数，$A$关于这个范数是具有单位元的 Banach 代数。

3) 设$\mathscr{A}(X)$是在$\mathbf{C}$的闭圆盘$X: |z|\leqslant 1$上连续，在$X$的内部$|z|<1$内

解析的函数所成的集. 对 $\mathscr{A}(X)$ 的两个元 $x, y$, 对一切 $\zeta \in X$, 令

$$(x * y)(\zeta) = \zeta \int_0^1 x(\zeta - t\zeta) y(t\zeta) dt;$$

试证这个乘积使得 $\mathscr{A}(X)$ 成为没有单位元的交换代数, 且关于 $\mathscr{C}_C(X)$ 的范数在 $\mathscr{A}(X)$ 上的诱导范数,赋予上述代数结构的 $\mathscr{A}(X)$ 是 Banach 代数.

4) a) 设 $\Omega$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的满足下述条件的有限实值函数 $\omega$ 的集: $\omega$ 属于 $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{R}, \lambda)$(其中 $\lambda$ 是 Lebesgue 测度), $\omega(-t) = \omega(t)$, 在 $\boldsymbol{R}$ 上 $\omega(t) \geqslant 0$, 且 $\omega$ 在 $[0, +\infty[$ 上递减. 每个函数 $\omega \in \Omega$ 是属于 $\Omega$ 的阶梯函数的递增序列 $(\omega_n)$ 的一致极限. 令

$$V(\omega) = \omega(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) dt,$$

试证,若 $\omega_1, \omega_2$ 属于 $\Omega$, 则 $\omega_1 * \omega_2$ 也属于 $\Omega$, 且有 $V(\omega_1 * \omega_2) \leqslant V(\omega_1) V(\omega_2)$. (首先考虑这样的情形: 函数 $\omega_1, \omega_2$ 之一是阶梯函数.)

b) 以 $\mathscr{A}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 上满足下述条件的 $\lambda$ 可测复值函数 $f$ 所成的集: 至少对一个函数 $\omega \in \Omega$, 函数 $|f|^2 \omega^{-1}$ 是 $\lambda$ 可积的(约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$). 我们有 $\Omega \subset \mathscr{A}$. 对每个函数 $f \in \mathscr{A}$, 令

$$N_B(f) = \left(\inf_{\omega \in \Omega} V(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} (|f(t)|^2 / \omega(t)) dt\right)^{1/2},$$

试证也有

$$N_B(f) = \frac{1}{2} \inf_{\omega \in \Omega} \left(V(\omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} (|f(t)|^2 / \omega(t)) dt\right).$$

由此推断 $\mathscr{A}$ 是复向量空间, $N_B$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个半范数. (注意当 $a, b, \alpha, \beta$ 是正实数时,有

$$\frac{(a+b)^2}{\alpha + \beta} \leqslant \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta}. \ )$$

又证明 $\mathscr{A}$ 包含在交 $\mathscr{L}_C^1(R, \lambda) \cap \mathscr{L}_C^2(R, \lambda)$ 中,且

$$N_1(f) \leqslant N_B(f), \quad N_2(f) \leqslant N_B(f).$$

c) 设 $f$ 是属于 $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$ 的如下定义的函数: 对 $\alpha^n - 1 \leqslant x \leqslant \alpha^n$ ($n$ 是正整数), $f(x) = 1/n^2$; 在其余点处, $f(x) = 0$. 试证 $f$ 不属于 $\mathscr{A}$.

d) 对每个函数 $f \in \mathscr{A}$, 试证在 $\Omega$ 内存在函数 $\omega_f$, 使得

$$V(\omega_f) = \int \frac{|f(t)|^2}{\omega_f(t)} dt = N_B(f).$$

(考虑属于 $\Omega$ 的函数的序列 $(\omega_n)$, 使得 $V(\omega_n) = N_B(f)$, 并且使积分 $\int |f|^2 \omega_n^{-1} d\lambda$ 构成的序列趋于 $N_B(f)$, 然后考虑函数 $\limsup_{n \to \infty} \omega_n$ 并利用 Fatou 引理.)

e) $\lambda$ 可忽略函数所成的子空间$\mathscr{N}$包含在$\mathscr{A}$内，并且 $N_B$（通过商）在空间 $A=\mathscr{A}/\mathscr{N}$ 上给出一个范数. 试证 $A$ 关于这个范数（记作 $N_B(\tilde{f})$ 或 $\|\tilde{f}\|$）成为 Banach 空间.（若 $(f_n)$ 是属于$\mathscr{A}$的函数的 Cauchy 序列，证明序列 $(\omega_{f_n})$ 在 $\mathscr{L}^1$ 中收敛，且函数 $|f_n|^2\omega_{f_n}^{-1}$ 的类所成的序列在 $L^1$ 中收敛.）

f) 设 $I_n$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[-n, n]$， $\mathscr{A}|I_n$ 是属于$\mathscr{A}$且其支集包含在 $I_n$ 内的函数组成的集. 试证对于每个函数 $f\in\mathscr{A}$，函数序列 $(f\varphi_{I_n})$在$\mathscr{A}$中趋于 $f$. 通过 $N_B$ 在$\mathscr{A}|I_n$ 上定义的拓扑与通过半范数 $N_2$ 在 $\mathscr{A}|I_n$ 上定义的拓扑是等价的. 由此推断空间 $\mathscr{K}(\boldsymbol{R})$ 在$\mathscr{A}$内处处稠密，并且 Banach 空间 $A$ 是可分的.

g) 若 $f$ 与 $g$ 是属于$\mathscr{A}$的两个函数，试证

$$\frac{|f*g|^2}{\omega_f*\omega_g}\leqslant\frac{|f|^2}{\omega_f}*\frac{|g|^2}{\omega_g}.$$

由此推断 $N_B(f*g)\leqslant N_B(f)N_B(g)$，从而 $A$ 是交换 Banach 代数，称为 **Beurling 代数**. Beurling 代数没有单位元.

5) 设 $A$ 是没有单位元的赋范代数，在集 $\tilde{A}=A\times\boldsymbol{C}$ 上，通过令 $(x,\lambda)+(x',\lambda')=(x+x',\lambda+\lambda')$，$(x,\lambda)(x',\lambda')=(xx'+\lambda x'+\lambda' x,\lambda\lambda')$ 与 $\mu(x,\lambda)=(\mu x,\mu\lambda)$ 来定义 $\boldsymbol{C}$ 上的一个代数结构. 试证 $(0,1)$ 是 $\tilde{A}$ 的单位元，$\|(x,\lambda)\|=\|x\|+|\lambda|$ 是 $\tilde{A}$ 上的一个范数，$\tilde{A}$ 关于这个范数成为赋范代数；若 $A$ 是 Banach 代数，则 $\tilde{A}$ 也是 Banach 代数.

## 2. 赋范代数的元的谱

在本节中，我们假定 $A$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的赋范代数. 对 $x\in A$，复数 $\zeta$ 称为 $x$ 的**正则值**，如果 $x-\zeta e$ 在 $A$ 中具有逆元；如果复数 $\zeta$ 不是 $x$ 的正则值，则称为 $x$ 的**谱值**；$x$ 的谱值所成的集称为 $x$（在 $A$ 中）的**谱**，记作 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 或 $\mathrm{Sp}(x)$. 当 $A$ 是赋范空间 $E\neq\{0\}$ 的连续自同态所成的代数 $\mathscr{L}(E)$ 时，这些定义与 (11.1) 中的定义相符.

**(15.2.1)** 例. 对每个 $\lambda\in\boldsymbol{C}$，由定义得到，$\mathrm{Sp}_A(\lambda e)=\{\lambda\}$，且对一切 $x\in A$，有 $\mathrm{Sp}_A(x+\lambda e)=\mathrm{Sp}_A(x)+\lambda$.

**(15.2.2)** 设 $\zeta\in\boldsymbol{C}$，$x-\zeta e$ 是 $A$ 中的（左或右）零因子，则 $\zeta$ 是 $x$ 的谱值，但反之不然（11.1 问题 3）.

**(15.2.3)** 设 $P(X)=\alpha_0+\alpha_1 X+\cdots+\alpha_n X^n$ 是不等于常数的复

系数多项式，且假定 $\alpha_n \neq 0$。对 $x \in A$，令

$$P(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n.$$

对每个复数 $\mu$，可把 $P(X) - \mu$ 写成

$$P(X) - \mu = \alpha_n (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n),$$

其中 $\lambda_j$ 都是复数 (9.11.2)。因为 $A$ 的由 $e$ 与 $x$ 生成的子代数是交换的，所以

$$P(X) - \mu e = \alpha_n (x - \lambda_1 e) \cdots (x - \lambda_n e).$$

为使 $P(x) - \mu e$ 在 $A$ 中是可逆的，必须且只须所有 $x - \lambda_j e$ 在 $A$ 中是可逆的；因而 $\mu \in \mathrm{Sp}_A(P(x))$ 等价于：至少对于一个 $j$，有 $\lambda_j \in \mathrm{Sp}_A(x)$；由于 $P^{-1}(\mu) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，所以这个条件等价于 $\mu \in P(\mathrm{Sp}_A(x))$，因而

**(15.2.3.1)** $$\mathrm{Sp}_A(P(x)) = P(\mathrm{Sp}_A(x)).$$

假定 $0 \notin P(\mathrm{Sp}_A(x))$，从而 $P(x)$ 在 $A$ 中可逆. 设 $Q(X)$是另一复系数多项式，并令

$$R(X) = Q(X)/P(X),$$

于是我们能作出 $A$ 的元 $Q(x)(P(x))^{-1} = (P(x))^{-1}Q(x)$，把它记作 $R(x)$。此时有

**(15.2.3.2)** $$\mathrm{Sp}_A(R(x)) = R(\mathrm{Sp}_A(x)).$$

事实上，必要时用 $R - \mu$（其中 $\mu \in \boldsymbol{C}$）代替 $R$，就归结为证明 $R(x)$ 可逆当且仅当 $0 \notin R(\mathrm{Sp}_A(x))$，或等价地，$Q(x)$ 可逆当且仅当 $0 \notin Q(\mathrm{Sp}_A(x))$。但当 $Q$ 不是常数时，这可从(15.2.3.1)得到，而当 $Q$ 是常数时，这是显见的。

**(15.2.4)** 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的 Banach 代数，则

(i) $A$ 的可逆元所成的乘法群 $G$ 在 $A$ 内是开的，包含球 $\|x - e\| < 1$，并且 $A$ 的拓扑在 $G$ 上的诱导拓扑与 $G$ 的群结构协调.

(ii) 对每个 $x \in A$，$x$ 的正则值的集 $R_x = \boldsymbol{C} - \mathrm{Sp}_A(x)$在 $\boldsymbol{C}$ 内是开的，并且 $R_x$ 到 $A$ 的映射 $\zeta \to (x - \zeta e)^{-1}$ 是解析的.

(iii) 集 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 内是非空紧集，并且包含在球 $|\zeta| \leqslant \|x\|$

内.

对于 (i),只须模仿(8.3.2)的证明,并用 $A$ 代替那里的 $\mathscr{L}(E;F)$,用 $G$ 代替那里的 $H$. 这个证明还表明 $G$ 到自身的映射 $x \to x^{-1}$ 是可导的. 同样地, (ii) 和 (iii) 的证明与(11.1.2)和(11.1.3)的证明(除记号外)相同.

**(15.2.5)** (**Гельфанд-Mazur 定理**)设 $A$ 是 Banach 代数,若 $A$ 是域,则必有 $A = \boldsymbol{C}e$.

事实上, 若 $x \in A$, 则根据(15.2.4, (iii)), 存在 $\lambda \in \boldsymbol{C}$, 使得 $x - \lambda e$ 是不可逆的;然而因为 $A$ 是域, 所以 $x = \lambda e$, 换言之, $A = \boldsymbol{C}e$.

**(15.2.6)** 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的 Banach 代数, $x$ 是 $A$ 的可逆元, 满足 $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$, 则 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 包含在单位圆周 $\boldsymbol{U}$ 内.

事实上, 若 $B$ 是 $\boldsymbol{C}$ 内的球 $|\zeta| \leqslant 1$, 则由(15.2.4,(iii)) 得到 $\mathrm{Sp}(x) \subset B$ 与 $\mathrm{Sp}(x^{-1}) \subset B$. 由于 $\mathrm{Sp}(x^{-1}) = (\mathrm{Sp}(x))^{-1}$(15.2.3.2),我们的断言得证.

**(15.2.7)** (i) 设 $A$ 是赋范代数,则对每个 $x \in A$, 序列 $(\|x^n\|^{1/n})$ 收敛且其极限等于 $\inf\limits_n (\|x^n\|^{1/n})$.

(ii) 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的 Banach 代数,则数 $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(\|x^n\|^{1/n})$ 等于以 0 为中心的包含 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 的最小圆盘的半径.

我们来证明 (i). 令 $\alpha_n = \|x^n\|$, 若 $x$ 是幂零的,则所述命题显然成立,故可假定对一切 $n$ 有 $\alpha_n > 0$. 根据(15.1.1), 显见 $\alpha_{n+p} \leqslant \alpha_n \alpha_p$. 设 $m$ 是正整数,则每个正整数 $n$ 可唯一地写为 $n = p(n)m + q(n)$, 其中 $p(n)$ 与 $q(n)$ 是整数, $0 \leqslant q(n) < m$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)/n = 1/m$. 由上得到, $\alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{p(n)/n} \alpha_{q(n)}^{1/n}$, 且因当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时 $q(n)$ 只能取 $m$ 个不同的值,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup \alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{1/m}$. 由于这个不等式对一切整数 $m$ 均成立,从而推出

$$\lim_{n\to\infty}\sup \alpha_n^{1/n} \leqslant \inf_n \alpha_n^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf \alpha_n^{1/n},$$

这就证明了 (i)(12.7.11)。

对于 (ii), 若 $|\zeta| > \rho(x)$, 则对一切满足 $\rho(x) < r < |\zeta|$ 的 $r$, 当 $n$ 充分大时,有 $\|(\zeta^{-1}x)^n\| \leqslant (r/|\zeta|)^n$, 因而以 $(\zeta^{-1}x)^n$ 为通项的级数收敛且具有和 $(e-\zeta^{-1}x)^{-1}$(8.3.2.1), 从而 $\zeta \notin \mathrm{Sp}_A(x)$. 反之, 对 $0 < r < \rho(x)$, 函数 $(e-\zeta^{-1}x)^{-1}$ 不可能在 $|\zeta| > r$ 内有定义且解析, 因为函数 $\xi \to (e-\xi x)^{-1}$ 当 $|\xi|$ 充分小时解析且等于级数 $\sum\limits_n (\xi x)^n$ 的和,于是根据 (9.9.1) 与 (9.9.2), 该函数就会在 $|\xi| < r^{-1}$ 内等于级数 $\sum\limits_n (\xi x)^n$ 的和. 然而这是不可能的, 因为对于 $\rho(x)^{-1} < r'^{-1} < r^{-1}$,当 $n$ 充分大时,有 $\|(\xi x)^n\| \geqslant (|\xi| r')^n$; 若 $|\xi| > r'^{-1}$,则当 $n \to +\infty$ 时, 就有 $(|\xi| r')^n$ 趋于 $+\infty$.

$\rho(x)$ 称为 $x$ 的**谱半径**. 由于 (15.2.4, (iii)) 与(15.2.3.1), 对一切正整数 $k$, 我们有

**(15.2.7.1)** $$\rho(x) \leqslant \|x\|,$$

**(15.2.7.2)** $$\rho(x^k) \leqslant (\rho(x))^k.$$

**(15.2.8)** (i) 设 $A$, $B$ 是两个 Banach 代数,分别具有非零单位元 $e, e'$, $u: A \to B$ 是满足 $u(e) = e'$ 的代数同态,则对一切 $x \in A$,有 $\mathrm{Sp}_B(u(x)) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$.

(ii) 特别地,假定 $A$ 是 $B$ 的闭子代数,且与 $B$ 具有同一个单位元,则对一切 $x \in A$, 有 $\mathrm{Sp}_B(x) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$;此外, $\mathrm{Sp}_A(x)$的任一边界点都属于 $\mathrm{Sp}_B(x)$. 因而若 $\mathrm{Sp}_A(x)$没有内点,则 $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$.

对于 (i), 若 $\zeta \in \mathbf{C}$, $x - \zeta e$ 在 $A$ 中是可逆的,则 $u(x-\zeta e) = u(x) - \zeta e'$ 在 $B$ 中是可逆的,由此即得所述结论.

至于 (ii), 第一个论断是(i) 的特殊情形.为证明第二个论断,只须证明, 若 $\lambda_0$ 是 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 的边界点, 则 $x - \lambda_0 e$ 在 $B$ 中不是可逆的. 按照假定, 存在 $x$ (在 $A$ 中)的正则值所成的序列 $(\lambda_n)$, 使得 $(\lambda_n)$ 趋于 $\lambda_0$. 因而对每个正整数 $n$, 在 $A$ 中存在 $x - \lambda_n e$ 的逆元 $(x-\lambda_n e)^{-1}$,于是在 $B$ 中也存在 $x - \lambda_n e$ 的逆元. 若 $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}_B(x)$, 则序列 $((x-\lambda_n e)^{-1})$ 就会在 $B$ 内趋于 $x - \lambda_0 e$ 在 $B$ 中的逆元 $y$(15.2.4, (ii)), 然而由于 $A$ 在 $B$ 内是闭的, 所以 $y \in A$ 并且 $y$ 也

是 $x-\lambda_0 e$ 在 $A$ 中的逆元，而这是不可能的。

## 问　　题

1) 设 $A$ 是没有单位元的赋范代数，我们可以把 $A$ 看作 15.1 问题 5 中定义的赋范代数 $\tilde{A}$ 的一个闭双边理想. 对每个 $x\in A$，我们仍把 $x$ 在 $\tilde{A}$ 中的谱称为 $x$ 在 $A$ **中的谱**，并记作 $\mathrm{Sp}(x)$ 或 $\mathrm{Sp}_A(x)$，同样也把 $\rho(x)$（$x$ 看作 $\tilde{A}$ 的元素）称为 $x$ 的**谱半径**.

a) 设 $A$ 是 Banach 代数，令 $b=\inf\limits_{x\neq 0}(\|x^2\|/\|x\|^2)$，试证对一切 $x\in A$，有

$$b\leqslant \inf_{x\neq 0}\frac{\rho(x)}{\|x\|}\leqslant\sqrt{b}$$

b) 若 $x, y$ 是 Banach 代数 $A$ 的两个元，试证 $\mathrm{Sp}(xy)$ 与 $\boldsymbol{C}-\{0\}$ 的交等于 $\mathrm{Sp}(yx)$ 与 $\boldsymbol{C}-\{0\}$ 的交，因而 $\rho(yx)=\rho(xy)$（参阅 11.1，问题2）.

2) 设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数.

a) 若 $x\in A$ 具有左（相应地，右）逆元 $y$，则满足 $\|x'-x\|<\|y\|^{-1}$ 的每个 $x'\in A$ 具有左（相应地，右）逆元.

b) 设 $(x_n)$ 是 $A$ 中的序列，且每个 $x_n$ 都具有左（相应地，右）逆元 $y_n$. 若序列 $(x_n)$ 收敛于 $x$ 且序列 $(y_n)$ 有界，则 $x$ 具有左（相应地，右）逆元.

3) 设 $A$ 是赋范代数；对每个 $x\in A$，以 $L_x$（相应地，$R_x$）表示 $A$ 到自身的连续线性映射 $y\to xy$（相应地，$y\to yx$）. $x$ 称为**左**（相应地，**右**）**拓扑零因子**，如果 $L_x$（相应地，$R_x$）不是 $A$ 到它的象上的同胚.

a) 给出左拓扑零因子不是左零因子的例（参阅 11.1 问题 4）.

b) 对每个 $x\in A$，令

$$\lambda(x)=\inf_{y\neq 0}\|xy\|/\|y\|,\quad \lambda'(x)=\inf_{y\neq 0}\|yx\|/\|y\|,$$

试证

$$|\lambda(x)-\lambda(y)|\leqslant\|x-y\|,\quad |\lambda'(x)-\lambda'(y)|\leqslant\|x-y\|,$$

$$\lambda(x)\lambda(y)\leqslant\lambda(xy)\leqslant\|x\|\lambda(y),\quad \lambda'(x)\lambda'(y)\leqslant\lambda'(xy)\leqslant\lambda'(x)\|y\|.$$

由此推断左（相应地，右）拓扑零因子所成的集在 $A$ 内是闭的.

c) 设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数. 若元 $x\in A$ 是左不可逆的，但它是左可逆元序列 $(x_n)$ 的极限，则 $x$ 是右拓扑零因子（利用问题 2b)）. 由此推断 $A$ 中既非可逆元又非拓扑零因子的元所成的集是开的.

d) 试证在代数 $\mathscr{A}(X)$（15.1.5）中，恒等函数 $1_X$ 既不是可逆元，又不是拓扑零因子.

4）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数，并且 $A$ 中唯一的右拓扑零因子是 0，试证此时 $A = \mathbf{C}e$（考虑 $\mathrm{Sp}(x)$ 的边界点并利用问题 3c)）.

5）a) 在具有单位元的 Banach 代数 $A$ 中，元 $x$ 称为**拓扑幂零元**，如果序列 $(x^n)_{n\geq 1}$ 趋于 0；为使 $x$ 是拓扑幂零的，必须且只须 $\rho(x)<1$.

b) 元 $x \in A$ 称为**拟幂零元**，如果 $\rho(x) = 0$；这等价于对任意纯量 $\lambda$，当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，$(\lambda x)^n$ 趋于 0. 拟幂零元既是左拓扑零因子，又是右拓扑零因子.

c) 设 $u$ 是 Banach 空间 $E$ 的连续自同态，试证，若对一切 $t \in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|u^n(t)\|^{1/n} = 0$，则 $u$ 在 Banach 代数 $A = \mathscr{L}(E)$ 中是拟幂零的.（注意对 $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$，对一切 $t \in E$，以 $u^n(t)/\lambda^{n+1}$ 为通项的级数收敛，并利用 Banach-Steinhaus 定理(12.16.5).）

6）设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$(e_n)_{n\geq 1}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基，$A$ 是 Banach 代数 $\mathscr{L}(E)$.

a) 设 $u \in A$ 是满足 $u(e_n) = 2^{-n}e_{n+1}$ 的自同态，试证 $u$ 是拟幂零的，然而不是幂零的.

b) 定义序列 $(\alpha_n)$ 如下：若 $n$ 是 $2^k$ 与某个奇数的乘积，则令 $\alpha_n = e^{-k}$. 设 $v \in A$ 是满足 $v(e_n) = \alpha_n e_{n+1}$ 的自同态，试证 $v$ 不是拟幂零的.（注意 $\|v^k\| = \sup\limits_m (\alpha_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m+k-1})$ 并计算 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^r-1}$ 的值.）

c) 对每个整数 $k$，设 $v_k \in A$ 是如下定义的自同态：若 $n$ 是 $2^k$ 与某个奇数的乘积，则令 $v_k(e_n) = 0$，否则令 $v_k(e_n) = \alpha_n e_{n+1}$. 试证 $v_k$ 是幂零的，且 $\|v - v_k\|$ 在 $A$ 内趋向于 0，因而 $A$ 的拟幂零元所成的集不是闭的.

7）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数. 使得 $\rho(ax) = 0$ 对一切 $a \in A$ 成立的 $x \in A$ 所成的集 $\mathfrak{R}$ 称为 $A$ 的**根基**. 此时对一切 $a \in A$，也有 $\rho(xa) = 0$，并且 $\mathfrak{R}$ 是闭双边理想，它就是使得 $e - ax$（对每个 $a \in A$）是可逆的 $x$ 的集（注意若 $u$ 是可逆的且 $x \in \mathfrak{R}$，则对每个 $a \in A$，$u - ax$ 是可逆的）. $\mathfrak{R}$ 的元都是拟幂零的；若 $\mathfrak{J}$ 是一个左理想并且它的所有元都是拟幂零的，则 $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}$. 若 $\mathfrak{R} = \{0\}$，则 $A$ 称为**无根代数**. 代数 $A/\mathfrak{R}$ 是无根的. 若 $\pi: A \to A/\mathfrak{R}$ 是典则同态，则对一切 $x \in A$，有 $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_{A/\mathfrak{R}}(\pi(x))$.

8）设 $E$ 是 Hilbert 空间，$A = \mathscr{L}(E)$ 是 $E$ 的连续自同态组成的 Banach 代数.

a) 设 $u \in A$，试证若 $u$ 不是单射，则 $u$ 是左零因子；若 $u(E)$ 在 $E$ 内不稠密，则 $u$ 是右零因子. 若 $u$ 是单射，$u(E)$ 在 $E$ 内稠密且不等于 $E$，则 $u$ 是左右拓扑零因子，但不是零因子（注意此时存在 $E$ 的元的序列 $(x_n)$，使对一切 $n$ 有

$\|x_n\| = 1$，并且 $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = 0$）．考虑逆命题．

b）试证，若 $u$ 是满射而非单射，或 $u$ 是单射且 $u(E)$ 在 $E$ 内是闭的并且不等于 $E$，则 $u$ 是 $A$ 的非可逆元组成的集的内点(利用问题 3c))．

c）试证 $A$ 是无根的(证明若 $A$ 的根基不等于 $\{0\}$，则它含有一个秩为 1 的正交投影算子)．

9）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数．对每个 $x\in A$，级数 $e+(x/1!)+(x^2/2!)+\cdots+(x^n/n!)+\cdots$ 收敛；若以 $\exp(x)$ 表示此级数的和，则对 $A$ 中两个可交换的元 $x,y$，有 $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$；特别，$\mathbf{C}$ 在映射 $\zeta\to\exp(x\zeta)$ 下的象是包含在 $A$ 的可逆元所成的群 $G$ 之内的连通子群．

对每个满足 $\|e-x\|<1$ 的 $x\in A$，通项为 $-(e-x)^n/n\,(n\geqslant 1)$ 的级数收敛；如果以 $\log x$ 记此级数的和，则 $\exp(\log x)=x$．

试证 $G$ 的由 $\exp(A)$ 生成的子群是 $G$ 的幺元的连通分支；考虑 $A$ 为交换的情形．为使元 $x\in A$ 具有 $\exp(y)$ 的形式(其中 $y$ 是 $A$ 的某个元)，必须且只须 $x$ 属于 $G$ 的某个交换连通子群(为证明所述条件是充分的，归结为 $A$ 是交换的情形)．

10）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数，$G$ 是 $A$ 的可逆元所成的群，$G_0$ 是 $G$ 的幺元的连通分支．

a）试证，若 $x\in A$ 满足：对某个正整数 $n$，有 $x^n=e$，则 $x\in G_0$．（注意 $x$ 的谱是有限的．由此推断使得 $\lambda x+(1-\lambda)e$ 为可逆的 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的集是连通的．）

b）假定 $A$ 是交换的，试证 $G/G_0$ 的每个异于幺元的元都是无限阶的．(注意若 $x\in G$ 且 $x^n\in G_0$，则对某个 $y\in A$ 有 $x^n=\exp(y)$，由此 $(x\exp(-(1/n)y))^n=e$，并利用 a)．)

11）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的交换 Banach 代数，$x$ 是 $A$ 的元，$K=\mathrm{Sp}_A(x)$．假定 $K$ 具有下述性质：存在 $K$ 的基本邻域系 $(U_n)$，使得每个 $U_n$ 的边界是某些不相交的简单闭曲线的并，这些闭曲线是回路 $\gamma_{nk}(1\leqslant k\leqslant p_n)$ 的象；$U_{n+1}$ 的边界包含在 $U_n$ 内，且若函数 $F$ 在一个复 Banach 空间中取值且在 $\bar{U}_n-U_{n+1}$ 的一个邻域内解析，则有

$$\sum_{k=1}^{p_n}\int_{\gamma_{nk}}F(\zeta)d\zeta=\sum_{k=1}^{p_{n+1}}\int_{\gamma_{n+1,k}}F(\zeta)d\zeta;$$

最后，若 $F$ 在 $U_n$ 内解析，则有

$$\sum_{k=1}^{p_n}\int_{\gamma_{nk}} F(\zeta)d\zeta = 0,$$

并且对一切 $z\in U_n$,有

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{p_n}\int_{\gamma_{nk}}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

(利用第九章附录的问题 4b)能证明这些性质;关于別的证明，参看第二十四章.)

a) 设 $V$ 是 $K$ 的一个邻域，$f$ 是 $V$ 内的(在 $\mathbf{C}$ 中取值的)解析函数,试证对满足 $U_n\subset V$ 的一切 $n$, $A$ 的元

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{p_n}\int_{\gamma_{nk}} f(\zeta)(\zeta e - x)^{-1}d\zeta$$

不依赖于 $n$，把它记作 $f(x)$. 若 $W$ 是 $K$ 的另一邻域，$g$ 是 $W$ 内的(在 $\mathbf{C}$ 中取值的)解析函数,且在 $K$ 的包含在 $V\cap W$ 内的某个邻域上有 $f(\zeta)=g(\zeta)$，则 $f(x)=g(x)$.

b) 试证若 $f(\zeta)=1$，则 $f(x)=e$; 若 $f(\zeta)=\zeta$，则 $f(x)=x$. (利用 Cauchy 定理 (9.6.3) 归结为沿以 0 为中心且半径大于 $\rho(x)$ 的一个圆周上的积分,使得能把 $(\zeta e - x)^{-1}$ 展开为 $\zeta^{-1}$ 的幂级数.)

c) 试证，若 $h=f+g$ (相应地，$h=fg$)，其中 $f$ 与 $g$ 在 $K$ 的一个邻域内解析,则 $h(x)=f(x)+g(x)$ (相应地，$h(x)=f(x)g(x)$). (证明第二个论断时，借助邻域 $U_n$ 表示 $f(x)$, 并借助邻域 $U_{n+1}$ 表示 $g(x)$, 注意

$$(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda-\mu}((\mu e - x)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1})$$

并利用 Lebesgue-Fubini 定理.)

d) 若 $f$ 在 $\mathbf{C}$ 中取值并在 $K$ 的一个邻域内解析,则 $\mathrm{Sp}(f(x)) = f(\mathrm{Sp}(x))$. (注意若 $\lambda\in\mathrm{Sp}(x)$, 则对适当选取的函数 $g$，有 $f(\lambda)e - f(x) = (\lambda e - x)\times g(x)$. )特别是,为使 $f(x)$ 在 $A$ 中可逆,必须且只须在 $\mathrm{Sp}(x)$ 内有 $f(\zeta)\neq 0$.

e) 设 $f$ 是在 $\mathrm{Sp}(x)$ 的一个邻域内解析的函数，$g$ 是在 $\mathrm{Sp}(f(x))$ 的一个邻域内解析的函数,试证，必要时限制在 $f$ 有定义的开集上, $h=g\circ f$ 有定义并且 $h(x)=g(f(x))$.

f) 特别是,若 $\mathrm{Sp}(x)$ 包含在圆盘 $|\zeta|<1$ 内,则对每个实数 $\alpha$,级数

$$e + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

在 $A$ 中收敛于一个元 $y$，它与 $x$ 可交换，并且使得 $\mathrm{Sp}(y)$ 是 $\mathrm{Sp}(x)$ 在函数 $\zeta\to(1-\zeta)^{\alpha}$（取 $\zeta=0$ 时其值等于 1 的分支）下的象．特别是，若 $\alpha=1/m$，其中 $m$ 是正整数，则 $y^m=e-x$，因而我们令 $y=(e-x)^{1/m}$.

12) a) 在问题 11 的假定下，并设 $(K_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 $\mathrm{Sp}(x)$ 分解为紧集的一个划分；对每个 $j$，设 $U_j$ 是 $K_j$ 的邻域，并且 $U_j$ 两两不相交．设 $f_j$ 是在 $U_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的并内解析的函数，它在 $U_j$ 上等于 1，而在 $U_k(k\neq j)$ 上等于 0． 试证 $e_j=f_j(x)$ 是 $A$ 中的幂等元，且当 $j\neq k$ 时有 $e_je_k=0$，并且 $e=\sum_{j=1}^{n}e_j$.

b) 设 $\lambda$ 是 $\mathrm{Sp}(x)$ 的孤立点，

$$(\zeta e-x)^{-1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\zeta-\lambda)^n a_n \quad (a_n\in A)$$

是 $(\zeta e-x)^{-1}$ 在 $\lambda$ 的一个邻域内的 Laurent 级数展开式．试证如果在 $\mathrm{Sp}(x)$ 的由 $\{\lambda\}$ 与 $\mathrm{Sp}(x)-\{\lambda\}$ 所构成的划分中，$e_\lambda$ 对应于 $\{\lambda\}$ 是幂等的，则对 $k\geqslant 0$，有

$$e_\lambda(\lambda e-x)^k=(-1)^k a_{-k-1}.$$

c) 设 $B$ 是 $A$ 的由 $e$ 与 $x$ 生成的子代数，则为使 $\mathrm{Sp}(x)$ 只有有限个点（它们都是 $(\zeta e-x)^{-1}$ 的极点），必须且只须 $B$ 是有限维的．（若 $(\zeta e-x)^{-1}=\sum_{j=1}^{r}F_j(\zeta)a_j$，其中 $F_j$ 是纯量有理函数，则 $x^n$ 是这些 $a_j$ 的线性组合．反之，若 $B$ 是有限维的，则存在不恒等于零的多项式 $f$，使得 $f(x)=0$．此时 $\mathrm{Sp}(x)$ 包含在 $f$ 的零点集内；若 $\lambda$ 是 $f$ 的 $p$ 阶零点，证明还有 $(\lambda e-x)^p e_\lambda=0$．）

d) 设 $U$ 是 $\mathrm{Sp}(x)$ 的开邻域，它只有有限个连通分支 $U_j$，则为使在 $U$ 内解析的函数 $f$ 满足 $f(x)=0$，必须且只须下列条件得到满足：

1° 对于使得 $\mathrm{Sp}(x)\cap U_j$ 或为无限或含有 $(\zeta e-x)^{-1}$ 的一个本性奇点的每个 $U_j$，有 $f|U_j=0$；

2° $(\zeta e-x)^{-1}$ 的每个 $p$ 阶极点是 $f$ 的阶数不小于 $p$ 的零点．（证明条件 2° 的必要性时，作如同 c) 中的推理．）

13) 设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数，$U$ 是 $\mathbf{C}$ 内的开集，试证使得 $\mathrm{Sp}_A(x)\subset U$ 的 $x\in A$ 的集 $\Omega$ 在 $A$ 内是开的．若 $f$ 在 $U$ 内解析，则 $\Omega$ 到 $A$ 的映射 $x\to f(x)$ 是任意次可导的.

14) 设 $A$ 是具有单位元（记作 1）的 Banach 代数.

a) 试证，对 $A$ 的每对元 $x,y$ 与每个 $\zeta\in\mathbf{C}$，有 $\rho(e^{\zeta x}ye^{-\zeta x})=\rho(y)$.

b) 试证，若 $x, y$ 满足：对一切 $\zeta\in\mathbf{C}$，有

$$\|e^{\zeta x}ye^{-\zeta x}\|\leqslant k\|y\|$$

($k$ 是正常数)，则 $xy = yx$. (利用 Liouville 定理与函数 $\zeta\to e^{\zeta x}ye^{-\zeta x}$ 在 $\zeta=0$ 的邻域内的 Taylor 展开式.)

c) 设对一切 $x\in A$ 有 $\|x^2\| = \|x\|^2$，试证 $A$ 是交换的. (注意此时对一切 $x\in A$ 有 $\rho(x) = \|x\|$，并把这个关系式应用到 $e^{\zeta x}ye^{-\zeta x}$ 上；然后利用 a) 与 b).)

d) 试证，若存在正常数 $k$，使对 $A$ 的任何一对元 $x, y$，有 $\|yx\|\leqslant k\|xy\|$，则 $A$ 是交换的(以 $e^{\zeta x}y$ 代替 $y$，以 $e^{-\zeta x}$ 代替 $x$，应用所述的不等式并利用 b)).

e) 设 $a\in A$ 满足：对一切 $\zeta\in\mathbf{C}$ 与 $x\in A$，有

$$\|(a+\zeta\cdot 1)x\|\leqslant\|x(a+\zeta\cdot 1)\|,$$

试证此时 $a$ 属于 $A$ 的中心. (证明对一切 $\zeta\in\mathbf{C}$ 与一切整数 $n\geqslant n_0$ (其中 $n_0$ 依赖于 $\zeta$)，对一切 $y\in A$，有

$$\left\|\left(1+\frac{\zeta}{n}a\right)^n y\left(1+\frac{\zeta}{n}a\right)^{-n}\right\|\leqslant\|y\|,$$

然后令 $n$ 趋于 $+\infty$ 并利用 b).)

15) 设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数，$C$ 是 $A$ 的含有 $e$ 的交换 Banach 子代数，试证存在 $A$ 的交换 Banach 子代数 $B$，使得 $B$ 包含 $C$ 且对一切 $x\in C$，有 $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$.

## 3. 交换 Banach 代数的特征标与谱. Гельфанд 变换

设 $A$ 是 ($\mathbf{C}$ 上的) 交换代数. 代数 $A$ 到 $\mathbf{C}$ 的任一不恒等于零的同态 $\chi$，称为 $A$ 的一个**特征标**. 因为对一切纯量 $\lambda$ 有 $\chi(\lambda x) = \lambda\chi(x)$，所以 $\chi$ 不恒等于零这一条件等价于 $\chi(A) = \mathbf{C}$. 若 $A$ 具有单位元 $e\neq 0$，则应有 $\chi(e)\neq 0$ (否则就会对一切 $x\in A$ 都有 $\chi(x) = \chi(ex) = \chi(e)\chi(x) = 0$)；因为 $(\chi(e))^2 = \chi(e^2) = \chi(e)$，由此推出 $\chi(e) = 1$.

$A$ 的理想 $\mathfrak{m}\neq A$ 称为**极大理想**，如果不存在满足下述条件的理想 $\mathfrak{n}$：$\mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}$，$\mathfrak{n}\neq A$ 且 $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{n}$. 若 $A$ 具有单位元，则 $\mathfrak{m}$ 是极大理想

等价于 $A/\mathfrak{m}$ 是(交换)域。

**(15.3.1)** 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的交换 Banach 代数，则

(i) 对每个 $x \in A$ 与 $A$ 的每个特征标 $\chi$，有 $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_A(x)$.

(ii) $A$ 的每个特征标 $\chi$ 是范数为 1 的连续线性形式.

(iii) 映射 $\chi \to \chi^{-1}(0)$ 是 $A$ 的特征标的集到 $A$ 的极大理想的集上的双射(因而 $A$ 的极大理想都是闭的).

论断 (i) 是 (15.2.8,(i)) 的特殊情形.由此并由 (15.2.4,(iii)) 推出 $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$，这表明(5.5.1) $\chi$ 是范数不大于 1 的连续线性形式；又由于 $\chi(e)=1$ 与 $\|e\|=1$，所以 $\|\chi\|=1$. 最后，由于 $\chi(A)=\boldsymbol{C}$，故商代数 $A/\mathfrak{m}$ 是同构于 $\boldsymbol{C}$ 的域，从而 $\mathfrak{m}$ 是极大的.反之，考虑 $A$ 的极大理想 $\mathfrak{n}$. 我们首先证明它是闭的，而这是下述命题的推论:

**(15.3.1.1)** 设 $\mathfrak{a}$ 是 $A$ 的理想，且 $\mathfrak{a} \neq A$，则 $\mathfrak{a}$ 的闭包 $\bar{\mathfrak{a}}$ 是一个不等于 $A$ 的理想.

事实上，余集 $\complement\mathfrak{a}$ 包含 $A$ 的可逆元所成的集 $G$，而 $G$ 在 $A$ 内是开的 (15.2.4,(i))，因而 $G$ 包含在 $\bar{\mathfrak{a}}$ 的余集内.

把这条引理应用于极大理想 $\mathfrak{n}$，因为 $\bar{\mathfrak{n}} \supset \mathfrak{n}$ 且 $\bar{\mathfrak{n}} \neq A$，这表明 $\bar{\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}$. 于是商赋范代数 (15.1) $A/\mathfrak{n}$ 是 Banach 代数(12.14.9)；由于 $\mathfrak{n}$ 是极大的，故 $A/\mathfrak{n}$ 是域. 于是由 Гельфанд-Mazur 定理 (15.2.5)，$A/\mathfrak{n}$ 同构于 $\boldsymbol{C}$，换言之，存在唯一的同态 $\chi: A \to \boldsymbol{C}$，使得 $\chi(e)=1$，并且 $\chi^{-1}(0)=\mathfrak{n}$，从而 (iii) 得证.

**(15.3.2)** 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的 Banach 代数，则 $A$ 的特征标的集 $\boldsymbol{X}(A)$ 是 $A'$ 的单位球 $\|\chi'\| \leqslant 1$ 的子集，这里 $A'$ 是 Banach 空间 $A$ 的对偶空间，而且 $\boldsymbol{X}(A)$ 在 $A'$ 内关于弱拓扑 (12.15) 是闭的. 若 $A$ 是可分的，则 $\boldsymbol{X}(A)$ 关于弱拓扑是可度量化的并且是紧的.

根据 (12.15.9)，问题归结为证明 $\boldsymbol{X}(A)$ 是 $A'$ 的闭子集，或等价地，证明若 $u$ 属于 $\boldsymbol{X}(A)$ 在 $A'$ 内关于弱拓扑的闭包，则对 $A$ 中的 $x, y$，有 $\langle xy, u\rangle=\langle x, u\rangle\langle y, u\rangle$，从而 $\langle e, u\rangle=1$；这一点可由 $A'$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $u \to \langle x, u\rangle$ (对每个 $x \in A$) 的连续性与恒等式

延拓原理得到.

赋予由 $A'$ 的弱拓扑诱导的拓扑的集 $\mathbf{X}(A)$，称为 $A$ 的**谱**. 对于每个 $x\in A$，我们把 $\mathbf{X}(A)$ 到 $\mathbf{C}$ 的映射 $\chi\to\chi(x)$ 记作 $\mathscr{G}x$ 或 $\mathscr{G}_A\chi$; $\mathscr{G}\chi$ 称为 $\chi$ 的 Гельфанд **变式**，而 $A$ 到 $\mathbf{C}^{X(A)}$ 的映射 $x\to\mathscr{G}x$ 称为 Гельфанд **变换**. 于是按定义，对一切 $x\in A$ 与一切 $\chi\in\mathbf{X}(A)$，有

**(15.3.3)** $$(\mathscr{G}x)(\chi)=\chi(x).$$

**(15.3.4)** 设 $A$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的可分交换 Banach 代数，则

(i) Гельфанд 变换 $x\to\mathscr{G}x$ 是 Banach 代数 $A$ 到 Banach 代数 $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}(\mathbf{X}(A))$ 的连续同态，它满足 $\|\mathscr{G}x\|=\rho(x)\leqslant\|x\|$，并且 $\mathscr{G}e$ 是等于 1 的常值函数.

(ii) $\mathbf{X}(A)$ 上连续函数 $\mathscr{G}x$ 的值的集等于 $\mathrm{Sp}_A(x)$. 特别，为使 $x$ 是可逆的，必须且只须 $\mathscr{G}x$ 在 $\mathbf{X}(A)$ 上不取零值.

由弱拓扑的定义，对每个 $x\in A$，映射 $\chi\to(\mathscr{G}x)(\chi)=\chi(x)$ 在 $\mathbf{X}(A)$ 内是连续的; 进而还有
$$(\mathscr{G}(xy))(\chi)=\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)=((\mathscr{G}x)(\chi))((\mathscr{G}y)(\chi)),$$
故 $\mathscr{G}(xy)=(\mathscr{G}x)(\mathscr{G}y)$. 关系式 $\mathscr{G}e=1$ 是显然的. 等式 $\|\mathscr{G}x\|=\rho(x)$ 由 (ii) 与 $\rho(x)$ 的定义 (15.2.7) 得到. 现在证明 (ii) 的第一个论断. 我们已知，对于 $x\in A$ 与 $\chi\in\mathbf{X}(A)$，有 $\chi(x)\in\mathrm{Sp}(x)$ (15.3.1). 反之我们证明，对每个 $\lambda\in\mathrm{Sp}(x)$，存在特征标 $\chi$，使得 $\chi(x)=\lambda$，或等价地使得 $\chi(x-\lambda e)=0$. 由于 $x-\lambda e$ 不是可逆的，所以由元 $x-\lambda e$ 生成的理想 $A(x-\lambda e)$ 不等于 $A$. 考虑到 (15.3.1, (iii))，即见问题归结为证明下述引理:

**(15.3.4.1)** 在具有单位元 $e\neq 0$ 的可分交换 Banach 代数 $A$ 内，每个理想 $\mathfrak{a}\neq A$ 包含在一个极大理想内.

设 $(x_n)$ 是 $A$ 内的处处稠密序列，用归纳法定义异于 $A$ 的闭理想的递增序列 $(\mathfrak{a}_n)_{n\geqslant 0}$ 如下: 取 $\mathfrak{a}_0=\bar{\mathfrak{a}}$ (由于 (15.3.1.1)，$\mathfrak{a}_0$ 不等于 $A$); 在商 Banach 代数 $A/\mathfrak{a}_{n-1}$ 的，考虑 $x_n$ 的象 $\bar{x}_n$ 与 $\bar{x}_n$ 的谱 (由于 (15.2.4)，它是非空的) 中的一个元 $\lambda_n$，因而 $\bar{x}_n-\lambda_n\bar{e}$ 在 $A/\mathfrak{a}_{n-1}$ 中不是可逆的，其中 $\bar{e}$ 是 $e$ 在 $A/\mathfrak{a}_{n-1}$ 内的典则象. 由此推出

$A$ 的由 $\mathfrak{a}_{n-1}$ 与 $x_n - \lambda_n e$ 生成的理想 $\mathfrak{a}'_n$ 不等于 $A$，因而 (15.3.1.1) $\mathfrak{a}_n = \overline{\mathfrak{a}'_n}$ 也不等于 $A$。于是 $\mathfrak{a}_n(n \geqslant 0)$ 的并 $\mathfrak{m}'$ 也是不等于 $A$ 的理想，从而 $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}'}$ 也是如此。我们证明 $\mathfrak{m}$ 是极大的从而使所述命题得证。现在，若 $e''$ 是 $A/\mathfrak{m}$ 的单位元，$x''_n$ 是 $x_n$ 在 $A/\mathfrak{m}$ 内的象，则根据构造这些元的方法得知 $x''_n = \lambda_n e''$，即 $x''_n$ 属于 $A'' = A/\mathfrak{m}$ 的闭子代数 (5.9.2)$\boldsymbol{C}e''$，由于这些 $x''_n$ 构成 $A''$ 的处处稠密子集 (3.11.4)，所以 $A'' = \boldsymbol{C}e''$，从而 $\mathfrak{m}$ 是极大的。

**(15.3.5)** 附注。注意 Гельфанд 变换 $x \to \mathscr{G}x$ 不一定是单射。例如，若 $x$ 是幂零的且不等于零，设 $x^k = 0$，则 $\mathrm{Sp}(x)$ 在 $\zeta \to \zeta^k$ 下的象是 $\{0\}$((15.2.3.1) 与 (15.2.1))，因而 $\mathrm{Sp}(x) = \{0\}$，于是对一切特征标 $\chi$ 有 $\chi(x) = 0$，然而 $x \neq 0$。这个例子也表明，$\|\mathscr{G}x\| = \|x\|$ 不一定成立。甚至若 $\mathscr{G}$ 是等距(此时象 $\mathscr{G}(A)$ 在 $\mathscr{G}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{X}(A))$ 内是闭的 (3.14.4))，$\mathscr{G}(A)$ 也可能不等于 $\mathscr{G}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{X}(A))$(15.3.8)。

**(15.3.6)** 假定存在元 $x_0 \in A$，它连同 $e$ 生成 $A$ 的一个处处稠密子代数(换言之，当 $P$ 取遍复系数多项式集 $\boldsymbol{C}[X]$ 时，$p(x_0)$ 所成的子代数在 $A$ 内稠密)，则映射 $\chi \to \chi(x_0)$ 是 $\boldsymbol{X}(A)$ 到 $\mathrm{Sp}_A(x_0)$ 上的一个同胚。

注意当 $P$ 的系数形如 $\alpha + \beta i$，其中 $\alpha$ 与 $\beta$ 为有理数时，相应的 $P(x_0)$ 在 $A$ 内就已构成一个处处稠密集，因而 $A$ 是可分的。由于映射 $\chi \to \chi(x_0)$ 是连续的且是满射 (15.3.4)，并且 $\boldsymbol{X}(A)$ 是紧可度量化的 (15.3.2)，所以问题归结为证明这个映射也是单射 (3.17.12)。然而若对两个特征标 $\chi_1, \chi_2$ 有 $\chi_1(x_0) = \chi_2(x_0)$，则对一切多项式 $P$ 有 $\chi_1(P(x_0)) = \chi_2(P(x_0))$，由于 $\chi_1$，$\chi_2$ 在 $A$ 上连续，所以 $\chi_1 = \chi_2$ (3.15.2)，(15.3.6)得证。

**(15.3.7)** 谱与 Гельфанд 变换的例。设 $X$ 是可度量化紧空间，$A = \mathscr{G}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 是 $X$ 上的连续复值函数所成的 Banach 代数。此时 $A$ 的特征标是 Dirac 测度 $\varepsilon_x(x \in X)$(13.1.3)，而且映射 $x \to \varepsilon_x$ 是 $X$ 到谱 $\boldsymbol{X}(A)$上的同胚。注意，事实上我们有 $A' = M_{\boldsymbol{C}}(X)$，这是因为 $X$ 上的每个测度有界 (13.20)；且由定义，$A'$ 上的弱拓扑就是粗疏拓扑 (13.4)。于是，一个特征标就是一个测度 $\mu \neq 0$ (因为

$\mu(1) = 1$)；我们证明它的支集(13.19)是单点集.事实上，如果它的支集含有两个点 $a \neq b$，就会存在 $a$ 的邻域 $U$ 与 $b$ 的邻域 $V$，使得 $U$ 与 $V$ 没有公共点，于是存在属于 $A$ 的函数 $f$ 与 $g$，其支集分别包含在 $U$ 与 $V$ 内，并且使得 $\mu(f) \neq 0$，$\mu(g) \neq 0$. 然而此时有 $fg = 0$，从而 $\mu(fg) = 0$，而这与假定 $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ 矛盾.若 $\text{Supp}(\mu) = \{x\}$，则关系式 $\varepsilon_x(f) = 0$ 蕴涵 $\mu(f) = 0$，因而（附录4.15)存在纯量 $\alpha$，使得 $\mu = \alpha\varepsilon_x$，但因 $\mu(1) = 1$，故必有 $\alpha = 1$.易于看出映射 $x \to \varepsilon_x$ 的连续性：对每个函数 $f \in A$，有

$$\langle f, \varepsilon_x - \varepsilon_{x_0} \rangle = f(x) - f(x_0),$$

由于 $f$ 连续，所以对每个 $\delta > 0$，存在 $x_0$ 在 $X$ 内的邻域 $V$，使对一切 $x \in V$，有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \delta$. 为了完成 $x \to \varepsilon_x$ 是同胚的证明，只须证明这个映射是单射(12.3.6)，而这是显然的.若 $x_1 \neq x_2$，则 $\varepsilon_{x_1}$ 与 $\varepsilon_{x_2}$ 具有不同的支集.因为对 $x \in X$ 与 $f \in A$，有 $(\mathscr{G}f)(\varepsilon_x) = \varepsilon_x(f) = f(x)$，所以当我们通过映射 $x \to \varepsilon_x$ 使 $X$ 与 $\boldsymbol{X}(A)$ 等同时，Гельфанд 变换就成为恒等映射.

**(15.3.8)** 设 $D$ 是 $\boldsymbol{C}$ 内的单位闭圆盘 $|\zeta| \leqslant 1$，考虑 $\mathscr{G}_{\boldsymbol{C}}(D)$ 的闭子代数 $A = \mathscr{A}(D)$，它由在 $D$ 上连续，在 $D$ 的内部解析的函数所组成(15.1.5). 我们证明 $A$ 的特征标也是 Dirac 测度 $\varepsilon_x(x \in D)$ 在 $A$ 上的限制，由此就得到(15.3.7)，$x \to \varepsilon_x$ 仍是 $D$ 到谱 $\boldsymbol{X}(A)$ 上的同胚. 设 $f_0$ 是 $D$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的典则单射 $\zeta \to \zeta$，则只须证明 $f_0$ 与 $A$ 的单位元 1 生成 $A$ 的一个处处稠密子代数：事实上，显然 $\text{Sp}_A(f_0)$ 等于 $D$，因而由(15.3.6)即得所需的结论. 现在，以 $A_0$ 表示 $A$ 的下述函数所组成的子代数，这些函数是在 $D$(在 $\boldsymbol{C}$ 内)的一个邻域内解析的函数在 $D$ 上的限制. 这个子代数在 $A$ 内是处处稠密的，因为对每个正整数 $n$ 与每个函数 $f \in A$，$((n+1)/n)D$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $\zeta \to f((n/(n+1))\zeta)$ 在 $D$ 上的限制 $f_n$ 显然属于 $A_0$，且当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，$f_n$ 在 $D$ 内一致收敛于 $f$(3.16.5). 另一方面，每个函数 $f \in A_0$ 是由多项式 $P_n$（例如它在点 0 处的 Taylor 级数的前 $n$ 项的和)组成的序列在 $D$ 内的一致极限(9.9.1 与 9.9.2)，因而 $\zeta$ 的多项式所成的集在 $A$ 内处处稠密，从而所述论断得证. 注意，在这种情

形下，Гельфанд 变换是等距，然而 $\mathscr{G}(A)$ 不等于 $\mathscr{G}_C(\boldsymbol{X}(A))$.

**(15.3.9)** 设 $B$ 是由属于（15.3.8）中所考虑的代数 $A$ 的函数在单位圆周 $U:|\zeta|=1$ 上的限制所成的 Banach 代数。若对 $f\in A$，$f|U$ 是它在 $U$ 上的限制，则映射 $f\to f|U$ 是 $A$ 到 $B$ 上的等距同构. 这可由最大模原理（9.5.9）立即得到，因为由最大模原理推出 $\|f\|=\|f|U\|$. 这里 $U$ 到 $\boldsymbol{X}(B)$ 的映射 $x\to\varepsilon_x$ 仍然是连续的并且是单射，然而它不再是同胚，因为 $A$ 的所有特征标都等同于 $B$ 的特征标，从而 $\boldsymbol{X}(B)=\boldsymbol{X}(A)=D$.

## 问　　题

1）设 $X$ 是可度量化紧空间，$B$ 是 $\mathscr{C}_C(X)$ 的含有单位元的子代数，假定赋予 $B$ 范数 $\|x\|_B$ 而使 $B$ 成为 Banach 代数.

a）注意对每个 $t\in X$，$\varphi(t):x\to x(t)$ 是 $B$ 的一个特征标，由此证明 $\|x\|_B\geqslant\|x\|$（$\|x\|$ 是 $\mathscr{C}_C(X)$ 上的范数）. 并推断 0 是 $B$ 的唯一的拟幂零元.

b）试证 $\varphi$ 是 $x$ 到 $\boldsymbol{X}(B)$ 的连续映射；当 $B$ 区分 $X$ 的点（7.3）时，$\varphi$ 是 $X$ 到 $\boldsymbol{X}(B)$ 的一个闭子集上的同胚.

c）假定对每个函数 $x\in B$，共轭函数 $\bar{x}$ 也属于 $B$；还假定若 $x\in B$ 满足：对一切 $t\in X$，有 $x(t)\neq 0$，则 $x$ 在 $\mathscr{C}_C(X)$ 中的逆元 $x^{-1}$ 也属于 $B$. 试证在这些条件下，映射 $\varphi$ 是满射.（设 $\mathfrak{m}$ 是 $B$ 的极大理想，$Z$ 是使得 $x(t)=0$ 对一切 $x\in\mathfrak{m}$ 都成立的 $t\in X$ 所成的集，用反证法证明不可能有 $Z=\phi$：否则就会存在 $X$ 的有限开覆盖 $(V_i)$，且对每个 $i$ 存在函数 $x_i\in\mathfrak{m}$，使对 $t\in V_i$ 有 $x_i(t)\neq 0$；于是考虑函数 $\sum_i x_i\bar{x}_i\in\mathfrak{m}$.）

d）由 b）与 c）推断，15.1 问题 1 中的代数的谱 $\boldsymbol{X}(A)$ 典范地等同于区间 $[0,1]$.

2）试证 15.1 问题 2 中的代数 $A$ 的谱是单点集，而且 $A$ 的唯一的极大理想是它的根基（15.2 问题 7）.

3）在 15.1 问题 3 的代数 $\mathscr{A}(X)$ 中，试证

$$\|x^n\|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\|x\|^n,$$

并由此推断 $\mathscr{A}(X)$ 等于它的根基. 从而 $\mathscr{A}(X)$ 没有特征标（利用 15.1 问题 5）.

4）设 $B$ 是 $\mathscr{C}_C(D)$（使用（15.3.8）的记号）的由 $\mathscr{A}(D)$ 与函数 $|f_0|:\zeta\to$

$|\zeta|$ 所生成的 Banach 子代数,试证 $X(B)$ 同胚于使得 $x_1^2+x_2^2\leqslant x_3^2$ 且 $0\leqslant x_3\leqslant 1$ 的 $(x_1, x_2, x_3)\in \boldsymbol{R}^3$ 所成的集. (一方面注意 $B$ 含有一切函数 $\zeta\to g(|\zeta|)$, 其中 $g$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 另一方面注意 $B$ 包含(15.3.8)中引进的 $\mathscr{A}(D)$ 的子代数 $A_0$. 为证明对 $B$ 的一切特征标 $\chi$ 都有 $|\chi(f_0)|\leqslant\chi(|f_0|)$, 考虑函数 $\zeta(\zeta-(|\zeta|+\varepsilon))^{-1}$, 对每个 $\varepsilon>0$, 这个函数属于 $B$.)

5) 关于乘法 $(\xi_n)(\eta_n)=(\xi_n\eta_n)$ 而言, 空间 $L^2_{\boldsymbol{C}}(6.5)$ 成为没有单位元的 Banach 代数. 设 $A$ 是在 $L^2_{\boldsymbol{C}}$ 上添加单位元而得到的 Banach 代数(15.1 问题5), 试证 $X(A)$ 等同于 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的由 $+\infty$ 与不小于 1 的整数所成的紧子集(利用 $L^2_{\boldsymbol{C}}$ 典则等同于它的对偶空间这一事实). 此时 Гельфанд 变换 $\mathscr{G}_A$ 成为恒等映射,而 $\mathscr{G}_A(A)$ 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(X(A))$ 的一个处处稠密且非闭的子代数.

6) a) 试证看作 Banach 空间的 Beurling 代数 $A$(15.1 问题 4)的对偶空间等同于满足下述条件的 $\lambda$ 可测复值函数 $g$ 的类组成的空间: 数

$$\|\tilde{g}\|^2=\sup\frac{1}{V(\omega)}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2\omega(t)dt<+\infty.$$

这里上确界是对 $\omega$ 取遍属于 $\Omega$ 且使得 $V(\omega)>0$ 的函数集来取的. 于是数 $\|\tilde{g}\|$ 是 $A$ 的对偶空间 $A'$ 的范数. 试证明还有

$$\|\tilde{g}\|^2=\sup_n\frac{1}{2n+1}\int_{-n}^{n}|g(t)|^2dt.$$

此时对于 $\tilde{f}\in A$, $\tilde{g}\in A'$, 典则双线性形式 $\langle\tilde{f}, \tilde{g}\rangle$ 是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)dt.$$

b) 由 a) 推断,在 $A$ 上添加单位元后所得到的 Banach 代数 $\tilde{A}$(15.1 问题 5)的特征标以线性形式

$$\tilde{f}\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\xi t}dt$$

(其中 $\xi$ 是实数)作为它们在 $A$ 上的限制. (一个特征标对应于一个满足下述条件的 $\lambda$ 可测函数 $g$ 的类: 对于 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度 $\lambda\otimes\lambda$, 几乎处处有 $g(s+t)=g(s)g(t)$. 由此先推断 $g$ 连续, 为此注意若 $g_1=g*\rho$ 是 $g$ 的一个正则化,则有 $g_1(s+t)=g(s)g_1(t)$. 推断 $g(t)=e^{\zeta t}$, 其中 $\zeta\in\boldsymbol{C}$,并证明 $\zeta$ 必为纯虚数.)

7) 设 $\mathscr{A}$ 是 $[0, +\infty[$ 上满足下述条件的 $\lambda$ 可测函数 $x$ 组成的复向量空间:

$$\|\tilde{x}\|=\int_{0}^{+\infty}|x(t)|\operatorname{Sh}2t\,dt<+\infty.$$

a) 试证,对 $\mathscr{A}$ 中的 $x$, $y$, 函数

$$(x\odot y)(u)=\int_0^{+\infty}dt\int_{|u-t|}^{u+t}x(s)y(t)ds$$

还属于$\mathscr{A}$(利用 Lebesgue-Fubini 定理). 映射$(x, y)\to x\odot y$在$\mathscr{A}$上定义了一个交换代数结构;通过$\mathscr{A}$对$\lambda$可忽略函数所成的空间$\mathscr{N}$的商,就在$A=\mathscr{A}/\mathscr{N}$上得到一个没有单位元的交换 Banach 代数的结构.

b) $\mathscr{A}$上的每个连续线性形式属于

$$\tilde{x}\to\int_0^{+\infty}x(t)\omega(t)dt$$

的类型,其中$\omega$是$\lambda$可测的,且对于某个适当的常数$M$,几乎处处有$|\omega(t)|\leqslant M\text{sh}\alpha t$. 由此推断,在对$A$添加单位元所得到的代数$\tilde{A}$上,每个在$A$上的限制不恒等于零的特征标对应于一个函数$\omega$,使得对于$[0,+\infty[\times[0,+\infty[$上的 Lebesgue 测度,几乎处处有

$$\omega(s)\omega(t)=\int_{|t-s|}^{t+s}\omega(u)du.$$

试证,用与之等价的函数代替$\omega$, 可以假定$\omega$是连续的且是任意次可微的,并对$s<t$满足方程

$$\omega'(s)\omega(t)=\omega(t+s)+\omega(t-s)$$

以及关系式$\omega(0)=0$. 由此推断$\omega(t)=\alpha(\sin\rho t)/\rho$, 其中$\rho$是一个复数,并且条件$|\omega(t)|\leqslant M\text{sh}\alpha t$规定了限制$|\mathscr{I}\rho|\leqslant\alpha$. 在$A$上为零的特征标在$\boldsymbol{X}(A)$内的余集等同于这样一个群的轨道空间, 这个群由作用于$\mathbf{C}$中满足$|\mathscr{I}\rho|\leqslant\alpha$的$\rho$所成的局部紧子空间上的恒等映射与对称映射$\zeta\to-\zeta$所组成.

8) 设$X$是紧空间, $B$是$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$的(关于诱导范数的) Banach 子代数,它含有单位元且区分$X$的点, 于是紧空间$X$典则地等同于$\boldsymbol{X}(B)$的一个闭子集(问题 1).

对每个函数$f\in B$,$\mathscr{G}_Bf$是$f$的延拓,满足$\|f\|=\sup_{x\in\boldsymbol{X}(B)}|(\mathscr{G}_Bf)(x)|$,换言之,$\mathscr{G}_B$是$B$到$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{X}(B))$的一个 Banach 子代数上的等距同构(参阅问题 1). 试证若$\mathscr{R}f\geqslant0$, 则$\mathscr{R}(\mathscr{G}_Bf)\geqslant0$ (考虑函数$e^{-f}\in B$).

9) 采用与问题 8 相同的假定, $X$上的正测度$\mu$称为属于$B$的特征标$\chi$的**表示测度**,如果对一切函数$f\in B$, 都有$\chi(f)=\int_X fd\mu$. $\mu$必定具有总质量 1. $X$上的复测度$\theta$称为$\chi$的**拟表示测度**,如果对一切函数$f\in B$,有$\int_X fd\theta=c\chi(f)$, 其中$c$是一个常数;这等价于对一切函数$f\in\text{Ker}(\chi)$,有$\int_X fd\theta=0$.

若$\mu$是拟表示测度,则对任何$v\in B$, $v\cdot\mu$也是拟表示测度.

$X$上的正测度$\mu$称为$\chi$的 **Jensen 测度**,如果对一切函数$f\in B$, 有

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_X^* \log|f|\,d\mu.$$

(由于 $\log|f|$ 在 $X$ 上为 $\mu$ 可测且上有界，所以上式右边只能为有限(当 $\log|f|$ 为 $\mu$ 可积时)或 $-\infty$；我们约定，若 $\chi(f)=0$，则取 $\log|\chi(f)|=-\infty$.)

a) 对每个函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$，令

$$M(f)=\sup(\log|\chi(u)|),$$

其中上确界是对 $u$ 属于 $B$ 且满足 $|u|\leqslant e^f$ 的函数 $u$ 组成的集取的. 我们有

$$\inf_{x\in X} f(x)\leqslant M(f)\leqslant \sup_{x\in X} f(x);$$

对一切常数 $a\in\mathbf{R}$，有 $M(a)=a$；并且 $M(f)+M(g)\leqslant M(f+g)$. 再者，对 $B$ 中每个可逆函数 $u$，有 $M(\log|u|)=\log|\chi(u)|$；且对每个函数 $u\in B$，有 $M(\mathscr{R}u)=\mathscr{R}\chi(u)$. 对每个函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$，极限 $Q(f)=\lim\limits_{t\to+\infty}(1/t)M(tf)$ 存在且为有限 (12.7 问题 10)，并且具有下列性质:

$$\inf_{x\in X} f(x)\leqslant Q(f)\leqslant \sup_{x\in X} f(x);$$

对一切 $t\geqslant 0$，有 $Q(tf)=tQ(f)$；又 $Q(f+g)\geqslant Q(f)+Q(g)$. 为使 $\mu$ 是 $\chi$ 的 Jensen 测度，必须且只须对一切函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$，有 $Q(f)\leqslant\int_X f\,d\mu$. 由此推断对于 $\chi$ 至少存在一个 Jensen 测度(13.3 问题 2).

b) 特征标 $\chi$ 的每个 Jensen 测度也是 $\chi$ 的表示测度(注意若 $f\in B$ 在 $B$ 中是可逆的，则 $\log|\chi(f)|=\int_X \log|f|\,d\mu$，并用 $e^f$ 或 $e^{if}$ 代替 $f$).

$\chi$ 的表示测度的集 $\mathfrak{R}(\chi)$ 与 $\chi$ 的 Jensen 测度的集 $\mathfrak{S}(\chi)$ 是 $M_{\mathbf{R}}(X)$ 的粗疏紧凸子集.

c) 当属于 $B$ 的函数的实部在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(X)$ 内形成一个处处稠密子集时，对于 $\chi$ 只存在唯一的一个表示测度(因而它是对于 $\chi$ 的唯一的 Jensen 测度)；此时 $B$ 称为 **Dirichlet 代数.**

d) (15.3.9)中定义的代数 $B$ 是 Dirichlet 代数 (利用 (7.4.2)). 对于特征标 $f\to f(0)$，$U$ 上的规范化 Haar 测度是唯一的表示测度.

10) 采用问题 8 中的假定与记号，对 $X$ 上的每个正测度 $\mu$，对 $0<p<+\infty$，令

$$D_p(\mu)=\inf\left(\int |u|^p d\mu\right)$$

其中下确界是对属于 $B$ 且满足 $\chi(u)=1$ 的函数 $u$ 所成的集取的.

a) 若 $0<p<r<+\infty$，则

$$D_p(\mu)\leqslant(D_r(\mu))^{p/r}(\mu(X))^{(r-p)/r}$$

(利用 Hölder 不等式). 由此推断函数 $p \to D_p(\mu)$ 在$]0, +\infty[$ 内右连续(利用该函数为上半连续这一事实). 若 $\mu(X) = 1$, 则对 $0 < p < +\infty$, 有 $0 \leqslant D_p(\mu) \leqslant 1$.

若 $p > 1$ 且 $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$($q$ 满足 $(1/p) + (1/q) = 1$) 是非负函数,则

$$D_1((fg) \cdot \mu) \leqslant (D_p(f^p \cdot \mu))^{1/p}(D_q(g^q \cdot \mu))^{1/q}.$$

若 $\mu(X) = 1$, 则对每个非负函数 $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, 有

$$D_1(f \cdot \mu) \leqslant (D_p(f^p \cdot \mu))^{1/p}.$$

b) 试证, 若对某个 $p > 0$ 有 $D_p(\mu) = 1$, 则 $\mu$ 是 $\chi$ 的表示测度. (注意若 $v \in B$ 满足 $\chi(v) = 0$, 则对一切 $t > 0$ 有 $\chi(\exp(tv/p)) = 1$, 令 $t$ 趋于 0 以证明$\int \Re v d\mu \geqslant 0$, 由此推出 $\int \Re v d\mu = 0$.)

(c) 反之, 若 $\mu$ 是 $\chi$ 的表示测度, 则对一切 $p \geqslant 1$ 有 $D_p(\mu) = 1$. 为使 $D_p(\mu) = 1$ 对一切 $p > 0$ 成立,必须且只须 $\mu$ 是 $\chi$ 的 Jensen 测度(利用 13.11 问题 12c)).

d) 设 $p$ 满足 $1 \leqslant p < +\infty$, 且 $D_p(\mu) > 0$, 试证存在函数 $h \in \mathscr{L}^q(\mu)$(这里 $(1/p) + (1/q) = 1$),使得 $N_q(h) = 1$, 并且对一切 $u \in B$, 有

$$(D_p(\mu))^{1/p}\chi(u) = \int uhd\mu$$

(利用 Hahn-Banach 定理以及(13.17.1)与 13.17 问题 1); 若 $p > 1$,则测度 $|h|^q \cdot \mu$ 是 $\chi$ 的表示测度.

11) 采用问题 8 中的假定与记号, 对属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的每个非负函数 $f$, 令 $J_\mu(f) = \exp\left(\int^* \log|f_1 d\mu\right)$(约定 $\exp(-\infty) = 0$). $\chi$ 的表示测度 $\mu$ 称为**超端测度**, 如果 $\chi$ 的任一以 $\mu$ 为基的表示测度必定等于 $\mu$; 此时它是凸集 $\mathscr{R}(\chi)$ (问题 9)的一个端点.

a) 设 $p$ 是不小于 1 的数, 则为使 $X$ 上质量为 1 的正测度 $\mu$ 是对于 $\chi$ 的 Jensen 测度, 必须且只须对属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的一切非负函数 $f$, 有 $D_p(f \cdot \mu) \geqslant J_\mu(f)$. (为证明所述条件是充分的, 对 $u \in B$ 与 $\varepsilon > 0$ 考虑函数 $(|u| + \varepsilon)^{-p}$.)

b) 设 $p$ 是不小于 1 的数, $\mu$ 是 $X$ 上质量为 1 的正测度,则下列条件是等价的:

$\alpha$) $\mu$ 是 $\chi$ 的超端表示测度.

$\beta$) $\mu$ 是 $\chi$ 的表示测度,并且对属于$\mathscr{L}^1(\mu)$的一切非负函数 $f$,有 $D_p(f \cdot \mu)$

$\leqslant J_\mu(f)$.

$\gamma$) $\mu$ 是 $\chi$ 的表示测度,并且对属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的使得 $f\cdot\mu$ 是 $\chi$ 的拟表示测度的一切函数 $f$，有 $\left|\int f d\mu\right|\leqslant J_\mu(|f|)$.

此外，当这些条件得到满足时，$\mu$ 是 $\chi$ 的 Jensen 测度，并对一切 $p\geqslant 1$ 与一切属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数 $f$，有 $D_p(f\cdot\mu)=J_\mu(f)$.

(为证明 $\alpha$) 蕴涵 $\beta$)，利用问题 10d) 证明，若 $\mu$ 是超端的，且若 $p\geqslant 1$，$f$ 是非负的且属于 $\mathscr{L}^p(\mu)$，则有 $(D_p(f^p\cdot\mu))^{1/p}\leqslant D_1(f\cdot\mu)$；又利用问题 10a)，然后由此推断，若 $f$，$g$ 是非负的且属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$，则 $D_1(fg\cdot\mu)\leqslant D_1(f\cdot\mu)\times D_1(g\cdot\mu)$；推出对一切属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数 $f$，对任意的正整数，有 $D_1(f\cdot\mu)\leqslant\left(\int f^{2^{-n}}d\mu\right)^{2^n}$，并且利用 13.11 问题 12c). 利用所举的同一问题来证明 $\gamma$) 蕴涵 $\alpha$).)

c) 设 $p\geqslant 1$，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度. 对 $X$ 上的每个测度 $\theta$，以 $(d\theta/d\mu)$ 表示出现于 Lebesgue 分解 (13.18.4) $\theta=h\cdot\mu+\sigma$ (其中 $|\sigma|$ 与 $\mu$ 互相奇异)中的函数 $h$ (除等价外，$h$ 是有定义的). 试证，为使 $\chi$ 的每个表示测度都以 $\mu$ 为基，必须且只须对 $X$ 上每个正测度 $\nu$，有

$$D_p(\nu)=D_p\left(\frac{d\nu}{d\mu}\cdot\mu\right).$$

(证明所述条件为必要时，归结为 $p>1$ 的情形；并可假定 $D_p(\nu)>0$. 此时把问题 10d) 应用到 $U$ 上并利用 Hölder 不等式.)

d) 设 $\mu$ 是 $X$ 上质量为 1 的正测度且 $p\geqslant 1$，则下列陈述是等价的：

$\alpha$) $\mu$ 是 $\chi$ 的唯一的表示测度.

$\beta$) 对 $X$ 上每个正测度 $\nu$，有

$$D_p(\nu)=J_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right).$$

$\gamma$) 对 $X$ 上每个正测度 $\nu$，有

$$D_p(\nu)\leqslant J_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right).$$

$\delta$) 对 $\chi$ 的每个拟表示测度 $\theta$，有

$$\left|\int d\theta\right|\leqslant J_\mu\left(\left|\frac{d\theta}{d\mu}\right|\right).$$

(**Szegö-Колмогоров-Krein 定理**). (为证明 $\gamma$) 蕴涵 $\alpha$)，注意此时借助 c) 可知 $\mu$ 是超端的，并利用 b).)

12）采用问题 8 中的假定与记号，设 $\mu$ 是 $\chi$ 的表示测度. 以 $K(\mu)$ 表示满足下述条件的函数 $f\in\mathscr{L}^1(\mu)$ 的集：$f\cdot\mu$ 是 $\chi$ 的一个拟表示测度，换言之，对一切函数 $u\in B$，有 $\int ufd\mu=\left(\int fd\mu\right)\left(\int ud\mu\right)$. 于是 $\left|\int fd\mu\right|\leqslant D_1(|f|\mu)=J_\mu(|f|)$. 我们有 $B\subset K(\mu)$.

a）对每个属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数 $g$，试证存在函数 $f\in K(\mu)$，使得 $|f|\leqslant g$，并且 $\int fd\mu=D_1(|f|\cdot\mu)=D_1(g\cdot\mu)$（利用问题 10d)).

b）$f\in K(\mu)$ 称为**外部函数**，如果

$$\left|\int fd\mu\right|=D_1(|f|\cdot\mu)>0.$$

$f\in K(\mu)$ 称为**内部函数**，如果关于 $\mu$ 几乎处处有 $|f(x)|=1$. 以 $E(\mu)$（相应地，$I(\mu)$）表示外部（相应地，内部）函数的集. 集 $E(\mu)\cap I(\mu)$ 由等价于常数 $c$（这里 $|c|=1$）的函数所组成.

c）设 $g$ 是属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数，满足 $D_1(g\cdot\mu)=J_\mu(g)>0$，试证存在函数 $f\in E(\mu)$，使得 $|f|=g$.（写 $f=gh$ 以利用 a)，其中 $h\in\mathscr{L}^\infty(\mu)$ 且 $J_\mu(|h|)=1$；借助 13.11 问题 12c）来作出论断.）

13）采用问题 8 中的假定与记号，设 $\mu$ 是 $\chi$ 的超端表示测度. 此时对一切属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数 $f$，有 $D_1(f\cdot\mu)=J_\mu(f)$（问题 11b)).

a）设 $f\in K(\mu)$，则为使 $f$ 是外部函数（问题 12），必须且只须

$$\inf_{u\in B}\int|1-uf|d\mu=0.$$

（为证明所述条件是充分的，证明由这个条件可以推出，存在属于 $B$ 的函数的序列 $(u_n)$，使对一切 $n$ 有 $\chi(u_n)=1$ 且 $\int|u_nf|d\mu$ 趋于 $\left|\int fd\mu\right|$. 为证明所述条件是必要的，可以限于 $\left|\int fd\mu\right|=1$ 的情形，此时存在具有上述性质的序列 $(u_n)$. 利用关系式 $D_1(|u_nf|\cdot\mu)=J_\mu(|u_nf|)$，由此推断积分 $\int|u_nf|^{\frac{1}{2}}d\mu$ 组成的序列趋于 1，并借助 13.12 问题 4 作出结论.）

b）设 $f\in E(\mu)$，$g\in\mathscr{L}^\infty(\mu)$ 满足 $fg\in K(\mu)$，试证 $g\in K(\mu)\cap\mathscr{L}^\infty(\mu)$ 且 $\int fgd\mu=\left(\int fd\mu\right)\left(\int gd\mu\right)$.（考虑属于 $B$ 的函数的序列 $(u_n)$，使得序列 $(u_nf)$ 平均趋于 1，并对每个函数 $v\in B$，考虑积分 $\int u_nvfgd\mu$.）

c）试证，若 $f$，$g$ 是属于 $E(\mu)$ 的两个函数，并且几乎处处有 $|f(x)|=$

$|g(x)|$，则几乎处处有 $f(x)=cg(x)$，其中 $c$ 是一个常数.（借助 b）证明函数 $f/g$ 同时属于 $E(\mu)$ 与 $I(\mu)$.）

d）对每个满足 $J_\mu(|f|)>0$ 的函数 $f\in K(\mu)$,试证 $f=gh$,其中 $g\in E(\mu)$，$h\in I(\mu)$，并且 $g$ 与 $h$ 除绝对值等于 1 的常数因子外是完全确定的(利用问题 12c）以及上面的 b）与 c)).

e）试证,若 $f$ 与 $g$ 都属于 $K(\mu)\cap\mathscr{L}^\infty(\mu)$，则

$$\int fgd\mu=\left(\int fd\mu\right)\left(\int gd\mu\right).$$

（先注意若 $h\in K(\mu)\cap\mathscr{L}^\infty(\mu)$ 且 $\int hd\mu=0$,则此时也有 $\int h^2d\mu=0$. 为证明这一点,利用这样的事实：对一切 $z\in\boldsymbol{C}$，有

$$1=\left|\int(1+zh)d\mu\right|\leqslant D_1(|1+zh|\cdot\mu)=J_\mu(|1+zh|),$$

并由此推出 $1\leqslant\int|1-z^2h^2|d\mu$；于是利用 13.12 问题 7.为得到一般情形下所述的关系式,考虑函数

$$h=f+zg-\int(f+zg)d\mu,$$

其中 $z$ 是复数.）

f）试证若 $f$，$g$ 属于 $K(\mu)$ 且 $fg\in\mathscr{L}^1(\mu)$，则 $fg\in K(\mu)$ 且 $\int fgd\mu=\left(\int fd\mu\right)\left(\int gd\mu\right)$.（从 $g\in E(\mu)$ 的情形开始. 先证明对满足 $ug\in\mathscr{L}^1(\mu)$的任意 $u\in K(\mu)$，有 $D_1(|g|\cdot\mu)\int|ud\mu|\leqslant\int|ug|d\mu$； 并由此如同问题 10d）那样推出,存在函数 $v\in\mathscr{L}^\infty(\mu)$，使得 $|v|\leqslant 1$ 并对满足 $ug\in\mathscr{L}^1(\mu)$ 的一切 $u\in K(\mu)$,有 $D_1(|g|\cdot\mu)\int ud\mu=\int ugvd\mu$. 利用 b）推出 $v$ 是绝对值等于 1 的常数. 为达到一般情形，先通过对 $f$ 与 $g$ 加上适当的常数，证明可以限于 $\int fd\mu\neq 0$ 与 $\int gd\mu\neq 0$ 的情形. 此时利用 d）中的典则分解，并借助 e）证明，若 $f$ 与 $g$ 都属于 $I(\mu)$，则 $fg$ 也属于 $I(\mu)$.）

g）由 f）推断,若 $f$，$g$ 属于 $E(\mu)$ 且 $fg\in\mathscr{L}^1(\mu)$，则 $fg\in E(\mu)$.

h）试证,若 $g\in E(\mu)$，$f\in\mathscr{L}^1(\mu)$ 且 $fg\in K(\mu)$，则 $f\in K(\mu)$.（对 $f$ 加上某个常数以归结为 $\int fgd\mu\neq 0$ 的情形,由此推断

$$J_\mu(|f|)=D_1(|f|\cdot\mu)>0.$$

证明借助于上述性质，可写 $f = \bar{u}v$，其中 $v \in E(\mu)$，并且几乎处处有 $|u(x)| = 1$，因而 $u \in I(\mu)$，并借助 f) 得到所需的结论.)

i) 设 $f \in K(\mu)$ 满足：对一切使得 $\int u d\mu \neq 0$ 的函数 $u \in I(\mu)$，有 $\int f\bar{u} d\mu = 0$. 试证 $f$ 是 $\mu$ 可忽略的.（把 d) 中的典则分解应用于函数 $1 + zf$，其中 $z$ 是复常数，并应用 13.12 问题 6 来证明 $1 + zf \in E(\mu)$；借助 13.21 问题 17 作出论断.)

j) 试证任一有限实值函数 $f \in K(\mu)$ 等价于一个常数（归结为 $\int f d\mu = 0$ 的情形并应用 i)).

k) 由 j) 推断，若 $\bar{B}$ 表示对于 $u \in B$，函数 $\bar{u}$ 所成的集，则对 $1 \leqslant p < +\infty$，$B + \bar{B}$ 在 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 内稠密.（若 $(1/p) + (1/q) = 1$，且 $f \in \mathscr{L}^q(\mu)$ 满足：对一切 $u \in B$，都有 $\int fu d\mu = 0$ 与 $\int f\bar{u} d\mu = 0$，则有 $\int (\mathscr{R}f) u d\mu = 0$，并利用 j).)

14) 采用问题 8 中的假定与记号，还假定存在 $\chi$ 的唯一的表示测度 $\mu$. 设 $\nu$ 是 $\chi$ 的一个拟表示测度，并令 $\nu = \nu' + \nu''$，其中 $\nu'$ 以 $\mu$ 为基而 $\nu''$ 奇异于 $\mu$，则 $\nu'$ 与 $\nu''$ 都是 $\chi$ 的拟表示测度，并且还有 $\int d\nu'' = 0$（**F. Riesz 与 M. Riesz 定理**).（必要时以 $\nu + \mu$ 代替 $\nu$，可以假定 $\int d\nu \neq 0$. 若 $\rho = |\nu| = |\nu'| + |\nu''|$，则有 $D_i(\rho) > 0$，因而根据问题 11d) 有 $D_i(\rho) = J_\mu(|h|)$，其中 $\nu' = h \cdot \mu$. 于是存在属于 $B$ 的函数的序列 $(v_n)$，使对一切 $n$ 有 $\chi(v_n) = 1$ 而且 $\int |v_n| d\rho$ 趋于 $J_\mu(|h|)$；由于 $J_\mu(|h|) \leqslant \int |v_n h| d\mu$，所以积分 $\int |v_n h| d\mu$ 也趋于 $J_\mu(|h|)$ 并且 $\int |v_n| d|\nu''|$ 趋于0. 写 $h = fg$，其中 $f \in E(\mu)$ 且 $|f| = |h|$，由此得到 $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ 且 $|g| = 1$；作类似于问题 13a) 中的推理，证明 $fv_n$（关于 $\mu$）平均趋于 $\int f d\mu$. 由 $\nu$ 是拟表示测度的假定推断 $g \in I(\mu)$，并应用问题 13f).)

15) 采用问题 8 中的假定与记号，假定 $\mu$ 是 $\chi$ 的一个涵端表示测度. 对 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，以 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 表示满足下述条件的函数 $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ 所成的集：对一切函数 $g \in K(\mu) \cap \mathscr{L}^q(\mu)$（其中 $(1/p) + (1/q) = 1$），有 $\int fg d\mu = \left(\int f d\mu\right) \times \left(\int g d\mu\right)$. 我们有 $\mathscr{H}^p(\mu) \subset K(\mu)$；由于问题 13f)，这导致

$$\mathscr{H}^p(\mu) = K(\mu) \cap \mathscr{L}^p(\mu)$$

($1\leqslant p\leqslant+\infty$)。以 $H^p(\mu)$ (**Hardy 空间**)表示 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 在 $L^p(\mu)$ 内的典则象.

a) 试证,对 $1\leqslant p<+\infty$,$\mathscr{H}^p(\mu)$ 是 $B$ 在 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 内的闭包;对 $p=+\infty$,$\mathscr{H}^\infty(\mu)$ 是 $B$ 在 $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ 内关于弱拓扑的闭包.(在所述两种情形下,证明若 $g\in\mathscr{L}^q(\mu)$ 满足:对一切函数 $u\in B$,有 $\int ug\,d\mu=0$,则 $g\in\mathscr{L}^q(\mu)\cap K(\mu)$ 且 $\int g\,d\mu=0$,因而对一切函数 $f\in\mathscr{H}^p(\mu)$,有 $\int fg\,d\mu=0$。)

b) 设 $p$ 满足 $1\leqslant p<+\infty$,则为使 $f\in\mathscr{H}^p(\mu)$ 使得 $fB$ 在 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 内处处稠密,必须且只须 $f$ 是 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 的外部函数.(所述条件的必要性由问题 13a) 得到. 为证明它是充分的,注意若 $g\in\mathscr{L}^q(\mu)$ 满足:对一切函数 $u\in B$,有 $\int gfu\,d\mu=0$,则 $gf\in K(\mu)$;并由问题 13h) 推出 $g\in K(\mu)$ 且 $\int gf\,d\mu=0$;通过问题 13f) 推出 $\int g\,d\mu=0$,从而对一切函数 $u\in B$ 有 $\int gu\,d\mu=0$。)

c) 空间 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 是 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 内的一个闭 $B$ 子模. 设 $B_0$ 是 $B$ 的闭理想 Ker $(\chi)$,则称 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 的闭 $B$ 子模 $M$ 为**正常的**,如果 $B_0M$ 在 $M$ 内不稠密. $\mathscr{H}^p(\mu)$ 是正常 $B$ 模. 试证 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 的每个正常闭 $B$ 子模都具有 $q\mathscr{H}^2(\mu)$ 的形式,其中 $|q|=1$. (先注意在 $M$ 中存在不可忽略函数 $q$,它关于 Hermite 纯量积 $(f,g)\to\int f\bar{g}\,d\mu$ 而言正交于 $B_0M$;把 $q$ 表达为正交于 $qB_0$,由此推断除一个常数因子外,可以假定 $|q|=1$ (利用问题 13j)). 于是 $q\mathscr{H}^2(\mu)$ 是包含在 $M$ 内的闭 $B$ 模. 注意到若 $g\in M$ 正交于 $q\mathscr{H}^2(\mu)$,则 $g\bar{q}$ 正交于 $B$ 且 $q$ 正交于 $gB_0$,因而 $g\bar{q}$ 正交于 $\bar{B}_0$,由此证明必有 $q\mathscr{H}^2(\mu)=M$. 借助问题 13k) 作出论断.)证明 $q$ 的类除一个常数因子外是完全确定的(利用 b)).

d) 由 c) 推断 Hilbert 空间 $L^2(\mu)$ 是 $H^2(\mu)$ 与 $\bar{H}_0^2(\mu)$ 的 Hilbert 和,其中 $H^2(\mu)$ 是 $\mathscr{H}^2(\mu)$ 的典则象,$\bar{H}_0^2(\mu)$ 是使得 $\bar{f}\in\mathscr{H}^2(\mu)$ 且 $\int\bar{f}\,d\mu=0$ 的 $f$ 所成的闭子空间 $\bar{\mathscr{H}}_0^2(\mu)$ 的典则象.(考虑 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中正交于 $\bar{\mathscr{H}}_0^2(\mu)$ 的函数组成的子空间 $M$,证明它是正常闭 $B$ 子模,因而具有 $q\mathscr{H}^2(\mu)$ 的形式,其中函数 $q$ 满足 $|q|=1$. 此外,注意 $M$ 含有常数,因而 $\bar{q}\in\mathscr{H}^2(\mu)$. 由此推断 $q$ 等价于一个常数.)

e) 设 $f\in\mathscr{L}^1(\mu)$,$f$ 不属于 $fB_0$ 在 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 内的闭包,试证 $f=gh$,其中 $h\in\mathscr{H}^2(\mu)$ 是满足 $|h|^2=|f|$ 的外部函数,而 $g\in\mathscr{L}^2(\mu)$ 属于 $fB$ 在 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 内的闭包(把问题 12c) 应用到函数 $|f|^{1/2}$ 上). 若加之还有 $f\in\mathscr{H}^1(\mu)$,则可写 $f=gh$,其中 $g$ 与 $h$ 属于 $\mathscr{H}^2(\mu)$ 且 $|g|=|h|$.

反之,若 $f\in\mathscr{L}^1(\mu)$ 具有 $qh^2$ 的形式,其中 $|q|=1$ 且 $h\in\mathscr{H}^2(\mu)$ 是一个

外部函数，则 $f$ 不属于 $fB_0$ 在 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 内的闭包(注意 $h^2 \in E(\mu)$，并利用问题13a))。所述结论等价于 $J_\mu(|f|)>0$。

f) 设 $M$ 是 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的正常闭 $B$ 子模。试证 $M$ 具有 $q\mathscr{H}^1(\mu)$ 的形式，其中 $|q|=1$，(设 $N=M\cap\mathscr{L}^2(\mu)$，它是 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 内的闭 $B$ 子模。若 $f\in M$ 不属于 $B_0M$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 内的闭包，则由 e) 推出 $f=gh$，其中 $g\in N$ 且 $h\in\mathscr{H}^2(\mu)$；此外，$g$ 不属于 $B_0N$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 内的闭包。利用 c) 证明 $N=q\mathscr{H}^2(\mu)$，其中 $|q|=1$；并由此推断 $f\in g\mathscr{H}^1(\mu)$。把这个结果应用到 $f+f_1$ 上，其中 $f_1$ 属于 $B_0M$ 在 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 内的闭包，由此得到 $f_1\in q\mathscr{H}^1(\mu)$，因而 $M\subset q\mathscr{H}^1(\mu)$。)

16) 把问题 10 到 15 的结果应用到(15.3.9)中的 Dirichlet 代数 $B$ 上，其中 $\mu$ 是单位圆周 $U$ 上的规范化 Haar 测度 $d\mu(\theta)=(1/2\pi)d\theta$ 而 $\chi$ 是特征标 $f\to f(0)$，因而 $\mu$ 是 $\chi$ 的唯一表示测度(问题 9d))。

a) $B$ 是指数 $k\geqslant 0$ 的三角多项式 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$ 所成的代数在 $\mathscr{C}_C(U)$ 内的闭包。每个函数 $f\in\mathscr{H}^p(\mu)$ 对应到圆盘 $|z|<1$ 内由

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{f(\zeta)d\mu(\zeta)}{\zeta-z}$$

所给出的解析函数；对于 $1\leqslant p<+\infty$ (相应地，$p=+\infty$)，$f$ 是函数 $\theta\to F(re^{i\theta})$ 当 $r$ 趋于 1 时在 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 内的极限(相应地，弱极限)，因而 $H^p(\mu)$ 等同于相应 $f\in\mathscr{H}^p(\mu)$ 的解析函数 $F$ 组成的空间(利用 $\mathscr{H}^p(\mu)$ 是 $B$ 在 $\mathscr{L}^p(\mu)$ 内的闭包(相应地，弱闭包)这一事实)。特别是，$H^2(\mu)$ 等同于满足下述条件的函数 $f$ 所成的空间：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<1$ 内解析且满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<+\infty$$

(参阅 9.13 的问题)。

b) 设 $\nu$ 是大于 $\chi$ 的拟表示测度且它与 $\mu$ 互相奇异，试证 $e^{-i\theta}\cdot\nu$ 也是关于 $\chi$ 的拟表示测度，由此用归纳法推断，对每个正整数 $n$，$e^{-ni\theta}\cdot\nu$ 也是关于 $\chi$ 的拟表示测度；由此推出 $\nu=0$，因而 $\nu$ 关于 $\chi$ 的每个拟表示测度以 $\mu$ 为基(问题 14)。

c) 对每个非 $\mu$ 可忽略函数 $f\in H^1(\mu)$，函数 $\log|f|$ 是 $\mu$ 可积的，即 $J_\mu(|f|)>0$，因而 $f$ 是一个外部函数与一个内部函数的乘积。(当 $\int f d\mu\neq 0$ 时，这是问题11b)的推论。在 $\int f d\mu=0$ 的情形，注意 $f$ 恒等于一个在 $|z|<1$ 内

解析的函数，故可写出 $f(z)=z^n g(z)$，其中 $n>0$，$g(0)\neq 0$，且 $g\in H^1(\mu)$，在 $U$ 上有 $\log|f|=\log|g|$.）特别，属于 $H^1(\mu)$ 的在 $U$ 的一个非 $\mu$ 可忽略集上取值为零的函数是 $\mu$ 可忽略的．每个属于 $H^1(\mu)$ 的函数是属于 $H^2(\mu)$ 的两个函数的乘积，反之亦然（问题 15c）．为使属于 $\mathscr{L}^1(\mu)$ 的非负函数 $f$ 等价于形如 $f=|g|^2$（其中 $g\in H^2(\mu)$）的一个函数，必须且只须 $J_\mu(f)>0$（或等价地 $\log|f|$ 为 $\mu$ 可积）（参阅 22.19 问题 19）．

17）设 $B$ 是问题 16 中所考虑的 Banach 代数，$B_1$ 是 $B$ 的 Banach 子代数，它由在 $|z|<1$ 内解析、在 $|z|\leqslant 1$ 上连续且有 $f'(0)=0$ 的函数 $f$ 所组成．对每个满足 $|c|\leqslant 1$ 的复数 $c$，设 $\mu_c$ 是测度 $F_c\cdot\mu$，其中

$$F_c(z)=1-\mathscr{R}(\bar{c}z).$$

试证测度 $\mu_c$ 是特征标 $\chi: f\mapsto f(0)$ 的表示测度；成为 $\mathscr{R}(\chi)$ 的端点的表示测度都形如 $\mu_c$（其中 $|c|=1$）；测度 $\mu_0=\mu$ 是 $\chi$ 的唯一的 Jensen 测度；因而对于 $\chi$ 不存在超端表示测度．

18）设 $A$ 是具有单位元的交换 Banach 代数．

a）设 $u\in A$ 满足 $\rho(u)<1$，则对 $A$ 的每个特征标 $\chi$，元素 $1-\overline{\chi(u)}u$ 是可逆的，且若 $v=(\chi(u)-u)(1-\overline{\chi(u)}u)^{-1}$，则 $|\chi(v)|<1$．

b）对 $A$ 的两个特征标 $\chi_1,\chi_2$，以 $\sigma(\chi_1,\chi_2)$ 表示当取遍 $A$ 中满足 $\rho(u)\leqslant 1$ 与 $\chi_1(u)=0$ 的 $u$ 组成的集时数 $|\chi_2(u)|$ 的上确界．证明对 $\rho(u)\leqslant 1$，有

$$|\chi_1(u)-\chi_2(u)|\leqslant\sigma(\chi_1,\chi_2)|1-\overline{\chi_1(u)}\chi_2(u)|$$

（利用 a））．由此推断 $\sigma(\chi_1,\chi_2)=\sigma(\chi_2,\chi_1)$，并且

$$(*)\qquad |\chi_2(u)|\leqslant\frac{\sigma(\chi_1,\chi_2)+|\chi_1(u)|}{1+\sigma(\chi_1,\chi_2)|\chi_1(u)|}.$$

由这个不等式推出，对 $A$ 的三个特征标 $\chi_1,\chi_2,\chi_3$，有

$$\sigma(\chi_1,\chi_3)\leqslant\frac{\sigma(\chi_1,\chi_2)+\sigma(\chi_2,\chi_3)}{1+\sigma(\chi_1,\chi_2)\sigma(\chi_2,\chi_3)},$$

因而 $A$ 的特征标之间的关系 $\sigma(\chi',\chi'')<1$ 是 $X(A)$ 上的一个等价关系，关于这个等价关系的等价类称为 $X(A)$ 的 **Gleason 子集**．

c）设 $u\in A$ 满足 $\rho(u)\leqslant 1$，又设 $\chi_1,\chi_2$ 是 $A$ 的两个特征标，且 $\chi_1(u)=0$．试证存在复数 $\lambda$，使得 $|\lambda|<1$，且若令 $v=(\lambda-u)(1-\bar{\lambda}u)^{-1}\in A$，则 $\chi_1(v)=\lambda$，$\chi_2(v)=-\lambda$；由此推断

$$|\chi_2(u)|\leqslant\frac{4|\chi_1(v)-\chi_2(v)|}{4+|\chi_1(v)-\chi_2(v)|^2}.$$

d）对 $A$ 的两个特征标 $\chi_1,\chi_2$，令 $\tau(\chi_1,\chi_2)=\sup|\chi_1(u)-\chi_2(u)|$，这里

上确界是对 $A$ 中满足 $\rho(u)\leqslant 1$ 的元 $u$ 所成的集取的. 试证

$$\sigma(\chi_1, \chi_2) = \frac{4\tau(\chi_1, \chi_2)}{4+(\tau(\chi_1, \chi_2))^2}$$

(利用 c)). 因而 b) 中所定义的等价关系等价于 $\tau(\chi_1,\chi_2)<2$.

e) 设 $u \in A$ 满足: 对一切特征标 $\chi\in \boldsymbol{X}(A)$, 有 $\mathscr{R}\chi(u)\geqslant 0$, 试证对任意两个特征标 $\chi_1, \chi_2$, 有

$$\mathscr{R}\chi_2(u)\geqslant \frac{1-\sigma(\chi_1, \chi_2)}{1+\sigma(\chi_1, \chi_2)}\mathscr{R}\chi_1(u)$$

(把(*)应用于元素 $e^{-tu}(t>0)$ 并使 $t$ 趋于 0).

19) 在问题 8 的假定下,设 $\chi_1, \chi_2$ 是 $B$ 的两个特征标.

a) 设 $\mu_1, \mu_2$ 分别是 $\chi_1, \chi_2$ 的表示测度(问题 9), 试证若 $\sigma(\chi_1, \chi_2)=1$ (问题 18),则测度 $\mu_1$ 与 $\mu_2$ 是互相奇异的(13.18). (写 $\mu_2 = h\cdot\mu_1+\nu$, 其中 $\nu$ 与 $\mu_1$ 互相奇异,对于 $u\in B$ 与 $\|u\|\leqslant 1$ 估计 $|\chi_2(u)-\chi_1(u)|$ 的上界,以此证明: 由假定可推出$\int(h+1)d\mu_1\leqslant\int|h-1|d\mu_1$.)

b) 试证若 $\sigma(\chi_1, \chi_2)<1$,则存在 $\chi_1$ 的表示测度 $\mu_1$ 与 $\chi_2$ 的表示测度 $\mu_2$, 使得

$$\mu_2\geqslant\frac{1-\sigma(\chi_1, \chi_2)}{1+\sigma(\chi_1, \chi_2)}\mu_1, \quad \mu_1\geqslant\frac{1-\sigma(\chi_1, \chi_2)}{1+\sigma(\chi_1, \chi_2)}\mu_2.$$

(令 $c=(1-\sigma(\chi_1, \chi_2))(1+\sigma(\chi_1, \chi_2))^{-1}$. 利用问题 18e) 与 Hahn-Banach 定理证明,存在 $X$ 上的两个正测度 $\alpha, \beta$, 使得

$$\chi_2(u)-c\chi_1(u)=\int u d\alpha, \quad \chi_1(u)-c\chi_2(u)=\int u d\beta.)$$

由此推断,对于 $B$ 的特征标 $\chi$, $\chi$ 的 Gleason 子集(问题 18b)) 是这样的特征标所成的集: 至少对于 $\chi$ 的一个表示测度 $\mu$, 这些特征标的表示测度以 $\mu$ 为基.

c) 假定 $\chi$ 是特征标,对于它只存在唯一的表示测度 $\mu$. 试证对属于 $\chi$ 的 Gleason 子集的每个特征标 $\chi'$,只存在唯一的表示测度 $\mu'$, 且有

$$\frac{1-\sigma(\chi, \chi')}{1+\sigma(\chi, \chi')}\mu\leqslant\mu'\leqslant\frac{1+\sigma(\chi, \chi')}{1-\sigma(\chi, \chi')}\mu.$$

d) 假定存在 $\chi$ 的超端表示测度 $\mu$ (问题 11). 试证若特征标 $\chi'$ 具有以 $\mu$ 为基的表示测度 $\mu'$, 则 $\mu'$ 是 $\chi'$ 的唯一的以 $\mu$ 为基的表示测度. (若 $\mu'=f\cdot\mu$, $\mu''=g\cdot\mu$ 是 $\chi'$ 的两个表示测度,利用问题 13j)证明 $f-g$ 关于 $\mu$ 几乎处处为零.)

20) 设 $A$ 与 $B$ 是两个具有单位元的交换 Banach 代数，$h: A \to B$ 是 $A$ 到 $B$ 的同态，它把单位元变为单位元。

a) 设 $\Gamma$ 是 $h$ 在 $A \times B$ 内的图象。对 $B$ 的每个特征标 $\chi$，试证映射 $(x, y) \to \chi(h(x)) - \chi(y)$ 在 $A \times B$ 内是连续的。由此推断若 $(a, b)$ 属于 $\Gamma$ 的闭包，则 $\chi(h(a)) = \chi(b)$。

b) 由 a) 推断，若 $B$ 是无根的（15.2 问题 7），则 $h$ 是连续的（利用闭图象定理）。特别，在 $\mathbf{C}$ 上的满足下述条件的交换代数上，两个定义 Banach 代数结构的范数必定等价；这个条件是：它具有单位元，并且其内任何两个极大理想的交都仅由 0 组成。

21) 设 $\mathscr{D}$ 是在 $[0, 1]$ 上任意次可导的复值函数组成的代数。

a) 设 $A$ 是 $\mathscr{D}$ 的含有单位元的子代数，并赋予 $A$ 一个范数使之成为 Banach 代数，试证存在有限非负实数序列 $(m_n)_{n\geq 0}$，使对一切函数 $x \in A$，当 $n$ 无限增大时有 $\sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |x^{(n)}(t)| = O(m_n)$。（若 $\mathscr{D}_n$ 是 15.1 问题 1 中的 Banach 代数，则 $A$ 到 $\mathscr{D}_n$ 的典则单射是连续的（问题 20）。）

b) 试证在 $\mathscr{D}$ 上不存在使 $\mathscr{D}$ 成为 Banach 代数的范数（利用 a) 与 8.14 问题 4）。

22) 设 $A$ 是具有单位元的可分 Banach 代数，试证若 $\mathfrak{a}$ 是 $A$ 的真左理想，则存在包含 $\mathfrak{a}$ 的极大左理想。（注意若 $\mathfrak{n}$ 是闭左理想，$(x_m)$ 是在 $A$ 内处处稠密的序列，使对一切 $m$ 有 $x_m \in \mathfrak{n}$ 或 $\mathfrak{n} + Ax_m = A$，则 $\mathfrak{n}$ 是极大的。）试证 $A$ 的根基（15.2 问题 7）是 $A$ 内所有极大左理想的交，也是 $A$ 内所有极大右理想的交。

## 4. 对合 Banach 代数与星代数

设 $A$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的代数。$A$ 到自身的双射 $x \to x^*$ 称为 $A$ 上的一个**对合**，如果对 $A$ 中任何 $x$，$y$ 与任何 $\lambda \in \mathbf{C}$，满足：

**(15.4.1)** $(x^*)^* = x$，$(x + y)^* = x^* + y^*$，

$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$，$(xy)^* = y^* x^*$。称 $x^*$ 为 $x$ 的**伴随元**，而 $A$ 的在对合下为稳定的子集称为**自伴子集**。

若 $A$ 具有单位元 $e$，则根据(15.4.1)，对一切 $x \in A$，有 $x \cdot e^* = (e \cdot x^*)^* = x^{**} = x$，同样有 $e^* \cdot x = x$，因而

(15.4.2) $$e^* = e.$$

若 $x$ 在 $A$ 中是可逆的，则由 (15.4.1) 与 (15.4.2)，有 $(x^{-1})^*x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e$，同样 $x^*(x^{-1})^* = e$，因而 $x^*$ 也是可逆的，并有

(15.4.3) $$(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}.$$

赋予一个对合的代数称为**对合代数**.

赋范代数 $A$ 称为**对合赋范代数**，如果赋予 $A$ 对合 $x \to x^*$，且对任何 $x \in A$ 有

(15.4.4) $$\|x^*\| = \|x\|.$$

Banach 代数 $A$ 称为**星代数**，如果赋予 $A$ 对合 $x \to x^*$，且对任何 $x \in A$ 有

(15.4.5) $$\|x\|^2 = \|x^*x\|.$$

星代数必满足 (15.4.4)，因为由 (15.4.5) 与 (15.1.1) 推出，对一切 $x \in A$，有 $\|x\|^2 \leqslant \|x\|\|x^*\|$，因之 $\|x\| \leqslant \|x^*\|$，再以 $x^*$ 换 $x$，即得(15.4.4).

对合 Banach 代数与星代数的例.

**(15.4.6)** 若 $X$ 是可度量化紧空间，则 Banach 代数 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 关于对合 $f \to \bar{f}$ ($f$ 的共轭复值函数)是星代数；若 $X$ 为单点集，则 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 同构于域 $\boldsymbol{C}$.

**(15.4.7)** 设 $E$ 是复 Hilbert 空间，则 Banach 代数 $A = \mathscr{L}(E)$ (15.1.6) 关于对合 $u \to u^*$(11.5) 是星代数.

**(15.4.8)** Hilbert-Schmidt 算子. 设 $E$ 是无穷维可分复 Hilbert 空间. $u \in \mathscr{L}(E)$ 称为 **Hilbert-Schmidt 算子**，如果对某个 Hilbert 基$(a_n)$，以$\|u(a_n)\|^2$为通项的级数收敛. 若 $(b_n)$ 是另一 Hilbert 基，则根据 Parseval 恒等式(6.5.2)，有 $\|u(a_n)\|^2 = \sum_m |(u(a_n)|b_m)|^2$，因而以 $\|u(a_n)\|^2$ 为通项的级数收敛等价于二重族 $(|u(a_n)|b_m|^2)$ 是可和的 (5.3.4). 然而因 $(u(a_n)|b_m) = (a_n|u^*(b_m))$，且由 Parseval 恒等式，有

$$\sum_n |(a_n|u^*(b_m))|^2 = \|u^*(b_m)\|^2,$$

所以与上述条件等价的一个条件是以 $\|u^*(b_n)\|^2$ 为通项的级数收敛．由此得到，若 $u$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，则对任一 Hilbert 基 $(a_n)$，以 $\|u(a_n)\|^2$ 为通项的级数收敛；$u^*$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，并且数

(15.4.8.1) $$\|u\|_2 = \left(\sum_n \|u(a_n)\|^2\right)^{1/2} = \|u^*\|_2$$

不依赖于所取的 Hilbert 基 $(a_n)$．我们将证明 Hilbert-Schmidt 算子所成的集 $\mathscr{L}_2(E)$ 是一个代数，$\|u\|_2$ 是 $\mathscr{L}_2(E)$ 上的一个范数，并且赋予这个范数与对合 $u\to u^*$ 后，$\mathscr{L}_2(E)$ 是一个没有单位元的对合 Banach 代数．

$u$ 是 Hilbert-Schmidt 算子还意味着，对一个 Hilbert 基 $(a_n)$，序列 $(\|u(a_n)\|)\in \boldsymbol{R}^N$ 属于 Hilbert 空间 $L^2_{\boldsymbol{R}}$(6.5)，并且这个序列在 $L^2_{\boldsymbol{R}}$ 内的范数等于 $\|u\|_2$．若 $u$，$v$ 属于 $\mathscr{L}_2(E)$，则不等式 $\|(u+v)(a_n)\|\leqslant\|u(a_n)\|+\|v(a_n)\|$ 与上面的附注表明 $u+v\in\mathscr{L}_2(E)$ 且 $\|u+v\|_2\leqslant\|u\|_2+\|v\|_2$．显然对每个 $\lambda\in\boldsymbol{C}$，有 $\lambda u\in\mathscr{L}_2(E)$ 且 $\|\lambda u\|_2=|\lambda|\cdot\|u\|_2$．

对任一连续算子 $w\in\mathscr{L}(E)$，根据不等式 $\|w(u(a_n))\|\leqslant\|w\|\cdot\|u(a_n)\|$ (5.5.1)，$w\circ u$ 还是 Hilbert-Schmidt 算子，且有

(15.4.8.2) $$\|w\circ u\|_2\leqslant\|w\|\cdot\|u\|_2.$$

由于 $u^*\in\mathscr{L}_2(E)$ 且 $(u\circ w)^*=w^*\circ u^*\in\mathscr{L}_2(E)$，所以也有 $u\circ w\in\mathscr{L}_2(E)$，并且根据 (11.5.2) 与 (15.4.8.1)，有

(15.4.8.3) $$\|u\circ w\|_2\leqslant\|w\|\cdot\|u\|_2.$$

于是我们看到，$\mathscr{L}_2(E)$ 是对合 Banach 代数 $\mathscr{L}(E)$ 内的一个自伴双边理想；一般来说，它在 $\mathscr{L}(E)$ 内不是闭的(问题 12)．

对每个 $x\in E$，我们可写 $x=\sum_n \xi_n a_n$，且有 $\|x\|^2=\sum_n|\xi_n|^2$．上面借助于 $L^2_{\boldsymbol{R}}$ 对 Hilbert-Schmidt 算子所作的解释表明，以 $|\xi_n|\cdot\|u(a_n)\|$ 为通项的级数收敛，且有

(15.4.8.4) $$\|u(x)\|^2\leqslant\|x\|^2\cdot\|u\|_2^2,$$

由此得到

(15.4.8.5) $$\|u\| \leqslant \|u\|_2,$$

它连同(15.4.8.2)表明，代数 $\mathscr{L}_2(E)$ 上的范数 $\|u\|_2$ 满足不等式(15.1.1)。另一方面，$\mathscr{L}_2(E)$ 含有所有秩为有限的连续自同态.事实上，若 $u$ 是这样的自同态，则它的核 $N = u^{-1}(0)$ 是闭的且在 $E$ 内是有限余维的，因而在 $E$ 内具有（有限维的）正交补空间 $M$(6.3.1)，取 Hilbert 基 $(a_n)$ 为 $N$ 的一个 Hilbert 基与 $M$ 的一个 Hilbert 基的并，则除有限个指标外都有 $u(a_n) = 0$. 由此得知 $\mathscr{L}_2(E)$ 不能有单位元，因为如果有单位元，它只能是 $E$ 的恒等映射，但因 $E$ 是无穷维的，所以 $E$ 的恒等映射不可能是 Hilbert-Schmidt 算子.

此外，若 $u \in \mathscr{L}_2(E)$，$(a_n)$ 是 Hilbert 基，$u_n$ 是 $E$ 的连续自同态，使对 $k \leqslant n$ 有 $u_n(a_k) = u(a_k)$，而对 $k > n$ 有 $u_n(a_k) = 0$，则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u - u_n\|_2 = 0$，基于(15.4.8.5)，我们证明了 $u$ 是紧算子(11.2.10)；然而存在不是 Hilbert-Schmidt 算子的紧算子（问题 12).

剩下要证明 $\mathscr{L}_2(E)$ 关于范数 $\|u\|_2$ 是完备的. 设 $(u_n)$ 是关于这个范数的 Cauchy 序列，于是由(15.4.8.5)，$(u_n)$ 也是关于 $\mathscr{L}(E)$ 的范数 $\|u\|$ 的 Cauchy 序列，因而关于这个范数收敛于 $v \in \mathscr{L}(E)$. 另一方面，存在数 $\beta > 0$，使对一切 $n$ 有 $\|u_n\|_2^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\|u_n(a_k)\|^2 \leqslant \beta$（$(a_k)$ 是 $E$ 的 Hilbert 基）. 因而对每个整数 $N$，$\sum\limits_{k=0}^{N}\|u_n(a_k)\|^2 \leqslant \beta$ 对一切 $n$ 成立，由此令 $n$ 趋于 $+\infty$，得到 $\sum\limits_{k=0}^{N}\|v(a_k)\|^2 \leqslant \beta$ 对任何 $N$ 成立，于是 $v \in \mathscr{L}_2(E)$ 且有 $\|v\|_2^2 \leqslant \beta$(5.3.1). 最后，对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0$，使当 $m \geqslant n_0, n \geqslant n_0$ 时，有 $\|u_m - u_n\|_2 \leqslant \varepsilon$. 用同样的推理可得，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $\|v - u_n\|_2 \leqslant \varepsilon$，这就证明了在 $\mathscr{L}_2(E)$ 内，有 $v = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

易于验证 Banach 代数 $\mathscr{L}_2(E)$ 不是星代数(问题 13).

**(15.4.8.6)** 附注. 设$(a_n)$是$E$的 Hilbert 基. 对每个连续算子$u\in\mathscr{L}(E)$,可使二重序列$(c_{mn})=((u(a_n)|a_m))$与之对应；这个二重序列称为$u$关于$(a_n)$的**无穷矩阵**. 上面已经看到，若$u$是 Hilbert-Schmidt 算子,则$\|u\|_2^2=\sum\limits_{m,n}|c_{mn}|^2$. 反之,若$(c_{mn})$是复数二重序列,使得二重族$(|c_{mn}|^2)$是可和的,则对每个$n$,向量$b_n=\sum\limits_m c_{mn}a_m$有定义且$\|b_n\|^2=\sum\limits_m|c_{mn}|^2$(6.5.2). 再者，对每个向量$x=\sum\limits_n\xi_n a_n\left(\|x\|^2=\sum\limits_n|\xi_n|^2\right)$, 向量$u(x)=\sum\limits_n\xi_n b_n$有定义且$\|u(x)\|^2\leqslant\left(\sum\limits_{m,n}|c_{mn}|^2\right)\cdot\|x\|^2$. 事实上，由 Cauchy-Schwarz 不等式可证,对$h\leqslant k$, 有

$$\left\|\sum_{n=h}^{k}\xi_n b_n\right\|^2\leqslant\left(\sum_{n=h}^{k}|\xi_n|\cdot\|b_n\|\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=h}^{k}|\xi_n|^2\right)\left(\sum_{n=h}^{k}\|b_n\|^2\right)$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=h}^{k}|\xi_n|^2\right)\left(\sum_{m,n}|c_{mn}|^2\right),$$

于是得到级数$\sum\limits_n\xi_n b_n$的绝对收敛性与关于$\|u(x)\|$的上述不等式.这样我们就定义了$E$的一个连续自同态$u$(5.5.1), 也易于验证$\sum\limits_n\|u(a_n)\|^2=\sum\limits_{m,n}|c_{mn}|^2$,因而$u\in\mathscr{L}_2(E)$.

**(15.4.9)** 设$G$是可分可度量化局部紧群,则映射$\mu\to\overline{(\check{\mu})}=(\bar{\mu})^\vee$(记作$\tilde{\mu}$)是 Banach 代数$M_{\mathbf{C}}^1(G)$上的一个对合(15.1.7)；这可从(14.7.3.1)得到. 此外还有$\|\mu\|=\|\bar{\mu}\|=\|\tilde{\mu}\|$(13.20.1), 因而$M_{\mathbf{C}}^1(G)$是对合 Banach 代数. 可以证明它不一定是星代数.

**(15.4.10)** 对合赋范代数(相应地,星代数)的任一自伴子代数(相应地,任一自伴闭子代数)是对合赋范代数(相应地,星代数).

**(15.4.11)** 在对合代数$A$中,元$x$称为**自伴元**(或 **Hermite 元**), 如果$x^*=x$ (这是从例(15.4.7)中得到启发而引进的术语). 对

任一 $x\in A$，$x_1=\frac{1}{2}(x+x^*)$ 与 $x_2=\frac{1}{2i}(x-x^*)$ 都是自伴的；$xx^*$ 与 $x^*x$ 也都是自伴的，然而这两个乘积一般地说并不相同．$x$ 称为**正规元**，如果 $xx^*=x^*x$，它等价于自伴元 $x_1$ 与 $x_2$ 可交换．若 $A$ 具有单位元 $e$，则 $x\in A$ 称为**酉元**，如果 $xx^*=x^*x=e$，即如果 $x$ 为可逆且 $x^{-1}=x^*$．$A$ 的所有酉元形成一个乘法群，因为若 $x$ 是酉元，则 $x^{-1}$ 也是酉元，这是由于 (15.4.3)

$$(x^{-1})^*=(x^*)^{-1}=x=(x^{-1})^{-1};$$

又若 $x$ 与 $y$ 是酉元，则 $xy$ 也是酉元，这是因为

$$(xy)^*=y^*x^*=y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}.$$

**(15.4.12)** 设 $A$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的对合 Banach 代数，则

(i) 对每个元素 $x\in A$，$\mathrm{Sp}(x^*)$是 $\mathrm{Sp}(x)$ 在映射 $\zeta\to\bar{\zeta}$ 下的象．

(ii) 若 $A$ 是星代数，则对每个自伴元 $x\in A$，有 $\mathrm{Sp}(x)\subset\boldsymbol{R}$，而对每个酉元 $y\in A$，有 $\mathrm{Sp}(y)\subset U$．

关于 (i)，若 $x-\zeta e$ 是可逆的，则 $(x-\zeta e)^*=x^*-\bar{\zeta}e$ 也是可逆的 (15.4.1 与 15.4.2)，由此即得所述论断．

至于 (ii)，假定 $\alpha+i\beta\in\mathrm{Sp}(x)$ ($\alpha$ 与 $\beta$ 为实数)，则对每个实数 $\lambda$，$\alpha+i(\beta+\lambda)$ 属于 $\mathrm{Sp}(x+i\lambda e)$，因而 (15.2.4)

$$\begin{aligned}\alpha^2+(\beta+\lambda)^2&\leqslant\|x+i\lambda e\|^2=\|x^*x+\lambda^2e\|\\&\leqslant\|x^*x\|+\lambda^2=\|x\|^2+\lambda^2,\end{aligned}$$

或

$$2\beta\lambda\leqslant\|x\|^2-\alpha^2-\beta^2;$$

然而除非 $\beta=0$，否则这个不等式不可能对一切实数 $\lambda$ 成立．另一方面，若 $y$ 是酉元，则 $\|y\|^2=\|y^*y\|=\|e\|=1$，因而 $\|y\|=1$，同样 $\|y^{-1}\|=1$，从而 $\mathrm{Sp}(y)\subset U$ (15.2.6)．

**(15.4.13)** 设 $B$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的星代数，$A$ 是 $B$ 的含有 $e$ 的自伴闭子代数，则对一切 $x\in A$，有 $\mathrm{Sp}_A(x)=\mathrm{Sp}_B(x)$．

若 $x$ 是自伴的，则有 $\mathrm{Sp}_A(x)\subset\boldsymbol{R}$，因而 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 的所有点都是 ($\boldsymbol{C}$ 内的)边界点，于是只须应用 (15.2.8) 即得所述的论断．另一方面，若 $x\in A$ 在 $B$ 中是可逆的，则 $xx^*$ 在 $B$ 中也是可逆的

(15.4.3)，而 $xx^*$ 是自伴的且属于 $A$；由上所述，$xx^*$ 在 $A$ 中是可逆的，因而 $x$ 在 $A$ 中具有右逆元。把同样的推理应用于 $x^*x$，可证 $x$ 在 $A$ 中是可逆的。在上述推理中以 $x-\zeta e$ 代替 $x$，即得关系式 $\mathrm{Sp}_A(x)=\mathrm{Sp}_B(x)$。

**(15.4.14)** **（Гельфанд-Наймарк 定理）**。设 $A$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的可分交换星代数，则 Гельфанд 变换(15.3)是 $A$ 到 $\mathscr{C}_C(X(A))$ 上的等距同构(换言之，$\rho(x)=\|\mathscr{G}x\|=\|x\|$)，使对一切 $x\in A$，有 $\mathscr{G}x^*=\overline{\mathscr{G}x}$。

若 $\chi$ 是 $A$ 的特征标，则根据 (15.4.12) 与 (15.3.1)，对 $A$ 的任一自伴元 $x$，$\chi(x)$ 是实的。于是对 $A$ 的每个元 $x=x_1+ix_2$，其中 $x_1$ 与 $x_2$ 是自伴的 (15.4.11)，有

$$\chi(x^*)=\chi(x_1-ix_2)=\chi(x_1)-i\chi(x_2)=\overline{\chi(x)},$$

这也可写为 $\mathscr{G}x^*=\overline{\mathscr{G}x}$。另一方面，注意元 $\mathscr{G}x\in\mathscr{C}_C(X(A))$所成的集区分 $X(A)$ 的点(7.3)，因为如果 $\chi_1\neq\chi_2$ 是两个特征标，则按照定义，存在 $x\in A$，使得 $\chi_1(x)\neq\chi_2(x)$，即 $(\mathscr{G}x)(\chi_1)\neq(\mathscr{G}x)(\chi_2)$；最后，因为 $\mathscr{G}e$ 是常数 1，所以常数都属于 $\mathscr{G}(A)$。于是由 (7.3.2) 推出子代数 $\mathscr{G}(A)$ 在 $\mathscr{C}_C(X(A))$ 内处处稠密. 为完成证明，现在只须证明$\mathscr{G}$是等距，因为如果此断言得证，则同构于 $A$ 的 $\mathscr{G}(A)$ 就是 $\mathscr{C}_C(X(A))$ 的完备子空间，因而必等于 $\mathscr{C}_C(X(A))$(3.14.4)。

先证明下面的引理:

**(15.4.14.1)** 在星代数 $A$ (可以是交换的，也可以不是交换的)中，对每个自伴元 $y$，有 $\rho(y)=\|y\|$。

事实上，由 (15.4.5)，我们有 $\|y\|^2=\|y^2\|$，因而对 $n$ 进行归纳推理，就有 $\|y\|^{2^n}=\|y^{2^n}\|$，或 $\|y\|=\|y^{2^n}\|^{2^{-n}}$；当 $n$ 趋于 $+\infty$时，此式右边趋于 $\rho(y)$ (15.2.7)，由此即得所述引理。

现在回到 (15.4.14) 的证明. 设 $x$ 是 $A$ 的任一元，则由引理与 (15.3.4(i))，有 $\|x\|^2=\|x^*x\|=\|\mathscr{G}(x^*x)\|$；但 $\mathscr{G}(x^*x)=\mathscr{G}x^*\cdot\mathscr{G}x=|\mathscr{G}x|^2$，且 $\|\mathscr{G}(x^*x)\|=\|\mathscr{G}x\|^2$，证毕。

**(15.4.15)** 设 $A$ 是具有单位元 $e\neq 0$ 的交换星代数，假定存在 $A$

的元 $x_0$，使得 $e, x_0$ 与 $x_0^*$ 生成 $A$ 的一个处处稠密的子代数，则映射 $\chi \to \chi(x_0)$ 是 $\mathbf{X}(A)$ 到 $\mathrm{Sp}_A(x_0)$ 上的一个同胚.

如同 (15.3.6)，我们看到 $A$ 是可分的，因而只须证明：若对两个特征标 $\chi_1$, $\chi_2$ 有 $\chi_1(x_0) = \chi_2(x_0)$，则 $\chi_1 = \chi_2$. 然而由 (15.4.14) 推出 $\chi_1(x_0^*) = \chi_2(x_0^*)$，故对一切多项式 $P \in \mathbf{C}[X, Y]$，也有 $\chi_1(P(x_0, x_0^*)) = \chi_2(P(x_0, x_0^*))$；由于按假定 $P(x_0, x_0^*)$ 形成 $A$ 的一个处处稠密子代数且 $\chi_1$ 与 $\chi_2$ 在 $A$ 内连续，所以 $\chi_1 = \chi_2$.

## 问　　题

1) 设 $A$ 是赋予连续对合 $x \to x^*$ 的赋范代数，若令 $\|x\|_1 = \sup(\|x\|, \|x^*\|)$，试证对于范数 $\|x\|_1$，$A$ 成为对合赋范代数，且范数 $\|x\|$ 与 $\|x\|_1$ 是等价的.

2) 设 $A$ 是无根 (15.2 问题 7) 交换 Banach 代数，试证 $A$ 的任一对合是连续的(利用 15.3 问题 20).

3) 设 $A$ 是具有单位元的对合交换 Banach 代数. $A$ 的特征标 $\chi$ 称为 **Hermite 特征标**，如果对一切 $x \in A$，有 $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$. 试证，为使 $A$ 的每个特征标是 Hermite 的，必须且只须对每个 $x \in A$，元 $1 + xx^*$ 在 $A$ 中都是可逆的. (若 $A$ 的特征标是 Hermite 的，则 $\mathscr{G}(1 + xx^*)$ 是在 $\mathbf{X}(A)$ 上处处取正值的函数；利用(15.3.4). 若 $A$ 有一个特征标不是 Hermite 的，则存在 $y \in A$，它是自伴的并且满足 $\chi(y) = i$. 由此得出 $\chi(1 + yy^*) = 0$，从而 $1 + yy^*$ 不是可逆的.) 由此导出具有单位元的对合交换 Banach 代数的一个例子，对于它存在非 Hermite 特征标.

4) a) 若 $A$ 是具有单位元的星代数，则对一切 $x \in A$ 有 $\|x\|^2 = \rho(x^*x)$ (先就 $x$ 为自伴的情形加以证明). 由此推断 $A$ 是无根的.

b) 设 $A$ 是 15.1 问题 2 中的代数，若对 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n T^n$，令 $x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\xi}_n T^n$，则在 $A$ 上定义了一个对合，$A$ 关于它成为具有单位元的对合交换 Banach 代数，并且 $A$ 的唯一的特征标 (15.3 问题 2) 是 Hermite 的.

5) 在 Beurling 代数 (15.1 问题 4 与 15.2 节问题 6) 上取 $f^*(t) = \overline{f(-t)}$ 作为对合，试证所有特征标都是 Hermite 的.

6) 若在 15.3 问题 7 中的代数 $A$ 上，定义由 $f \to \bar{f}$ 通过商所诱导的对合，然后通过令 $e^* = e$ 把这个对合延拓到 $\tilde{A}$，则 $\tilde{A}$ 是对合 Banach 代数. 确定它

的 Hermite 特征标.

7) a) 在星代数中,每个拟幂零的(15.2 问题 5) Hermite 元是零元.

b) 设 $A$ 是具有单位元的星代数, $x$ 是 $A$ 的左不可逆元, 则 $x^*x$ 在 $A$ 的由 1 与 $x^*x$ 生成的星子代数 $B$ 中是不可逆的, 因而存在 $B$ 中的序列 $(y_n)$, 使得 $\|y_n\| = 1$, 且 $\lim_{n\to\infty} y_n x^* x = 0$ (利用 Гельфанд-Наймарк 定理). 由此推断 $A$ 中的不可逆元是左右拓扑零因子.

8) 设 $A$ 是具有单位元的星代数, $x$ 是 $A$ 的正规元, $S = \mathrm{Sp}_A(x)$, 则存在星代数 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S)$ 到 $A$ 的唯一的同态 $\varphi$, 它把单位元变为单位元且使得 $\varphi(1_S)= x$. 这个同态是一个等距,它把 $\bar{f}$ 变换为 $\varphi(f)^*$, 把 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S)$ 变换为 $A$ 的由 1, $x$ 与 $x^*$ 所生成的星子代数上,因而这个子代数的所有元都是正规的. 令 $\varphi(f)= f(x)$, 试证若 $f$ 在 $S$ 的一个邻域内解析, 则 $f(x)$ 等于 15.2 问题 11 中作同样标记的元.

9) 设 $A$ 是具有单位元(记作 $e$)的星代数, 以 $P$ 表示使得 $\mathrm{Sp}_A(x)$ 包含在区间 $[0, +\infty[$ 内的自伴元 $x \in A$ 所成的集.

a) 试证若 $x \in A$ 是自伴的且 $\|e - x\| \leqslant 1$, 则 $x \in P$. 若 $x \in P$ 且 $\|x\| \leqslant 1$, 则 $\|e - x\| \leqslant 1$. (考虑由 $e$ 与 $x$ 生成的子代数.) 由此推断, 为使自伴元 $x$ 属于 $P$, 必须且只须

$$\|x - \|x\|e\| \leqslant \|x\|.$$

b) 由 a) 推断 $P$ 是 $A$ 内的闭凸锥,使得 $P \cap (-P) = \{0\}$.

c) 试证关系 $x^*x \in -P$ 蕴含 $x = 0$. (先注意也有 $xx^* \in -P$, 并写 $x = u + iv$, 其中 $u$ 与 $v$ 都是自伴的, 由上面的关系式推出 $x^*x \in P$, 由此得到 $x^*x = 0$.)

d) 由 c) 推断,对一切 $x \in A$ 有 $x^*x \in P$. (可写 $x^*x = u - v$, 其中 $u$ 与 $v$ 是 Hermite 的且 $u \in P$, $v \in P$, $uv = vu = 0$ (利用问题 8). 若 $z = xv$,试证 $z^*z \in -P$ 并由此推断 $v = 0$.) 由此推出 $e + x^*x$ 在 $A$ 中是可逆的(利用问题 8).

10) a) 设 $A$ 是具有单位元的交换 Banach 代数, $x \to x^*$ 是 $A$ 的任一对合. 对 $A$ 的每个特征标 $\chi$, 令 $\chi^*(x) = \overline{\chi(x^*)}$, 试证 $\chi \to \chi^*$ 是空间 $\boldsymbol{X}(A)$ 的一个对合同胚.

b) 设 $X$ 是可度量化紧空间, $\varphi$ 是 $X$ 到自身的对合同胚. 若对每个函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$, 令 $f^*(x) = \overline{f(\varphi(x))}$, 证明这就在 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 上定义了一个对合, 而且 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 上的任何对合都可以这样得到.

c) 以 $X$ 表示 $\boldsymbol{R}^2$ 内下列各集的并所成的紧子空间: 线段 $y = 0$, $-1 \leqslant$

$x\leqslant 2$；线段 $x=0$，$1\leqslant y\leqslant 2$；圆周 $x^2+y^2=1$；以及开半圆盘 $D: y>0$，$x^2+y^2<1$。假定 $X$ 到自身的唯一的对合同胚是恒等映射(第二十四章)。设 $A$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$ 中在 $D$ 内解析的函数组成的 Banach 子代数，试证 $A$ 的谱可以典则地等同于 $X$，并且代数 $A$ 除恒等映射外没有别的对合。

11) 设 $A$ 是非交换的星代数。

a) 试证存在 Hermite 元 $y\in P$(问题 9 中的记号)，使得 $y$ 是可逆的，且 $y^2$ 不属于 $A$ 的中心 $Z$.(利用问题 9 证明在相反的情形下，$Z$ 与 $A$ 中由Hermite 元所成的实向量子空间 $H$ 的交就会包含 $e$ 在 $H$ 内的一个邻域，从而就会推出 $A$ 是交换的.)

b) 由 a) 推断，若对每个 $x\in A$，令 $x'=y^{-1}x^*y$，则 $x\to x'$ 是 $A$ 的一个连续对合，使对某个 $x\in A$，有 $(x')^*\neq(x^*)'$.

12) 设 $E$ 是 Hilbert 空间，则为使自伴紧算子 $U$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，必须且只须：若 $(\lambda_n)$ 是 $U$ 的特征值的序列 (每个特征值都按它的重数列举)，则和 $\sum_n|\lambda_n|^2$ 为有限. 此时这个和等于 $\|U\|_2^2$.

13) a) 当 $E$ 是有限维 Hilbert 空间时，如 (15.4.8) 那样定义范数 $\|u\|_2$. 在 $n$ 维 Hilbert 空间上给出算子 $u$ 的例子，使得

$$\|u^*u\|_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\|u\|_2^2.$$

b) 设 $E$ 是无穷维 Hilbert 空间，给出 $E$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子序列 $(u_n)$ 的例子，使得数列 $(\|u_n^*u_n\|_2/\|u_n\|_2^2)$ 趋于 0.

14) 设 $X$ 是(可距离化与可分的)局部紧空间，$\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$K(x, y)$ 是定义在 $X\times X$ 上的函数且属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$，则对每个函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X, \mu)$，函数 $x\to\int K(x, y)f(y)d\mu(y)$ 几乎处处有定义，并且它的类属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X, \mu)$ (利用 Lebesgue-Fubini 定理与 Cauchy-Schwarz 不等式)；若以 $U\cdot\tilde{f}$ 表示这个类，试证 $U$ 是 Hilbert-Schmidt 算子；称这个算子相伴于核 $K$. 试证 $\|U\|_2=N_2(K)$，$U^*$ 相伴于核 $(x, y)\to\overline{K(y, x)}$；若 $U_1$，$U_2$ 分别相伴于属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$ 的核 $K_1$，$K_2$，则 $U_1U_2$ 相伴于核

$$K(x, y)=\int K_1(x, t)K_2(t, y)d\mu(t).$$

15) 设 $E$ 是无穷维 Hilbert 空间，$U$ 是 $E$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子，试证若 $\lambda$ 对于 $U$ 是正则值，则算子 $(U-\lambda\cdot 1_E)^{-1}$ 具有 $V-\lambda^{-1}1_E$ 的形式，其

中 $V$ 是一个 Hilbert-Schmidt 算子. 由此推断 $U$ 在代数 $\mathscr{L}(E)$ 内的谱与它在对 $\mathscr{L}_2(E)$ 添加单位元后所得的代数内的谱相同. 对每个在包含 $\mathrm{Sp}(U)$ 的一个开集内解析的函数 $f$, 算子 $f(U)$ (15.2 问题 11) 是 Hilbert-Schmidt 算子.

16) 设 $H_1, \cdots, H_n$ 是可分 Hilbert 空间 $E$ 上两两可交换的自伴算子, 且对任何 $j$, $k$ 满足关系式

$$\|H_j\| \leqslant 1, \quad \|H_j H_k\| \leqslant \varepsilon^{|j-k|},$$

其中 $\varepsilon$ 是满足 $0 \leqslant \varepsilon < 1$ 的数, 则

$$\|H_1 + H_2 + \cdots + H_n\| \leqslant \frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

(**Cotlar 引理**).

(利用 Гельфанд-Наймарк 定理归结为对实数 $u_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 证明同样的性质. 对每个 $t \geqslant 0$, 设 $\nu(t)$ 是使得 $|u_j| \geqslant t$ 的指标 $j$ 的个数, 注意

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j| = \int_0^1 \nu(t) dt;$$

另一方面, 注意若 $|u_j| \geqslant t$, $|u_k| \geqslant t$, 则

$$\varepsilon^{|j-k|} \geqslant |u_j u_k| \geqslant t^2,$$

因而

$$\nu(t) \leqslant 1 + \left[\frac{2 \log t}{\log \varepsilon}\right]. \Big)$$

17) 设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数, $x \to x^*$ 是 $A$ 上的一个对合, 但不一定连续.

a) 试证 $A$ 的根基 (15.2 问题 7) $\mathfrak{R}$ 是 $A$ 的自伴子集; 于是 $A$ 的对合通过商在 $A/\mathfrak{R}$ 上给出一个对合, 我们仍把这个对合记作 $z \to z^*$.

b) 设 $a = a^*$ 是 $A$ 的自伴元, 使得 $\mathrm{Sp}_A(a)$ 包含在开半平面 $\mathscr{R}\zeta > 0$ 内, 则存在元 $b \in A$, 使得 $b$ 是自伴元序列 $(u_n)$ 的极限, 而这些 $u_n$ 都是 $a$ 的多项式, 且有 $b^2 = a$ (选取适当的 $\alpha > 0$, 写 $a = \alpha(e - (e - \alpha^{-1} a))$, 并利用 15.2 问题 11f) 与问题 15). 试证 $b$ 与 $b^*$ 可交换, 因而可写 $b = u + iv$, 其中 $u$ 与 $v$ 是自伴的, 而且互相可交换且各与 $a$ 可交换; 由此推断 $uv = 0$ 与 $u^2 - v^2 = a$.

c) 设 $C$ 是 $A$ 的交换 Banach 子代数, 它含有 $e, a, b, b^*$, 且有 $\mathrm{Sp}_C(b) = \mathrm{Sp}_A(b)$ (15.2 问题 15). 设 $C'$ 是 $A$ 的交换 Banach 子代数, 它包含 $C$ 在 $C$ 到 $A$ 的同态 $\varphi: x \to x^*$ 下的象. 若 $\mathfrak{R}'$ 是 $C'$ 的根基而 $\pi: C' \to C'/\mathfrak{R}'$ 是典则同态, 则同态 $\pi \circ \varphi: C \to C'/\mathfrak{R}'$ 是连续的 (15.3 问题 20); 由此推断 $v = \frac{1}{2i}(b^* - b)$

$\in \mathfrak{R}'$，然后推断 $\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_A(u^2)$. (注意

$$\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_{C'/\mathfrak{R}'}(\pi(u^2 - v^2)) = \mathrm{Sp}_{C'/\mathfrak{R}'}(\pi(u^2)).)$$

因此 $u$ 是可逆的；$v = u^{-1}uv = 0$；最后，$b = u$ 是自伴的. 此外，若 $\mathrm{Sp}(a)$ 包含在 $]0, +\infty[$ 内，则 $\mathrm{Sp}(b)$ 也包含在 $]0, +\infty[$ 内.

18) 在问题 17 相同的假定下， 令 $p_A(x) = (\rho(x^*x))^{1/2}$ ( 也把它记作 $p(x)$). 我们有 $p(x^*) = p(x)$；若 $\mathfrak{R}$ 是 $A$ 的根基，$\pi: A \to A/\mathfrak{R}$ 是典则同态，则 $p_{A/\mathfrak{R}}(\pi(x)) = p_A(x)$.

$A$ 的对合 $x \to x^*$ 称为 **Hermite 对合**，或者对合代数 $A$ 称为 **Hermite 代数**，如果对每个自伴元 $a \in A$，有 $\mathrm{Sp}(a) \subset \boldsymbol{R}$. 当 $A$ 为交换时，上述定义等价于 $A$ 的每个特征标是 Hermite 的(问题 2).

在本题中，下面假定 $A$ 是 Hermite 的.

a) 设 $x \in A$ 满足 $p(x) < 1$，试证 $(e + x^*)(e - x)$ 是可逆的. (注意根据问题 17，有 $e - x^*x = w^2$，其中 $w$ 是自伴的与可逆的；由此推断 $w^{-1}(x^* - x)w^{-1}$ 的谱包含在 $i\boldsymbol{R}$ 内.) 试证对一切 $x \in A$，有

$$\rho(x) \leqslant p(x)$$

(Pták 不等式). 因而若 $x$ 是正规的，则 $\rho(x) = p(x)$ (注意若 $x$，$y$ 在某个 Banach 代数内可交换，则由 (15.3.4) 有 $\rho(xy) \leqslant \rho(x)\rho(y)$). 特别若 $x$ 是酉元，则 $\rho(x) = 1$ 且 $\mathrm{Sp}(x) \subset U$.

b) 由 a) 推断，对 $A$ 的每对自伴元 $a$，$b$，有 $\rho(ab) \leqslant \rho(a)\rho(b)$ (注意

$$\rho(ab) \leqslant p(ab) = (\rho(a^2b^2))^{1/2} \leqslant \|a^2\|^{1/2}\|b^2\|^{1/2});$$

对 $A$ 的每对元 $x$，$y$，有 $p(xy) \leqslant p(x)p(y)$； $A$ 的根基是使得 $p(x) = 0$ 的 $x \in A$ 的集.

c) 试证，若 $a$，$b$ 是 $A$ 的两个自伴元，使得 $\mathrm{Sp}(a)$ 与 $\mathrm{Sp}(b)$ 都包含在 $[0, +\infty[$ 内，则 $\mathrm{Sp}(a + b)$ 也包含在 $[0, +\infty[$ 内(写

$$e + a + b = (e + a)(e - uv)(e + b),$$

其中 $u$，$v$ 满足 $\rho(u) < 1$，$\rho(v) < 1$). 由此推断，若 $a$，$b$ 是自伴的，则

$$\rho(a + b) \leqslant \rho(a) + \rho(b).$$

试证对一切 $x \in A$，有 $\mathrm{Sp}(x^*x + xx^*) \subset [0, +\infty[$.

d) 若 $a$，$b$ 是 $A$ 的两个自伴元，试证 $\rho(a^2) \leqslant \rho(a^2 + b^2)$ (注意 $\rho(a^2 + b^2)e - a^2 = (\rho(a^2 + b^2)e - a^2 - b^2) + b^2$ 并利用 c)). 由此推断，对一切 $x \in A$，有

$$\rho(x^* + x) \leqslant 2p(x).$$

e) 由 b) 与 d) 推断，对 $A$ 的每对元 $x$、$y$，有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$

若 $A$ 是无根的，则 $p$ 在 $A$ 上定义了一个赋范代数结构，其拓扑粗于由范数 $\|x\|$ 所定义的拓扑，且若 $A$ 关于范数 $p$ 是完备的，则这两个拓扑不相等。

f) 试证若 $A$ 是无根的，则函数 $x\to x^*$ 在 $A$ 上是连续的.（注意当序列 $(x_n)$ 趋于 0 且使得序列 $(x_n^*)$ 趋于 $y$ 时，$p(x_n^*)$ 与 $p(y-x_n^*)$ 都趋于 0，由此应用闭图象定理；然后利用 e).）

g) 试证 $p$ 是 $A$ 上的连续函数(利用 f)，为此注意存在常数 $c>0$，使得 $\|\pi(x^*)\|\leqslant c\|\pi(x)\|$ 且 $p_A(x)=p_{A/\mathfrak{R}}(\pi(x))$).

h) 试证对一切 $x\in A$，$\mathrm{Sp}(x^*x)$ 包含在 $[0,+\infty[$ 内.（用反证法，假定存在 $x\in A$，使得若 $z=x^*x$，则 $-1\in\mathrm{Sp}(z)$. 对每个整数 $n$，设 $w_n$ 是 $A$ 的自伴元，它与 $z$ 可交换且使得 $w_n^2=z^2+\frac{1}{n}e$，$\mathrm{Sp}(w_n)\subset[0,+\infty[$（问题 17）. 若 $b_n=w_n-z$，考虑 $A$ 的一个含有 $w_n$ 与 $z$ 的交换 Banach 子代数 $B$，使得 $z$，$w_n$ 与 $b_n$ 在 $B$ 内的谱与在 $A$ 内的谱相同，由此证明

$$\mathrm{sp}(b_n)\subset[0,+\infty[;$$

并且有 $\rho(b_n)\leqslant 1+2\rho(z)=\alpha$，$\alpha$ 不依赖于 $n$（利用 c)）. 令 $y_n=xb_n$，因而 $y_n^*y_n=-b_n^2w_n+\frac{1}{n}b_n$；由此推断 $\mathrm{Sp}(y_n^*y_n)$ 包含在区间 $]-\infty,\frac{\alpha}{n}[$ 内；然后推断 $\mathrm{Sp}(y_ny_n^*)$ 包含在区间 $\left[-\frac{\alpha}{n},+\infty\right[$ 内（利用 c)）；推出 $\rho(y_n^*y_n)\leqslant\frac{\alpha}{n}$（15.2 问题 2b)），因而对 $B$ 的一切特征标 $\chi$，有 $|\chi(y_n^*y_n)|\leqslant\frac{\alpha}{n}$. 最后，注意 $y_n^*y_n=b_n^2z$，$\chi(w_n)\geqslant 0$ 且存在 $\chi$ 使得 $\chi(z)=-1$，由此得出矛盾.）

19) 设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数，$x\to x^*$ 是 $A$ 上的对合，不一定连续. 试证下列性质是等价的：

$\alpha$) $A$ 是 Hermite 的.

$\beta$) 对 $A$ 的一切正规元 $x$，有 $\rho(x)\leqslant p(x)$.

$\gamma$) 对 $A$ 的一切正规元 $x$，有 $\rho(x)=p(x)$.

$\delta$) 对一切 $x\in A$，有 $\rho(x^*+x)\leqslant\alpha p(x)$.

$\varepsilon$) 对 $A$ 的每对元 $x$，$y$，有 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

$\zeta$) 当 $x$ 取遍 $A$ 的酉元时 $\rho(x)$ 组成的集是有界的.

$\eta$) 对每个 $x\in A$，$e+x^*x$ 在 $A$ 中是可逆的.

（用反证法证明 $\eta$) 蕴涵 $\alpha$)，为此证明 Hermite 元的谱不可能含有 $i$. 用类似于 (15.4.12) 中的推理证明 $\gamma$) 蕴涵 $\alpha$). 为证 $\delta$) 蕴涵 $\beta$)，注意由 $\delta$) 推出，若 $x$ 是正规元，则对一切正整数 $n$，有 $(\rho(x))^n=\rho(x^n)\leqslant 2(p(x))^n$. 最

后，为证明 ξ)蕴涵 α)，先注意由 ξ)推出，对一切酉元 $x$，有 $\mathrm{Sp}(x)\subset U$，为此考虑 $x^n(n\in\mathbf{Z})$. 然后注意，若 $a$ 是自伴元且 $\rho(a)<1$，则存在与 $a$ 可交换的自伴元 $b$，使得 $b^2=e-a^2$（问题 17），因而 $a+ib$ 是酉元；然后取含有 $a$ 与 $b$ 的一个交换 Banach 子代数，使得 $a$，$b$ 与 $a+ib$ 在 $A$ 中的谱与在 $B$ 中的谱相同.）

20）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数，$x\to x^*$ 是 $A$ 上的一个对合，不一定连续.

试证，若 $\|x\|\leqslant\rho(x)$，则 $A$ 是星代数.

## 5. 对合代数的表示

设 $A$ 是对合代数（不一定赋予范数，也不一定具有单位元），$H$ 是 Hilbert 空间，$\mathscr{L}(H)$ 是 $H$ 的连续自同态所成的代数. $A$ 到 $\mathscr{L}(H)$ 的同态 $s\to U(s)$ 称为 $A$ 到 $H$ 中的一个**表示***，如果它满足

(15.5.1) $$U(s^*)=(U(s))^*.$$

由此特别推出，若 $s$ 是自伴的，则 $U(s)$ 也是自伴的. 若 $A$ 具有单位元 $e$，则我们还要求

(15.5.2) $$U(e)=1_H.$$

$U$ 称为**忠实表示**，如果同态 $s\to U(s)$ 是单射，换言之，如果 $U(s)\cdot x=0$ 对一切 $x\in H$ 成立蕴涵 $s=0$.

设 $H$，$H'$ 是两个 Hilbert 空间，$A$ 到 $H$ 中的表示 $s\to U(s)$ 与 $A$ 到 $H'$ 中的表示 $s\to U'(s)$ 称为**等价的**，如果存在 Hilbert 空间之间的同构 $T:H\to H'$，使对任何 $s\in A$，有 $U'(s)=TU(s)T^{-1}$.

注意，当 $H=H'$ 时，$H$ 的 Hilbert 空间自同构 $T$ 正是星代数 $\mathscr{L}(H)$ 的酉元. 事实上，$T$ 必是可逆的且对 $H$ 的任何元 $x$，$y$，有 $(T\cdot x|T\cdot y)=(x|y)$，这也可写为 $(T^*T\cdot x|y)=(x|y)$，或 $T^*T=1_H$，因而 $T^*=T^{-1}$；反之显见.

设 $H_1$，$H_2$ 是两个 Hilbert 空间，$s\to U_1(s)$ 是 $A$ 到 $H_1$ 中的表

* 一般称为酉表示. 由于我们以后不考虑其他表示，所以用语随便些，略去"酉"字.

示，$s\to U_2(s)$ 是 $A$ 到 $H_2$ 中的表示；设 $H$ 是 $H_1$ 与 $H_2$ 的 Hilbert 和，从而 $H_1$ 与 $H_2$ 等同于 $H$ 的两个互补子空间，且若 $x=x_1+x_2$ 与 $y=y_1+y_2$ 是 $H$ 的两个向量（其中 $x_i\in H_i$, $y_i\in H_i$, $i=1, 2$），则有

$$(x|y)=(x_1|y_1)+(x_2|y_2)$$

若令 $U(s)\cdot(x_1+x_2)=U_1(s)\cdot x_1+U_2(s)\cdot x_2$，则易于验证对每个 $s\in A$，$U(s)$ 属于 $\mathscr{L}(H)$，并且 $s\to U(s)$ 是一个表示，它称为所给表示的 **Hilbert 和**.

设 $s\to U(s)$ 是 $A$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的表示，称 $H$ 的向量子空间 $E$ 关于这个表示是**稳定的**，如果对一切 $s\in A$，有 $U(s)E\subset E$. 若 $E$ 关于 $U$ 是稳定的，则它的闭包 $\bar{E}$ 关于 $U$ 也是稳定的 (3.11.4). 再者，若 $E$ 是闭的而 $E'$ 是 $E$ 的正交补空间 (6.3)，则 $E'$ 关于 $U$ 也是稳定的. 事实上，对于 $x\in E$ 与 $x'\in E'$，按假定有 $(x|U(s)\cdot x')=((U(s))^*\cdot x|x')=(U(s^*)\cdot x|x')=0$，因而 $U(s)\cdot x'$ 与所有 $x\in E$ 正交，从而属于 $E'$. 若 $U_1(s)$ 与 $U_2(s)$ 分别是 $U(s)$ 在 $E$ 与 $E'$ 上的限制，则表示 $U$ 是 $U_1$ 与 $U_2$ 的 Hilbert 和.

**(15.5.3)** 为使 $H$ 的闭子空间 $E$ 关于 $U$ 是稳定的，必须且只须对一切 $s\in A$，有 $P_EU(s)=U(s)P_E$（$P_E$ 是 $E$ 上的正交投影（或译为直交射影）(6.3)）.

所述条件是必要的，因为 $E$ 关于 $U$ 是稳定的，所以对 $x\in E$，有 $P_E\cdot x=x$ 与

$$P_E\cdot(U(s)\cdot x)=U(s)\cdot x;$$

又因 $E'$ 关于 $U$ 也是稳定的，所以对 $x\in E'$，有 $P_E\cdot x=0$ 与 $P_E\cdot(U(s)\cdot x)=0$. 反之，若所述条件得到满足，则对一切 $x\in E$ 与 $s\in A$，有 $U(s)\cdot x=P_E\cdot U(s), x\in E$.

在 Hilbert 空间 $H$ 中，任一在 $H$ 上连续的算子称为**正交投影算子**，如果它是到 $H$ 的一个闭子空间上的正交投影. 这种投影算子的重要性在于 (15.5.3) 它由 $\mathscr{L}(H)$ 的对合代数结构所表述的特征：

**(15.5.3.1)** 为使 Hilbert 空间 $H$ 上的连续算子 $P$ 是正交投影算子，

必须且只须它是幂等的与 Hermite 的.

我们已经证明过所述条件的必要性(11.5). 反之,若 $P^2=P$, $P^*=P$, 则对 $H$ 中任何 $x$, $y$, 都有 $(P\cdot x\,|\,y-P\cdot y)=(x\,|\,P\cdot y-P^2\cdot y)=0$;由于 $P(H)$ 也是 $1_H-P$ 的核,所以它是闭的,由前所证,$H$ 是 $P(H)$ 与 $P^{-1}(0)$的 Hilbert 和,由此即得所需的结论.

假定$H$是关于表示$U$为稳定的子空间所成的无穷序列$(H_n)$的 Hilbert 和,并把 $U(s)$ 在 $H_n$ 上的限制记作 $U_n(s)$, 因而对每个 $n$, $s\to U_n(s)$ 是 $A$ 到 $H_n$ 中的表示. 在用语随便时,我们也称表示$U$是这些表示 $U_n$ 的 **Hilbert 和**; 对每个 $s\in A$ 与每个 $x=\sum_n x_n\in H$ (其中 $x_n\in H_n$), 有 $U(s)\cdot x=\sum_n U_n(s)\cdot x_n$, $\sum_n\|U_n(s)\cdot x_n\|^2=\|U(s)\cdot x\|^2$.

$A$ 到$H$ 中的表示 $s\to U(s)$ 称为**拓扑不可约表示**,如果在$H$内不存在异于 $\{0\}$ 与$H$的、关于 $U$ 为稳定的闭向量子空间 $E$.

由 (15.5.3) 推出下述关于不可约性的判断准则:

**(15.5.4)** 为使 $U$ 是拓扑不可约的,必须且只须: 对一切 $s\in A$ 满足 $PU(s)=U(s)P$ 的正交投影算子 $P$ 只能是 0 与 $1_H$.

事实上,所说条件表述了 $\{0\}$ 与$H$是$H$内仅有的关于 $U$ 为稳定的闭子空间.

**(15.5.5)** 设 $s\to U(s)$ 是$A$ 到$H$中的表示,$E$ 是由元 $U(s)\cdot x$ (这里 $s\in A$, $x\in H$) 所生成的向量子空间在$H$内的闭包, $E'$ 是使得 $U(s)\cdot x=0$ 对一切 $s\in A$ 都成立的 $x\in H$组成的集, 则 $E$ 与 $E'$ 关于$U$是稳定的且在$H$内互为正交补空间.

由于 $U(st)=U(s)U(t)$, 所以显然 $E$ 与 $E'$ 关于 $U$ 是稳定的. 设 $E''$ 是 $E$ 的正交补空间, 上面已经证明 $E''$ 关于 $U$ 是稳定的;然而按照定义,对 $x\in E''$, 有 $U(s)\cdot x\in E$, 因此对任何 $s$,都有 $U(s)\cdot x\in E\cap E''=\{0\}$, 由此得到 $E''\subset E'$. 反之, 若 $x\in E'$, $s\in A$ 且 $y\in H$,则按定义有 $(x\,|\,U(s)\cdot y)=(U(s^*)\cdot x\,|\,y)=0$,因而 $x$ 正交于 $E$, 即 $E'\subset E''$, 这就证明了所述命题.

我们把$E$称为$U$的**本性子空间**;并把$U$称为**非退化表示**,如果$E'=\{0\}$(或如果形如$U(s)\cdot x$的元形成$H$的一个全子空间). 若$A$具有单位元,则根据(15.5.2),上述条件总能成立.

向量 $x_0\in H$ 称为关于 $A$ 到$H$中的表示$U$的**全化子**或**全化向量**,如果$s$取遍$A$时,$H$中由变式$U(s)\cdot x_0$所生成的向量子空间(它关于$U$为稳定)在$H$内处处稠密. 具有全化向量的表示称为**单演表示**. 若$U$是拓扑不可约的,则$H$中任一向量$x_0\neq 0$是全化子,反之亦然.

**(15.5.6)** 假定$A$具有单位元,设$s\to U(s)$是$A$到可分 Hilbert 空间$H$中的非退化表示,则$H$是关于$U$为稳定的闭子空间组成的(有限或无穷)序列$(H_n)$的 Hilbert 和,使得$U$在每个$H_n$上的限制是单演的.

设$(x_n)_{n\geq 1}$是在$H$内处处稠密的序列,用归纳法定义$H_n$如下:$H_1$是$H$内由$U(s)\cdot x_1$(这里$s$取遍$A$)所生成的向量子空间的闭包;因为$A$具有单位元,所以$x_1\in H_1$. 如果对于$1\leqslant i\leqslant n$我们已经构造了$H_i$,若$H$等于$H_i(1\leqslant i\leqslant n)$的(直)和$L$,则构造完毕. 若不然,设$L'$是$L$在$H$内的正交补空间,$p(n)$是使得$x'_n$是$x_{p(n)}$在$L'$上的正交投影的最小整数,则$L'$内由$U(s)\cdot x'_n$($s$取遍$A$)所生成的向量子空间$H'_n$不能仅由0组成;这样的指标存在是因为表示$U$是非退化的,并且我们取$H_n$为$H'_n$的闭包. 由于$x'_n\in H_n$,根据(6.4.2),$H_n$就是所提问题的解.

**(15.5.7)** 若$A$是具有单位元的对合 Banach 代数,则$A$到 Hilbert 空间$H$中的每个表示$s\to U(s)$满足$\|U(s)\|\leqslant\|s\|$(特别,$U$是$A$到$\mathscr{L}(H)$的连续映射).

事实上,在星代数$\mathscr{L}(H)$内,$\|U(s)\|^2=\|U(s)^*U(s)\|=\rho(U(s)^*U(s))$成立(15.4.14.1). 由于$U(s)^*U(s)=U(s^*s)$,由(15.2.8,(i))得到

$$\rho(U(s^*s))\leqslant\rho(s^*s)\leqslant\|s^*s\|\leqslant\|s^*\|\|s\|=\|s\|^2.$$

特别是,我们由此又得到了(15.3.1,(ii)).

## 6. 正线性形式、正 Hilbert 形式与表示

设 $A$ 是对合代数(不一定赋予范数,也不一定具有单位元). $A$ 上的线性形式 $f: A \to \mathbf{C}$ 称为**正线性形式**,如果对一切 $x \in A$,有

**(15.6.1)** $$f(x^*x) \geqslant 0.$$

**(15.6.2)** 设 $f$ 是对合代数 $A$ 上的正线性形式,则

(i) 映射 $(x, y) \to g(x, y) = f(y^*x)$ 是 $A \times A$ 上的正 Hermite 形式,换言之,对 $A$ 中任何 $x, y$, 有

**(15.6.2.1)** $$f(x^*y) = \overline{f(y^*x)}.$$

(ii) 对 $A$ 中任何 $x, y$, 有

**(15.6.2.2)** $$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(x^*x)f(y^*y).$$

(iii) 若 $A$ 具有单位元 $e$, 则

**(15.6.2.3)** $$f(x^*) = \overline{f(x)},$$

**(15.6.2.4)** $$|f(x)|^2 \leqslant f(e)f(x^*x).$$

为证明 (i), 写

$$g(x+y, x+y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y),$$

它是实的;根据假定 (15.6.1), 得到

$$\mathscr{I}(g(y, x)) = -\mathscr{I}(g(x, y));$$

把 $x$ 换为 $ix$,就成为 $\mathscr{R}(g(x, y)) = \mathscr{R}(g(y, x))$,因而 $g(y, x) = \overline{g(x, y)}$. 断言 (ii) 无非是应用于 $g$ 的 Cauchy-Schwarz 不等式 (6.2.1). 在 (15.6.2.1) 与 (15.6.2.2) 中用 $e$ 代替 $y$ 并考虑到 (15.4.2),就得到 (iii) 中的关系式.

由 $f$ 出发这样得到的 Hermite 形式 $g$ 不是任意的, 因为对 $A$ 中的 $x, y, z$, 显然它满足关系式

**(15.6.3)** $$g(xy, z) = g(y, x^*z).$$

如果 $A \times A$ 上的正 Hermite 形式还满足关系式 (15.6.3),就称为对合代数 $A$ 上的**正 Hilbert 形式**.

当 $A$ 具有单位元 $e$ 时,每个正 Hilbert 形式 $g$ 都可象上面那样

由一个正线性形式 $f$ 导出;为此只须取 $f(x)=g(x,e)$. 但是以后我们将看到,当 $A$ 没有单位元时,这个命题就不再成立(15.7.4).

我们指出,在 $A\times A$ 上的 Hilbert 形式与 $A$ 的表示之间有值得注意的关系.

首先,$A$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的每个表示 $s\to U(s)$ 由下述方式产生正线性形式(因而产生正 Hilbert 形式): 对每个 $x_0\in H$,若令

(15.6.4) $$f_{x_0}(s)=(U(s)\cdot x_0|x_0),$$

则显然 $f_{x_0}$ 是 $A$ 上的线性形式,并且根据 (15.5.1),有

$$\begin{aligned}f_{x_0}(s^*s)&=(U(s^*)U(s)\cdot x_0|x_0)=(U(s)\cdot x_0|U(s)\cdot x_0)\\&=\|U(s)\cdot x_0\|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

对应的 Hilbert 形式是

(15.6.5) $$g_{x_0}(s,t)=(U(s)\cdot x_0|U(t)\cdot x_0).$$

例如,若 $A=\mathscr{L}(H)$,其中 $H$ 是(有限) $n$ 维 Hilbert 空间,$1_A$: $T\to T$ 是 $A$ 到 $H$ 中的恒等表示,则线性形式 $f_{x_0}$ 可明确表述如下: 设 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $H$ 的一个 Hilbert 基,$(\zeta_{ij})$ 是 $T$ 关于这个基的矩阵,则对 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$, 有

(15.6.6) $$f_{x_0}(T)=\sum_{i,j}\lambda_i\bar{\lambda}_j\zeta_{ij}.$$

在研究(15.6.4)这种类型的正线性形式时,总可以假定 $x_0$ 是关于 $U$ 的全化向量(15.5),因为如果考虑 $H$ 的由 $x_0$ 与 $U(s)\cdot x_0$($s$ 取遍 $A$)所生成的稳定子空间的闭包,则当用 $U$ 在这样的稳定子空间上的限制代替 $U$ 时,$f_{x_0}$ 并不改变. 我们先注意,在这一附加补充假定下,除等价外,线性形式 $f_{x_0}$ 确定了表示 $U$:

**(15.6.7)** 设 $U$, $U'$ 分别是 $A$ 到 Hilbert 空间 $H$, $H'$ 中的两个表示,假定 $U$(相应地,$U'$)具有全化向量 $x_0$(相应地,$x_0'$). 若对一切 $s\in A$ 有 $(U(s)\cdot x_0|x_0)=(U'(s)\cdot x_0'|x_0')$, 则表示 $U$ 与 $U'$ 等价.

事实上,对 $A$ 中任何 $s$, $t$, 有

(15.6.7.1) $(U(s)\cdot x_0|U(t)\cdot x_0)=(U(t^*s)\cdot x_0|x_0)$
$$=(U'(t^*s)\cdot x'_0|x'_0)=(U'(s)\cdot x'_0|U'(t)\cdot x'_0).$$
由于这些 $U(t)\cdot x_0$（相应地，$U'(t)\cdot x'_0$）形成 $H$（相应地，$H'$）的处处稠密的子空间 $H_0$（相应地，$H'_0$），这就表明，若 $U(s)\cdot x_0=0$，则 $U'(s)\cdot x'_0=0$，反之亦然. 由此推出，对于使得 $U(s)\cdot x_0=z$ 的每个 $z\in H_0$ 与每个 $s\in A$，所有的点 $U'(s)\cdot x'_0$ 都等于 $H'_0$ 的同一个点 $z'=T\cdot z$，并且由于 (15.6.7.1)，映射 $T$ 是准 Hilbert 空间 $H_0$ 到准 Hilbert 空间 $H'_0$ 的一个同构；根据 (5.5.4) 与恒等式延拓原理，它可以唯一地延拓为 Hilbert 空间 $H$ 到 Hilbert 空间 $H'$ 上的同构(仍记为 $T$). 剩下要证明，对 $z\in H$，有
$$T\cdot(U(s)\cdot z)=U'(s)\cdot(T\cdot z),$$
而由恒等式的延拓，可以只限于 $z=U(t)\cdot x_0$ 的情形. 然而此时有 $U(s)\cdot(U(t)\cdot x_0)=U(st)\cdot x_0$，因而按定义有 $T\cdot(U(st)\cdot x_0)=U'(st)\cdot x'_0=U'(s)\cdot(U'(t)\cdot x'_0)=U'(s).(T\cdot z)$. 证毕.

此外，可以从线性形式 $f_{x_0}$ 出发直接定义准 Hilbert 空间 $H_0$，也可以从 Hilbert 形式 $g_{x_0}$ 出发直接定义 $H_0$. 事实上，一般地我们有下述命题:

**(15.6.8)** 设 $g$ 是 $A$ 上的正 Hilbert 形式，则使得 $g(s,s)=0$ 的 $s\in A$ 所成的集 $\mathfrak{n}$ 是 $A$ 的一个左理想，且等于使得 $g(s,t)=0$ 对一切 $t\in A$ 成立的 $s\in A$ 所成的集. 若 $\pi:A\to A/\mathfrak{n}$ 是典则线性映射，则在 $A/\mathfrak{n}$ 上存在唯一的准 Hilbert 空间结构，使对 $A$ 中任何 $s$, $t$, 有 $(\pi(s)|\pi(t))=g(s,t)$.

Cauchy-Schwarz 不等式 $|g(s,t)|^2\leqslant g(s,s)g(t,t)$(6.2.1) 表明 $\mathfrak{n}$ 是使得 $g(s,t)=0$ 对一切 $t\in A$ 成立的 $s\in A$ 所成的集；于是关系式 (15.6.3) 表明 $\mathfrak{n}$ 是 $A$ 的一个左理想. 根据关系式 $g(t,s)=\overline{g(s,t)}$，对 $s\in\mathfrak{n}$ 与 $t\in A$ 也有 $g(t,s)=0$；由此推出，若 $s-s'\in\mathfrak{n}$, $t-t'\in\mathfrak{n}$(也即 $\pi(s)=\pi(s')$, $\pi(t)=\pi(t')$)，则 $g(s,t)=g(s',t')$，因为 $g(s,t)-g(s',t')=g(s,t-t')+g(s-s',t')$. 由于 $g(s,t)$ 只依赖于 $\pi(s)$ 与 $\pi(t)$，所以可以把它写为 $(\pi(s)|\pi(t))$，而验证这样定义在 $(A/\mathfrak{n})\times(A/\mathfrak{n})$ 上的函数 $(x|y)$ 是非退化正

Hermite 形式这一事实是容易的.

在 $g = g_{x_0}$ 的情形，有 $g_{x_0}(s, s) = \|U(s) \cdot x_0\|^2$，因而 $\mathfrak{n}$ 是 $A$ 到 $H_0$ 上的线性映射 $u: s \to U(s) \cdot x_0$ 的核. 公式 (15.6.5) 表明，由 $u$ 通过商所诱导的双射 $\tilde{s}: A/\mathfrak{N} \to H_0$ 是准 Hilbert 空间之间的同构. 正如早先所述，这表明 $H$ 除同构外由 $g_{x_0}$ 所确定. 再者，表示 $s \to U(s)$ 本身由 $A$ 的代数结构与给定的 $g_{x_0}$ 所导出，因为

$$U(s) \cdot (U(t) \cdot x_0) = U(s) \cdot (s \cdot \pi(t)) = s \cdot \pi(st),$$

而当在 $H_0$ 中已知 $U(s)$ 后，就可把它连续延拓到 $H$ 上 (5.5.4).

然而，$g_{x_0}$ 这种类型的正 Hilbert 形式还不是最一般的；事实上它们还满足一个补充条件，这个条件表达了每个 $U(s)$ 是 $H_0$ 上的连续算子. 鉴于 (15.6.5) 与 (5.5.1)，它等价于对于线性形式 $g = g_{x_0}$ 的下述条件:

($U$) 对每个 $s \in A$，存在数 $M_s \geqslant 0$，使对一切 $t \in A$，有

**(15.6.9)** $$g(st, st) \leqslant M_s g(t, t).$$

反过来，我们有下述命题:

**(15.6.10)** 设 $g$ 是 $A$ 上的满足条件 ($U$) 的正 Hilbert 形式，假定准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}$（采用 (15.6.8) 中的记号）是可分的，因而 (6.6.2) 它等同于 Hilbert 空间 $H$ 的一个处处稠密的向量子空间，则对每个 $s \in A$，$A/\mathfrak{n}$ 的自同态 $\pi(t) \to \pi(st)$ 可以延拓为 $H$ 的连续自同态 $x \to V(s) \cdot x$，并且 $s \to V(s)$ 是 $A$ 到 $H$ 中的一个表示.

首先注意，若 $\pi(t) = \pi(t')$，则 $\pi(st) = \pi(st')$，因为 $\mathfrak{n}$ 是左理想；于是所考虑的 $H_0$ 的自同态被完全确定，而且 $A/\mathfrak{n}$ 上纯量积的定义连同 (15.6.9) 表明这个自同态是连续的 (5.5.1)，由此即得连续算子 $V(s)$ 的存在性 (5.5.4). 由于 $\pi((ss')t) = \pi(s(s't))$，所以

$$V(ss') = V(s)V(s');$$

另一方面，根据 (15.6.3)，有

$$\begin{aligned}(V(s^*) \cdot \pi(t) | \pi(t')) &= g(s^*t, t') = g(t, st') \\ &= \overline{g(st', t)} = \overline{(V(s) \cdot \pi(t') | \pi(t))} = (\pi(t) | V(s) \cdot \pi(t')),\end{aligned}$$

这表明 $V(s^*) = (V(s))^*$. 最后，若 $A$ 具有单位元 $e$，则显然有 $V(e) = 1_H$，因而 $s \to V(s)$ 是 $A$ 到 $H$ 中的一个表示.

掌握在何种条件下这样定义的表示 $s \to V(s)$ 为非退化(15.5.5)是有用的,而这等价于关于 $g$ 的下述条件:

(N) 所有元 $\pi(st)$ 在准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}$ 内形成一个全子集.

当 $A$ 具有单位元时,这个条件显然满足.

在(15.6.10)的条件下,一般来说不存在 $x_0 \in H$,使得 $g(s,t) = (V(s) \cdot x_0 | V(t) \cdot x_0)$(参阅 15.9 问题 3). 但当 $A$ 具有单位元 $e$ 时,这样的向量恒存在;事实上只须取 $x_0 = \pi(e)$.

当 $A$ 具有单位元 $e$ 且 $A$ 是对合 Banach 代数时,不仅正 Hilbert 形式的理论归结为正线性形式的理论并且条件(N)恒能满足,而且条件(U)也恒能满足. 精确地说:

**(15.6.11)** 设 $A$ 是具有单位元 $e \neq 0$ 的对合 Banach 代数,$f$ 是 $A$ 上的正线性形式,则

(i) $f$ 是连续的且 $\|f\| = f(e)$.

(ii) $|f(y^*xy)| \leqslant \|x\| f(y^*y)$.

我们要利用下面的引理:

**(15.16.11.1)** 若 $x \in A$ 是自伴的并且 $\|x\| < 1$,则存在自伴元 $y \in A$,使得 $y^2 = e + x$.

对于满足 $|t| < 1$ 的实数 $t$,Taylor 公式(8.14.3)给出

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{\frac{1}{2}}{2}t^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}t^n + r_n(t),$$

其中

$$r_n(t) = \frac{(-1)^n}{2}\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\int_0^t \left(\frac{t-s}{1+s}\right)^n \frac{ds}{\sqrt{1+s}}.$$

这就立即给出上界

$$|r_n(t)| \leqslant |t|^n,$$

因而有

$$\text{(15.6.11.2)} \quad (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{\frac{1}{2}}{2}t^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}t^n + \cdots,$$

右边的级数对 $|t| < 1$ 绝对收敛(9.1.2). 由此得到,在 Banach 代数 $A$ 内,级数

$$e + \frac{1}{2}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots$$

对 $\|x\| < 1$ 绝对收敛,且当 $x$ 为自伴元时,这个级数的和 $y$ 也是自伴元. 又由于 (15.6.11.2) 右边的幂级数的平方是 $1 + t$, 所以由 (5.5.3) 得到 $y^2 = e + x$.

这一引理表明, 对于在 $A$ 内自伴且满足 $\|x\| < 1$ 的 $x$, 存在 $y \in A$, 使得 $y^*y = e - x$, 由此 $f(e - x) \geqslant 0$,因而 $f(x) \leqslant f(e)$. 现在若 $z \in A$ 且 $\|z\| < 1$,则也有 $\|z^*z\| < 1$,因而根据(15.6.2.4),有 $|f(z)|^2 \leqslant f(e)f(z^*z) \leqslant f(e)^2$,这表明 $f$ 是连续的且 $\|f\| \leqslant f(e)$ (5.7.1); 由于还有 $\|e\| = 1$, 所以 $f(e) \leqslant \|f\|$, 由此即得断言 (i).

为证明 (ii),我们注意, 对 $y \in A$, $A$ 上的线性形式 $x \to f(y^*xy)$ 是正的, 因为 $f(y^*x^*xy) = f((xy)^*(xy)) \geqslant 0$; 根据 (i), 这个线性形式的范数是 $f(y^*y)$, 这就证明了 (ii).

## 问　　题

1) 设 $A$ 是对合代数, $U$ 是 $A$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的表示, 则为使 $U$ 是不可约的,必须且只须 $\mathscr{L}(H)$ 的子代数 $B$ 等于 $\mathbf{C} \cdot 1_H$,这里 $B$ 由使得 $VU(s) = U(s)V$ 对一切 $s \in A$ 都成立的自同态 $V$ 所构成. (为证明所述条件是必要的, 注意 $B$ 是 $\mathscr{L}(H)$ 的对合闭子代数, 因而是星代数; 若 $S$ 是属于 $B$ 的 Hermite 算子, 考虑 $B$ 内由 $S$ 所生成的闭交换子代数 $C$, $C$ 是可分的, 因而同构于 $\mathscr{C}_C(X)$, 其中 $X$ 是一个可度量化的紧空间; 证明 $C$ 不可能含有非零的零因子并由此推断 $X$ 是单点集.)

2) 设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数,$x \to x^*$ 是 $A$ 上的对合, 但不一定连续.

a) 设 $f$ 是 $A$ 上的一个线性形式,使对 $A$ 的一切自伴元 $a$,有 $f(a^2) \geqslant 0$,试证若还有 $\rho(a) < 1$, 则 $f(a)$ 是实的并且 $|f(a)| \leqslant f(e)$ (利用 15.4 问题 17). 并证明对 $A$ 的每个自伴元 $a$, $f(a)$ 都是实的,且有 $|f(a)| \leqslant f(e)\rho(a)$, $f(a)^2 \leqslant f(e)f(a^2)$ (对 $\xi \in \mathbf{R}$ 考虑 $f((a + \xi e)^2)$). 由此推断 $|f(x)| \leqslant f(e)\rho(x)$ (15.4

问题 18 中的记号)，因而 $f$ 在 $A$ 上连续. 此外还有 $|f(y^*xy)|\leqslant\rho(x)f(y^*y)$.

b) 反之，若 $f$ 是 $A$ 上的线性形式，使对 $x\in A$，有 $|f(x)|\leqslant f(e)p(x)$，试证对 $A$ 的一切自伴元 $a$，$f(a)$ 都是实的，且

$$|f(a)|\leqslant f(e)\rho(a)$$

(对 $\xi\in\boldsymbol{R}$ 考虑 $f(a+i\xi e)$).

c) 假定对合 $x\to x^*$ 是 Hermite 的 (15.4 问题 18)，试证对于 $A$ 上的线性形式 $f$，下列陈述是等价的：

$\alpha$) $f$ 是正线性形式.

$\beta$) 对 $A$ 的每个自伴元 $a$，$f(a)$ 是实的并且 $|f(a)|\leqslant f(e)\rho(a)$.

$\gamma$) 对 $A$ 的每个自伴元 $a$，有 $f(a^2)\geqslant 0$.

$\delta$) 对一切 $x\in A$，有 $|f(x)|\leqslant f(e)p(x)$.

(利用 a) 与 b). 为证明 $\beta$)蕴涵 $\alpha$)，注意若 $\mathrm{Sp}(a)$包含在 $\boldsymbol{R}$ 的区间$[\lambda,\mu]$内且若 $f(e)\neq 0$，则 $f(e)>0$ 且 $f(a)$ 属于区间 $[f(e)\lambda, f(e)\mu]$.)

3) 设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的可分 Banach 代数，$x\to x^*$ 是 $A$ 上的一个对合，但不一定连续.

a) 试证若 $A$ 是 Hermite 的，则对每个 $x\in A$，存在 $A$ 上的正线性形式 $f$，使得 $f(e)=1$，$f(x^*x)^{1/2}=p(x)$. (考虑由 $x^*x$ 所生成的交换 Banach 子代数 $C$，并考虑包含 $C$ 的交换 Banach 子代数 $B$，使对每个 $y\in C$，有 $\mathrm{Sp}_B(y)=\mathrm{Sp}_A(y)$. 于是对 $B$ 的每个特征标 $\chi$ 与每个 $y\in C$，有 $\chi(y^*)=\overline{\chi(y)}$，并且存在这样的特征标 $\chi$，使得 $\rho(x^*x)=\chi(x^*x)$. 若 $g$ 是 $\chi$ 在 $C$ 上的限制，则对一切 $y\in C$，有 $|\chi(y)|\leqslant\rho(y)$. 再利用 15.4 问题 18c)，12.15 问题 4 与上面的问题 2c).)

b) 反之，若对每个 $x\in A$，存在 $A$ 上的正线性形式 $f$，使得 $f(e)=1$，$f(x^*x)^{1/2}=p(x)$，则 $A$ 是 Hermite 的. (若 $\alpha=\rho(x^*x)$，$u=\alpha e-x^*x$，证明对 $A$ 上的每个满足 $f(e)=1$ 的正线性形式 $f$，有 $f(u^2)\leqslant\alpha^2$，并由假定推出 $\rho(u^2)\leqslant\alpha^2$，由此得到 $\rho(\alpha e-x^*x)\leqslant\alpha$；再利用 15.4 问题 19.)

c) 假定 $A$ 是 Hermite 的，$S(A)$ 是 Banach 空间 $A$ 的对偶空间 $A'$ 的子空间，它的元是 $A$ 上的满足 $f(e)=1$ 的正线性形式 $f$，于是 $S(A)$ 关于弱拓扑 (12.15.9)是紧的与可度量化的. 设 $(f_n)$ 是 $S(A)$ 中的处处稠密序列，$s\to U_n(s)$ 是 $A$ 到可分 Hilbert 空间 $H_n$ 中的表示，其中 $H_n$ 由 $f_n$ 通过 (15.6.10) 中的方式所导出. 由此令

$$U(s)\cdot\sum_n x_n=\sum_n U_n(s)\cdot x_n,$$

就导出 $A$ 到作为上述这些 $H_\pi$ 的 Hilbert 和 (6.4) 的 Hilbert 空间 $H$ 中的一个表示 $U$. 试证 $\|U(s)\| = p(s)$, 因而 $U$ 的核是 $A$ 的根基 $\mathfrak{R}$, 并且 $U$ 是连续的.

d) 具有单位元的星代数 $A$ 是 Hermite 的(15.4.12),且对一切 $x \in A$,有 $\|x\| = p(x)$ (15.4, 问题 4a)). 若 $A$ 是可分的, 则存在 $A$ 到 $\mathscr{L}(E)$($E$ 是可分 Hilbert 空间)的一个闭对合子代数上的等距同构 $U$,使对一切 $s \in A$,有 $U(s^*) = (U(s))^*$.

e) 若 $E$ 是可分 Hilbert 空间, 则代数 $A = \mathbf{C} \cdot 1_E \oplus \mathscr{L}_2(E)$ 对于范数 $\|\xi \cdot 1_E + u\|_2 = |\xi| + \|u\|_2$((15.4.8) 中的记号) 是 Hermite 的 Banach 代数. 对 $u \in \mathscr{L}_2(E)$, 比较 $\|u\|_2$ 与 $p(u)$.

4)* 设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数, $x \to x^*$ 是 $A$ 上的一个对合, 不假定它连续. 试证下列陈述是等价的:

$\alpha$) 在 $A$ 上存在等价于给定范数的范数,使得 $A$ 关于此范数成为星代数.

$\beta$) 存在数 $\lambda > 0$, 使对一切 $x \in A$, 有 $\|x^*x\| \geqslant \lambda\|x^*\| \cdot \|x\|$.

$\gamma$) $A$ 的酉元所成的集是有界的.

$\delta$) 对合 $x \to x^*$ 是 Hermite 的,并且存在数 $\mu > 0$, 使对一切 Hermite 元 $a \in A$, 有 $\|a\| \leqslant \mu\rho(a)$.

(为证明 $\delta$) 蕴涵 $\alpha$), 证明此时有 $\|x\| \leqslant 2\mu\rho(x)$, 为此写 $x = a + ib$, 其中 $a, b$ 是 Hermite 元, 并利用 15.4 问题 18d), 然后利用 15.4 问题 18g). 为证明 $\beta$) 蕴涵 $\delta$), 先利用 (15.2.7) 证明, 若 $a$ 是 Hermite 元, 则 $\lambda\|a\| \leqslant \rho(a)$; 由此推断, 若 $x$ 是正规的, 则对一切正整数 $n$, 有 $\lambda^2\|x^n\|\|(x^*)^n\| \leqslant \rho(x^*x)^n$, 并利用 15.4 问题 19 证明 $A$ 是 Hermite 的. 最后, 为证明 $\gamma$) 蕴涵 $\delta$), 注意对每个满足 $\rho(a) < 1$ 的 Hermite 元 $a$, 在 $A$ 中存在与 $a$ 可交换的 Hermite 元 $b$, 使得 $b^2 = e - a^2$(15.4 问题 17), 因而 $u = a + ib$ 是酉元且 $a = \frac{1}{2}(u + u^*)$.)

5) 设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的 Banach 代数,并赋予它 Hermite 对合 $x \to x^*$.

a) 设 $x \in A$ 满足 $p(x) < 1$, 试证 $x(e - x^*x)^{1/2} = (e - x^*x)^{1/2}x$ (参阅 15.2 问题 11f)).

b) 在同样的假定下,试证函数

$$F(\zeta) = (e - x^*x)^{-1/2}(\zeta e + x)(e + \zeta x^*)^{-1}(e - x^*x)^{1/2}$$

在开圆盘 $|\zeta| < 1 + \varepsilon$ 内有定义且全纯,其中 $\varepsilon$ 是一个正数,并且对 $|\zeta| = 1$, $F(\zeta)$ 是酉的. (对于 $|\zeta| = 1$,若令 $a = e - x^*x, b = e - xx^*$, $y = \zeta e + x$,

则 $e+\zeta x^*=\zeta y^*$, $yy^{*-1}=\zeta(x+by^{*-1})$, $y^{*-1}y=\zeta(x+y^{*-1}a)$，最后还有 $yy^{*-1}a=by^{*-1}y$.）

c）试证使得 $p(x)\leqslant 1$ 的 $x\in A$ 所成的集是 $A$ 的酉元所成的集的闭凸包(12.14问题13)．（利用关系 $x=F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{it})dt$.）

6）设 $A$ 是具有单位元的 Banach 代数，并赋予它一个对合 $x\to x^*$，不假定这个对合连续．试证下列陈述是等价的：

$\alpha$）$A$ 是星代数．

$\beta$）对一切 $x\in A$，有 $\|x\|\leqslant p(x)$.

$\gamma$）对 $A$ 中一切正规元 $x$，有 $\|x^*\|\cdot\|x\|=\|x^*x\|$.

$\delta$）对 $A$ 中一切酉元 $x$，有 $\|x\|=1$.

（为证明 $\delta$）蕴涵 $\beta$)，先注意 $\delta$）蕴涵 $A$ 对于等价于给定范数的一个范数是星代数(问题4)，特别 $A$ 是 Hermite 的；然后应用问题5c).）

## 7. 迹、双迹与 Hilbert 代数

设 $A$ 是对合代数，$f$ 是 $A$ 上的正线性形式．如(15.6.6)表明的，一般地说，对 $A$ 中的 $x,y$，$f(xy)\neq f(yx)$．$f$ 称为 $A$ 上的迹，如果 $f$ 是满足下述条件的正线性形式：对 $A$ 中任何 $x,y$，有

**(15.7.1)** $$f(yx)=f(xy).$$

我们注意到，为使 $f$ 是迹，只须对一切 $x\in A$，有 $f(xx^*)=f(x^*x)$，因为用 $x+y$ 代替 $x$ 并利用(15.6.2.1)可以推出

$$\mathscr{R}(f(y^*x))=\mathscr{R}(f(xy^*)),$$

然后用 $ix$ 代替 $x$，可以推出 $\mathscr{I}(f(y^*x))=\mathscr{I}(f(xy^*))$，最后得到，对任何 $x$ 与 $y$，有 $f(y^*x)=f(xy^*)$.

当 $A$ 为交换时，条件(15.7.1)当然满足．

**(15.7.2)例．** 取代数 $A=\mathscr{L}(H)$ 作为例子，其中 $H$ 是 $n$（有限）维 Hilbert 空间．正线性形式 $f(T)=\sum_{i=1}^{n}(T\cdot e_i|e_i)$ 是一个迹，因为可以直接验证这就是自同态 $T$ 的迹 $\mathrm{Tr}(T)=\sum_{i=1}^{n}\zeta_{ii}$.

与此相反，易于证明，若 $H$ 是无穷维 Hilbert 空间，则不存在

$\mathscr{L}(H)$ 上的迹(本节的问题)。

与正 Hilbert 形式相对应的是双迹的概念. $A$ 上的正 Hilbert 形式 $g$ 称为**双迹**,如果 $g$ 满足补充条件

(**15.7.3**) $$g(y^*, x^*) = g(x, y)$$

当 $g(x, y) = f(y^*x)$(其中 $f$ 是正线性形式)时,(15.7.3)就归结为(15.7.1)。

(**15.7.4**) 例. 考虑无穷维可分 Hilbert 空间 $E$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子所成的代数$\mathscr{L}_2(E)$(**15.4.8**). 对 $E$ 的任一 Hilbert 基$(a_n)$与每对 Hilbert-Schmidt 算子$(u, v)$, 和$\sum_n (u(a_n)|v(a_n))$是有定义的,因为

$$(u(a_n)|v(a_n)) = ((v^*u)(a_n)|a_n);$$

并且我们已经证明二重族$((v^*u)(a_n)|a_m)$是绝对可和的(15.4.8), 因为 $v^*u$ 是 Hilbert-Schmidt 算子. 此外, 对 $E$ 的每个 Hilbert 基$(b_n)$,有(6.5)

$$(u(a_n)|v(a_n)) = \sum_m (u(a_n)|b_m)(b_m|v(a_n))$$

$$= \sum_m (a_n|u^*(b_m))(v^*(b_m)|a_n),$$

因而

$$\sum_n (u(a_n)|v(a_n)) = \sum_m (v^*(b_m)|u^*(b_m)).$$

这表明和 $\sum_n (u(a_n)|v(a_n))$ 不依赖于所考虑的正规正交基$(a_n)$. 若把这个和记作 $g(u, v)$, 即可看出 $g$ 是 $\mathscr{L}_2(E)$ 上的正 Hermite 形式, 满足 $g(u, u) = \|u\|_2^2$. 再者, 对三个 Hilbert-Schmidt 算子 $u, v, w$, 有

$$(u(v(a_n))|w(a_n)) = (v(a_n)|u^*(w(a_n))),$$

即 $g(uv, w) = g(v, u^*w)$,并且上面的计算结果表明 $g(v^*, u^*) = g(u, v)$,换言之, $g$ 是 $\mathscr{L}_2(E)$ 上的一个双迹. 可以证明,这个双迹不能从 $\mathscr{L}_2(E)$ 上的迹导出(本节的问题). 注意 $g$ 还满足(15.6)

中的条件 $(U)$ 与 $(N)$. 关于 $(U)$，这是不等式 (15.4.8.2) 的结果；关于 $(N)$，注意秩为有限的自同态所成的集在 $\mathscr{L}_2(E)$ 内稠密 (15.4.8)，且若 $u(E)=F$ 是有限维的，就可以写 $u=P_F\circ u$((6.3.1) 中的记号)，其中 $P_F$ 的秩也为有限.

**(15.7.4.1)** 附注. 当 $E$ 是 $n$ (有限) 维 Hilbert 空间时，可以如 (15.7.4) 那样在 $\mathscr{L}(E)=\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$ 上定义纯量积 $(u|v)$，而且如 (15.4.8) 中所看到的，若令 $\|u\|_2^2=(u|u)$，则 $\|u\|_2$ 是 $\mathscr{L}(E)$ 上的范数，满足 $\|uv\|_2\leqslant\|u\|_2\cdot\|v\|_2$；$\|u\|_2$ 必等价于通常的范数 $\|u\|$ (5.9.1)，但只要 $n>1$，它就不满足 (15.1.2)，因为 $\|1_E\|_2=n^{\frac{1}{2}}$.

我们再回到任一对合代数 $A$，并设 $g$ 是 $A$ 上的双迹. 由于 $g(s^*,s^*)=g(s,s)$，所以 (15.6.8) 中定义的左理想 $\mathfrak{n}$ 是自伴的，因而它是双边理想. 此时向量空间 $A/\mathfrak{n}$ 就被赋予一个代数结构. 因为 $\mathfrak{n}$ 是自伴的，所以映射 $s\to s^*$ 通过商在代数 $A/\mathfrak{n}$ 上给出一个对合，从而有 $\pi(s^*)=(\pi(s))^*$；又 $g$ 通过商在 $A/\mathfrak{n}$ 上导出的纯量积 $(x|y)$ 是 $A/\mathfrak{n}$ 上的双迹；最后，若 $g$ 满足条件 $(U)$（相应地，$(N)$），则 $A/\mathfrak{n}$ 上的纯量积也满足条件 $(U)$（相应地，$(N)$）.

**(15.7.5)** 如果赋予对合代数 $A$ 满足 $(U)$ 与 $(N)$ 的双迹 $(x|y)$ 所定义的准 Hilbert 空间结构，则称 $A$ 为 **Hilbert 代数**. 这就是说，纯量积 $(x|y)$ 满足下列条件：

**(15.7.5.1)** $$(y^*|x^*)=(x|y)$$

**(15.7.5.2)** $$(xy|z)=(y|x^*z)$$

**(15.7.5.3)** 对每个 $x\in A$，存在数 $M_x\geqslant 0$，使得
$$(xy|xy)\leqslant M_x(y|y).$$

**(15.7.5.4)** $A$ 的形如 $xy$ (其中 $x\in A$，$y\in A$) 的元在 $A$ 内形成一个全子集.

注意由 (15.7.5.1) 与 (15.7.5.2) 得到

**(15.7.5.5)** $$(yx|z)=(y|zx^*).$$

事实上，我们有 $(yx|z)=\overline{(x^*y^*|z^*)}=\overline{(y^*|xz^*)}=(y|zx^*)$.

此外还有

**(15.7.5.6)** $$(yx|xy)\leqslant M_{x^*}(y|y).$$

因为 $(yx|yx)=(x^*y^*|x^*y^*)\leqslant M_{x^*}(y^*|y^*)=M_{x^*}(y|y)$.

不等式 (15.7.5.3) 与 (15.7.5.6) 表明，线性映射 $y\to xy$ 与 $x\to xy$ 在 $A$ 内关于准 Hilbert 空间的拓扑是连续的；然而必须注意，一般地说，$A$ 关于这个拓扑不是可赋范的代数 (15.1.8)，换言之，映射 $(x, y)\to xy$ 一般不是连续的。

最后有

**(15.7.5.7)** 设 $x\in A$，则关系式 $x^*x=0$ 蕴涵 $x=0$.

事实上，首先由 (15.7.5.2) 推出 $(xy|xy)=(x^*xy|y)=0$，因而对一切 $y\in A$ 有 $xy=0$。于是由 (15.7.5.5) 得到，对任何 $y, z$，有 $(x|yz)=(xz^*|y)=0$；由 (15.7.5.4) 就推出 $x=0$.

特别是，$A$ 的右(相应地，左)零化子仅由 0 构成，且对 $A$ 中每个 $x\neq 0$，左理想 $Ax$ 不等于 $\{0\}$.

在以下两节中，我们要确定最重要的两类 Hilbert 代数的结构。

### 问　　题

a) 试证在 $n$ 阶方阵所成的代数 $A=M_n(\mathbf{C})$ 上，对于每对矩阵 $(X, Y)$ 满足 $f(XY)=f(YX)$ 的唯一线性形式是迹的纯量倍 $X\to\rho\operatorname{Tr}(X)$.

b) 由此推断，对于无穷维的可分 Hilbert 空间 $H$，不存在代数 $\mathscr{L}(H)$ 或代数 $\mathscr{L}_2(H)$ 上的迹. (考虑使得 $U(e_n)=\lambda_n e_n$ 的紧算子 $U$，其中 $(e_n)$ 形成 $H$ 的一个 Hilbert 基，$\lambda_n$ 是正数，使得级数 $\sum_n \lambda_n^2$ 收敛但级数 $\sum_n \lambda_n$ 发散；利用 a)，考虑迹 $f$ (假定它存在)在 $H$ 的由 $e_k(k\leqslant n)$ 所生成的向量子空间的自同态代数上的限制.)

## 8. 完备 Hilbert 代数

在本节中，我们假定 Hilbert 代数 $A$ 关于范数 $\|x\|=(x|x)^{1/2}$ 是完备的(因而它是 Hilbert 空间)。我们还假定 $A\times A$ 到 $A$ 的双线性映射 $(x, y)\to xy$ 关于这个范数是连续的 (可以证明 (12.16 问题 8c)，这是别的假定的推论)。显然，$A$ 的任一闭自伴子代数还

是完备 Hilbert 代数.

**(15.8.1)** 设 $\mathfrak{b}$ 是 $A$ 内的闭左理想，对一切 $y\in\mathfrak{b}$ 与 $x\in A$，令 $U_{\mathfrak{b}}(x)\cdot y=xy$，则 $x\to U_{\mathfrak{b}}(x)$ 是代数 $A$ 到 Hilbert 空间 $\mathfrak{b}$ 中的表示.

首先，根据 (15.7.5.3)，$U_{\mathfrak{b}}(x)$ 是 $\mathfrak{b}$ 上的连续算子. 显见有 $U_{\mathfrak{b}}(xx')=U_{\mathfrak{b}}(x)U_{\mathfrak{b}}(x')$. 对 $\mathfrak{b}$ 中的 $y$, $z$，由于 (15.7.5.2)，有 $(U_{\mathfrak{b}}(x)^*\cdot y|z)=(y|U_{\mathfrak{b}}(x)\cdot z)=(y|xz)=(x^*y|z)=(U_{\mathfrak{b}}(x^*)\cdot y|z)$，因而 $U_{\mathfrak{b}}(x)^*=U_{\mathfrak{b}}(x^*)$；如果 $A$ 还具有单位元 $e$，则 $U_{\mathfrak{b}}(e)$ 是恒等变换.

当 $\mathfrak{b}=A$ 时，我们写 $U(x)$ 以代替 $U_A(x)$ 并把 $U$ 称为 $A$ 的**正则表示**. 根据 (15.7.5.7)，$U$ 是忠实的. 又由于 $(x,y)\to xy$ 的连续性，$x\to U(x)$ 是 $A$ 到 $\mathscr{L}(A)$ 的连续线性映射.

完备 Hilbert 代数的研究建立在关于它的极小左理想与生成这些极小左理想的幂等元的考察的基础上.

对 $A$ 的每个左理想 $\mathfrak{l}$，把它在对合 $s\to s^*$ 下的象记作 $\mathfrak{l}^*$，显然它是右理想.

**(15.8.2)** 对 $A$ 的每个左理想 $\mathfrak{l}$，$\mathfrak{l}$ 的闭包 $\bar{\mathfrak{l}}$ 的正交补子空间 $\mathfrak{l}^{\perp}$ 是左理想.

由于 $\bar{\mathfrak{l}}$ 是左理想 (15.1.3)，故可限于考虑 $\mathfrak{l}$ 为闭的情形. 若 $y\in\mathfrak{l}^{\perp}$ 且 $z\in A$，则因 $\mathfrak{l}$ 是左理想，所以对一切 $x\in\mathfrak{l}$ 有 $(zy|x)=(y|z^*x)=0$，由此得到 $zy\in\mathfrak{l}^{\perp}$.

**(15.5.3)** 设 $e\neq 0$ 是 $A$ 中的幂等元，则:

(i) $\|e\|\geqslant 1$;

(ii) $e^*$ 是幂等元;

(iii) 左理想 $Ae$ 是使得 $x=xe$ 的 $x\in A$ 所成的集，它在 $A$ 内是闭的.

第一个论断由不等式 $\|e\|=\|e^2\|\leqslant\|e\|^2$ 得到. 第二个论断是显见的. 最后，若 $x=xe$，则 $x\in Ae$；反之，若 $x\in Ae$，则对于某个 $y\in A$ 有 $x=ye$，因而 $xe=ye^2=ye=x$. $Ae$ 为闭这一事实由映射 $x\to x-xe$ 的连续性与 (3.15.1) 得到.

我们特别来考虑自伴幂等元的情形(参阅 (15.5.3.1)):

**(15.8.4)** 对 $A$ 的两个自伴幂等元 $e_1$, $e_2$, 下列性质是等价的: a) $(e_1|e_2)=0$;b) $e_1e_2=0$; c) $e_2e_1=0$.

因为 $(e_1e_2)^*=e_2^*e_1^*=e_2e_1$, 所以显然b)与c)等价. 若 $(e_1|e_2)=0$, 则由 (15.7.5.2) 与 (15.7.5.5) 推出

$$0=(e_1^2|e_2^2)=(e_1e_2|e_1e_2)=\|e_1e_2\|^2,$$

因而 a) 蕴涵 b). 反之,若 $e_1e_2=0$, 则

$$(e_1|e_2)=(e_1^2|e_2)=(e_1|e_1e_2)=0,$$

因而 b) 蕴涵 a).

**(15.8.5)** $A$ 的每个左理想 $\mathfrak{l}\neq\{0\}$ 含有不等于 0 的自伴幂等元.

若 $x\neq 0$ 位于 $\mathfrak{l}$ 内,则 $z=x^*x\neq 0$ (15.7.5.7),且 $z$ 是 $\mathfrak{l}$ 内的自伴元. 以一个非零实纯量乘 $z$ 并把 $A$ 的正则表示 (15.8.1) 记作 $U$, 我们可以假定 $\|U(z)\|=1$. 由此并由 (15.8.1) 与 (11.5.3) 推出 $\|U(z^2)\|=1$. 对 $n$ 作归纳法得到 $\|U(z^{2^n})\|=1$. 另一方面,对一切 $k$ 有

$$\|U(z^{k+1})\|=\|U(z)U(z^k)\|\leqslant\|U(z)\|\cdot\|U(z^k)\|=\|U(z^k)\|.$$

序列 $(\|U(z^k)\|)$ 是递减的且有无穷多项等于 1, 因而对一切正整数 $k$ 有 $\|U(z^k)\|=1$. 由此得到,对一切 $k$ 有 $\|z^k\|\geqslant 1/\|U\|$. 我们证明序列 $(z^{2^k})$ 是 Hilbert 空间 $A$ 中的 Cauchy 序列. 设 $n,p$ 是两个正整数, $m=n+p$,则有

$$\begin{aligned}(z^{2m}|z^{2n})&=(z^{2p}z^{2n}|z^{2n})=(z^{p+2n}|z^{p+2n})\\&=\|U(z^p)\cdot z^{2n}\|^2\leqslant(z^{2n}|z^{2n}),\end{aligned}$$

$$(z^{2m}|z^{2m})=\|U(z^p)\cdot z^{p+2n}\|^2\leqslant(z^{p+2n}|z^{p+2n})=(z^{2m}|z^{2n}).$$

所以对 $m>n$, 有

$$1/\|U\|^2\leqslant(z^{2m}|z^{2m})\leqslant(z^{2m}|z^{2n})\leqslant(z^{2n}|z^{2n}).$$

这表明序列 $(\|z^{2n}\|^2)$ 是递减的并有极限 $a>0$; 进而有

$$\|z^{2m}-z^{2n}\|^2=(z^{2m}|z^{2m})-2(z^{2m}|z^{2n})+(z^{2n}|z^{2n})\leqslant\|z^{2n}\|^2-a,$$

从而我们的论断得证. 于是序列 $(z^{2^k})$ 具有极限 $e$. 因为 $z$ 是自伴的,故由连续性得到 $e^2=\lim\limits_{k\to\infty}(z^{4^k})=e$, $e^*=\lim\limits_{k\to\infty}(z^*)^{2^k}=e$;

最后，$ez^2 = \lim_{k\to\infty} z^{2k+1} = e$，因而 $e \in \mathfrak{l}$。又因为对一切 $k \geqslant 1$ 有 $\|z^k\| \geqslant 1/\|U\|$，故也有 $\|e\| > 0$。证毕。

称自伴幂等元 $e \neq 0$ 为**可约的**，如果存在两个互相正交的非零自伴幂等元 $e_1, e_2$，使得 $e = e_1 + e_2$。此时根据 (15.8.4) 有 $ee_1 = e_1e = e_1$，$ee_2 = e_2e = e_2$。如果 $e$ 不是可约的，则称为**不可约的**。

**(15.8.6)** (i) 每个自伴幂等元 $e \neq 0$ 是有限个属于 $Ae$ 的不可约自伴幂等元之和。

(ii) 每个左理想 $\mathfrak{l} \neq \{0\}$ 含有不可约自伴幂等元。

显然 (ii) 可由 (i) 与 (15.8.5) 得到，于是只须证明 (i)。若 $\|e\|^2 < 2$，则 $e$ 是不可约的，因为否则将有 $\|e\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$，其中 $e_1$ 与 $e_2$ 是非零自伴幂等元，因而由 (15.8.3) 得到 $\|e\|^2 \geqslant 2$，这与假定矛盾。对使得 $\|e\|^2 < n$ 的最小整数 $n$ 进行归纳推理。若 $e = e_1 + e_2$ 不是不可约的，其中 $e_1$ 与 $e_2$ 是互相正交的非零自伴幂等元，则 $e_1 = e_1e$，$e_2 = e_2e$，因而 $e_1$ 与 $e_2$ 属于 $Ae$。我们还有 $\|e_1\|^2 = \|e\|^2 - \|e_2\|^2 \leqslant \|e\|^2 - 1 < n - 1$，同理 $\|e_2\|^2 < n - 1$，因此可用归纳法假设，证明得以完成。

$A$ 内的左理想 $\mathfrak{l}$ 称为**极小左理想**，如果它不等于 $\{0\}$ 且不存在包含在 $\mathfrak{l}$ 内的异于 $\{0\}$ 与 $\mathfrak{l}$ 的左理想。同样定义极小右理想。

**(15.8.7)** 为使 $A$ 内的左理想 $\mathfrak{l}$ 是极小的，必须且只须它具有 $\mathfrak{l} = Ae$ 的形式，其中 $e$ 是非零不可约自伴幂等元。

若 $\mathfrak{l}$ 是极小的，则它含有不可约自伴幂等元 $e \neq 0$(15.8.6)，并有 $Ae \subset \mathfrak{l}$，$e = e^2 \in Ae$，因而 $Ae = \mathfrak{l}$。反之，设 $e$ 是非零不可约自伴幂等元，我们证明 $\mathfrak{l} = Ae$ 是极小的。假定 $\mathfrak{l}$ 包含一个异于 $\{0\}$ 与 $\mathfrak{l}$ 的左理想 $\mathfrak{l}'$，设 $e'$ 是属于 $\mathfrak{l}'$ 的非零自伴幂等元 (15.8.5)，则可写 $e = e_1 + e_2$，其中 $e_2 = ee'$，$e_1 = e - ee'$。下面证明 $e_1$ 与 $e_2$ 是互相正交的自伴幂等元。由于 $e' \in Ae$，所以 $e' = e'e$(15.8.3)，于是

$$e_2^2 = ee'ee' = ee'^2 = ee' = e_2,\ ee_2 = e_2,\ e_2e = ee'e = ee' = e_2,$$

因而

$$e_1e_2=(e-e_2)e_2=0, \ e_2e_1=e_2(e-e_2)=0,$$
$$e_1^2=(e-e_2)^2=e-e_2=e_1;$$

又 $e_2^*=(ee'e)^*=ee'e=e_2$, 从而 $e_1=e-e_2$ 也是自伴的. 若能证明 $e_1$ 与 $e_2$ 都不等于 0, 就将得出矛盾. 然而若 $e_1=0$, 就会推出 $e=ee'\in \mathfrak{l}'$, 因而 $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}'$, 这与假定矛盾. 另一方面, $e'e_2=e'ee'=e'^2=e'\neq 0$, 因而 $e_2\neq 0$, 证毕.

考虑到 (15.8.6) 与 (15.8.3), 就有下述推论:

**(15.8.8)** $A$ 的每个左理想包含一个极小左理想;而每个极小左理想都是闭的.

**(15.8.9)** (i) 设 $e$, $e'$ 是两个互相正交的自伴幂等元, 则左理想 $Ae$ 与 $Ae'$ 是正交的.

(ii) 设 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是两两互相正交的自伴幂等元的有限族, 则对每个 $x\in A$, $x-\sum_{i=1}^{n} xe_i$ 正交于 $Ae_j(1\leqslant j\leqslant n)$.

关于 (i), 根据(15.7.5.5)与(15.8.4), 有 $(xe|ye')=(xe|ye'^2)=(xee'|ye')=0$.

关于 (ii), 同样对每个 $j$ 有

$$\left(x-\sum_{i=1}^{n} xe_i\middle|ye_j\right)=\left(xe_j-\sum_{i=1}^{n}xe_ie_j\middle|ye_j\right)=0.$$

**(15.8.10)** 对每个 $x\in A$, 存在不可约自伴幂等元的有限或无穷序列 $(e_n)$, 其中所有 $e_n$ 都属于理想 $Ax$ 的闭包 $\mathfrak{l}$ 且两两正交, 并使得 $x=\sum_n xe_n$ ($A$ 中的收敛级数), $\|x\|^2=\sum_n \|xe_n\|^2$.

可以限于考虑 $x\neq 0$ 的情形. 此时至少存在一个自伴幂等元 $e\in\mathfrak{l}$, 使得 $xe\neq 0$, 因为 (15.8.5) 中的作法给出 $\mathfrak{l}$ 中的自伴幂等元 $e\neq 0$, 使得 $e(x^*x)^2=e$, 因而更有 $ex^*\neq 0$, 从而 $xe=(ex^*)^*\neq 0$. 由于 $e$ 是有限个属于 $Ae$ 的不可约自伴幂等元的和 (15.8.6), 所以在这些幂等元中至少有一个与 $x$ 的积不等于 0. 现在我们看到, 若 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是两两正交的自伴幂等元的有限序列, 使对一切 $i$ 有 $\|xe_i\|^2\geqslant \alpha>0$, 则根据 (15.8.9), 有

$$\|x\|^2 = \left\|x - \sum_{i=1}^{n} xe_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|xe_i\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|xe_i\|^2,$$

于是 $n \leqslant \|x\|^2/\alpha$. 现在归纳地定义非负整数递增序列$(\varphi(n))_{n\geqslant 0}$，属于 I 的两两正交的不可约自伴幂等元的(有限或无穷)序列 $(e_k)$ 与 $A$ 中的序列$(x_n)_{n\geqslant 0}$ 如下：$x_0 = x, \varphi(0) = 0$；假定 $\varphi(n)$已定义，并对 $1 \leqslant k \leqslant \varphi(n)$ 已定义了 $e_k$，且设 $x_n = x - \sum_{k=1}^{\varphi(n)} xe_k$。若 $x_n = 0$，则序列$(e_k)$有限且具有 $\varphi(n)$ 个元，于是对于 $m \geqslant n$，取 $x_m = x_n = 0$，$\varphi(m) = \varphi(n)$. 若 $x_n \neq 0$，取属于 I 的不可约自伴幂等元的有限序列（可能为空集）$(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$，这些 $e'_i$ 两两正交且都正交于 $e_k(k \leqslant \varphi(n))$，并使得 $\|xe'_i\|^2 \geqslant \|x\|^2/2^{n+1}$，而且数 $r$ 是具有这些性质的有限序列的最大可能的长度（上面已看到这个数$\leqslant 2^{n+1}$）。此时令$\varphi(n+1) = \varphi(n) + r$，对 $k = \varphi(n) + i, 1 \leqslant i \leqslant r$，令 $e_k = e'_i$，且令$x_{n+1} = x_n - \sum_{i=1}^{r} xe'_i$。若每个 $x_n$ 都不等于 0，则序列$(\varphi(n))$趋于$+\infty$，因为如果它有界，则对于某个 $n$ 与所有 $m \geqslant n$ 就有 $\varphi(m) = \varphi(n)$，并且根据定义，这表明对 $\sum_{k=1}^{\varphi(n)} Ae_k$ 的正交补子空间$F$中的每个不可约自伴幂等元 $e'$，有 $xe' = x_ne' = 0$；然而 $x_n \in F$，$x_n \neq 0$，且 $F$ 是闭左理想 (15.8.2)，因而这与本证明开始时已建立的事实相矛盾.

现在，根据 (15.8.9)，由上述构造方法显然有 $\sum_n \|xe_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$，于是若级数 $\sum_n xe_n$ 不是有限和，则它必收敛于某个 $y \in$ I，$y$ 是 $x$ 在左理想 $\mathfrak{a}$ 的闭包上的正交投影，这里 $\mathfrak{a}$ 是所有 $Ae_n$ 的和（因为 $x - \sum_{k=1}^{m} xe_k$ 的极限 $x - y$ 与所有 $e_n$ 正交）(6.5.2). 若 $x - y \neq 0$，则左理想 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 中存在不可约自伴幂等元 $e'' \in$ I，使得 $xe'' = (x-y)e'' \neq 0$。若 $n$ 是使得 $\|xe''\|^2 \geqslant \|x\|^2/2^{n+1}$ 的最小整数，则

$e''$ 的存在与满足 $\varphi(n) < i \leqslant \varphi(n+1)$ 的 $e_i$ 所成的族的最大性相矛盾．证毕．

**(15.8.11)** 假定代数 $A$ 是可分的，则每个闭左理想 $\mathfrak{b}$ 是极小左理想 $\mathfrak{l}_n = Ae_n$ ($e_n$ 是不可约自伴幂等元) 的 (有限或无穷) 序列的 Hilbert 和．对每个 $x \in \mathfrak{b}$，有 $x = \sum_n xe_n$，而对 $\mathfrak{b}$ 中的 $x, y$，有 $(x|y) = \sum_n (xe_n|ye_n)$．

由于 $xe_n$ 是 $x$ 在 $Ae_n$ 上的正交投影 (15.8.9)，故最后两个论断是第一个论断与 Hilbert 和的定义 (6.4) 的推论．为证明第一个论断，我们从 $\mathfrak{b}$ 内的一个处处稠密序列 (3.10.9) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 出发，归纳地定义不可约自伴幂等元的有限或无穷序列 $(e_{n,i})_{i\in I_n}$ 如下：取 $(e_{1,i})_{i\in I_1}$ 为两两正交的不可约自伴幂等元的序列，其中 $e_{1,i}$ 属于 $\mathfrak{b}$ 且使得 $x_1 = \sum_i x_1e_{1,i}$(15.8.10)．假定对 $m \leqslant n$ 已定义了 $e_{m,i}$，它们两两正交，属于 $\mathfrak{b}$ 且使得 $x_m(m \leqslant n)$ 属于作为 $Ae_{m,i}$(对 $m \leqslant n$，且对每个 $m$, $i \in I_m$) 的和的左理想的闭包 $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{b}$．设 $x'_{n+1}$ 是 $x_{n+1}$ 在 $\mathfrak{a}_n^{\perp} \cap \mathfrak{b}$ 上的正交投影，于是取两两正交的不可约自伴幂等元的序列 $(e_{n+1,i})_{i\in I_{n+1}}$，其中每个 $e_{n+1,i}$ 都属于 $\mathfrak{a}_n^{\perp} \cap \mathfrak{b}$ 并且使得 $x'_{n+1} = \sum_i x'_{n+1}e_{n+1,i}$ (15.8.10)．根据 (15.8.9) 与 (6.4.2)，显然把二重族 $(e_{n,i})$ 排成序列 $(e_n)$ 就得到所提问题的解．

可以把这一定理特别应用到 $\mathfrak{b} = A$ 上并得到把 $A$ 分解为极小左理想的 Hilbert 和的定理．要注意一般地存在无穷多种这样的分解(参阅后面的(15.8.14))，更明确地说，就是：

**(15.8.11.1)** 假定 $A$ 是可分的且 $\mathfrak{l}$ 是 $A$ 的极小左理想，则存在 $A$ 的一个分解，使其成为极小左理想 $\mathfrak{l}_n$ 的 Hilbert 和并且 $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$．

事实上只须把 (15.8.11) 应用于 $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}^{\perp}$ 即可．

**(15.8.12)** 设 $e$, $e'$ 是两个不可约自伴幂等元，$\mathfrak{l} = Ae$, $\mathfrak{l}' = Ae'$ 是对应的极小理想，则

(i) $A$ 模 $\mathfrak{l}$ 到 $A$ 模 $\mathfrak{l}'$ 的每个同态具有 $f_a: x \to xa$ 的形式，其中 $a \in eAe' = eA \cap Ae'$；它是零或是双射，并且映射 $a \to f_a$ 是 $\mathbf{C}$ 向

量空间 $eAe'$ 到 $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{l},\mathfrak{l}')$ 上的同构，使得 $f_{ab}=f_b\circ f_a$.

(ii) 同构于 $\mathrm{End}_A(\mathfrak{l})$ 的 $\mathbf{C}$ 代数 $eAe$ 是等同于 $\mathbf{C}e$ 的域(因而同构于 $\mathbf{C}$).

(iii) 若 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$ 不是同构的 $A$ 模，则 $e$ 与 $e'$ (因而 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$) 互相正交；并且 $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}'\mathfrak{l}=\{0\}$. 若 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$ 是同构的 $A$ 模，则 $eAe'$ 是一维 $\mathbf{C}$ 向量空间，且有 $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}'$.

(iv) 对每个 $x\in A$, $\mathfrak{l}x$ 是左理想，它或者是零，或者(作为 $A$ 模)同构于 $\mathfrak{l}$,

先证明 (i). 若 $g:\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}'$ 是 $A$ 模同态并且 $a=g(e)$，则对一切 $x\in\mathfrak{l}$，有 $g(x)=g(xe)=xg(e)=xa$(15.8.3,(iii))；因为 $a\in\mathfrak{l}'$，所以$a=ae'$(15.8.3, (iii))，而另一方面有 $a=g(e^2)=eg(e)=ea$，因而 $a\in eAe'$ 且 $g=f_a$. 显然 $eAe'\subset eA\cap Ae'$；反之，若 $y\in eA\cap Ae'$，则 $y=ye'$, $y=ey$(15.8.3, (iii))，故 $y=eye'$. $\mathfrak{l}$ 的象 $g(\mathfrak{l})$ 是包含在 $\mathfrak{l}'$ 内的左理想，因而只能是 $\{0\}$ 或 $\mathfrak{l}'$；同样地，核 $g^{-1}(0)$ 是包含在 $\mathfrak{l}$ 内的左理想，因而等于 $\mathfrak{l}$ 或 $\{0\}$. 若 $g^{-1}(0)=\mathfrak{l}$，则 $g(\mathfrak{l})=\{0\}$；否则必有 $g(\mathfrak{l})\neq\{0\}$，因而 $g(\mathfrak{l})=\mathfrak{l}'$ 且 $g$ 是双射. 最后，若 $f_a=0$，则必有 $f_a(e)=ea=0$，然而由于 $a\in eAe'$, $ea=a$，从而 $a=0$.

对于(ii)，$\mathbf{C}$ 代数 $eAe$ 是 $A$ 的闭子代数(15.8.3,(iii)). 正如(i)中已证明的，$\mathrm{End}_A(\mathfrak{l})$ 的每个元或是零，或是可逆的，所以 $\mathrm{End}_A(\mathfrak{l})$ 是域，因而 $eAe$ 也是域. 显然 $e$ 是 $eAe$ 的单位元，且因 $A$ 是可赋范代数(15.1.8)，故由 Гельфанд-Mazur 定理 (15.2.5) 得知 $eAe=\mathbf{C}e$.

对于 (iii)，若 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$ 不同构，则由 (i) 必有 $eAe'=\{0\}$，特别有 $ee'=0$，因而 $e$ 与 $e'$ 正交 (15.8.4)；$\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$ 同样正交(15.8.9)且 $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'=\{0\}$. 若 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathfrak{l}'$ 同构且若 $g$ 是 $\mathfrak{l}$ 到 $\mathfrak{l}'$ 上的一个同构，则 $\mathfrak{l}$ 到 $\mathfrak{l}'$ 的每个同态具有 $g\circ u$ 的形式，其中 $u$ 是 $\mathfrak{l}$ 的一个自同态；因而根据 (i) 与 (ii)，$eAe'$ 是一维 $\mathbf{C}$ 向量空间. 显然 $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ 是包含在 $\mathfrak{l}'$ 内的左理想，又由于它包含 $eAe'\neq\{0\}$，所以它必定等于 $\mathfrak{l}'$.

最后证明 (iv). 由于 $\mathfrak{l}x$ 是 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{l}$ 到 $A$ 的同态 $y\to yx$ 下的象,

所以它是同构于 $\mathfrak{l}/\mathfrak{l}'$ 的左理想，其中 $\mathfrak{l}'$ 是所述同态的核．然而由于 $\mathfrak{l}'$ 只能等于 $\{0\}$ 或 $\mathfrak{l}$，所以 $y \to yx$ 或是零，或是单射．

**(15.8.13)** 假定 $A$ 是可分的，则：

(i) 存在极小左理想组成的有限或无穷序列 $(\mathfrak{l}_k)_{k\in J}$，$\mathfrak{l}_k$ 两两不同构，并且使得 $A$ 的每个极小左理想与某个 $\mathfrak{l}_k A$ 模同构．

(ii) 对每个指标 $k\in J$，$A$ 的所有同构于 $\mathfrak{l}_k$ 的极小左理想的和的闭包是自伴双边理想 $\mathfrak{a}_k$．Hilbert 代数 $\mathfrak{a}_k$ 的每个极小左理想是 $A$ 的极小左理想，它同构于 $\mathfrak{l}_k$，并且代数 $\mathfrak{a}_k$ 除 $\{0\}$ 与 $\mathfrak{a}_k$ 外不包含任何别的双边理想．

(iii) 每个代数 $\mathfrak{a}_k$ 是同构于 $\mathfrak{l}_k$ 的极小左理想的一个(有限或无穷)序列的 Hilbert 和；$A$ 是序列 $\mathfrak{a}_k(k\in J)$ 的 Hilbert 和，且当 $h\neq k$ 时，有 $\mathfrak{a}_h\mathfrak{a}_k=\{0\}$．

从 $A$ 分解为极小左理想 $\mathfrak{l}'_n$ 的 Hilbert 和出发 (15.8.11)．取 $\mathfrak{l}_1=\mathfrak{l}'_1$，并用归纳法定义 $\mathfrak{l}_{k+1}$ 等于 $\mathfrak{l}'_m$，其中 $m$ 是使得 $\mathfrak{l}'_m$ 不同构于 $\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_k$ 的最小指标(若所有 $\mathfrak{l}'_n$ 都同构于 $\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_k$ 之一，则归纳过程在 $\mathfrak{l}_k$ 处结束)．设 $J$ 是这样得到的指标 $k$ 所成的集，且对每个 $k\in J$，设 $I_k$ 是使得 $\mathfrak{l}'_n$ 同构于 $\mathfrak{l}_k$ 的整数 $n$ 所成的序列．我们取 $\mathfrak{a}_k$ 为 $\mathfrak{l}'_n(n\in I_k)$ 的 Hilbert 和；显然 $A$ 是这些左理想 $\mathfrak{a}_k$ 的 Hilbert 和(6.4.2)．

设 $\mathfrak{l}$ 是 $A$ 的任一极小左理想，则它必定同构于某个 $\mathfrak{l}_k$，因为否则它将正交于所有 $\mathfrak{l}'_n$(15.8.12，(iii))，因而正交于 $A$ 自身，而这是不可能的．同样的推理表明 $\mathfrak{l}$ 正交于所有 $\mathfrak{a}_h(h\in J, h\neq k)$，而由于 $\mathfrak{a}_k$ 是指标 $h\neq k$ 的 $\mathfrak{a}_h$ 的 Hilbert 和的正交补空间，因而必有 $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{a}_k$．由此就已推出 $\mathfrak{a}_k$ 是 $A$ 的所有同构于 $\mathfrak{l}_k$ 的极小左理想的和的闭包，这证明 $\mathfrak{a}_k$ 不依赖于开始时 $A$ 作为 $\mathfrak{l}'_n$ 的 Hilbert 和的分解．再者，对每个 $x\in A$ 与每个 $n\in I_k$，$\mathfrak{l}'_n x$ 或者是 $\{0\}$，或者是同构于 $\mathfrak{l}'_n$ 的左理想(15.8.12，(iv))，因而它包含在 $\mathfrak{a}_k$ 内，这表明 $\mathfrak{a}_k$ 是双边理想．若 $\mathfrak{l}'_n=Ae'_n$，其中 $e'_n$ 是一个不可约自伴幂等元，则 $\mathfrak{l}'^*_n=e'_nA$，因而由前所证，有 $\mathfrak{a}^*_k=\mathfrak{a}_k$．

设 $\mathfrak{l}''$ 是 Hilbert 代数 $\mathfrak{a}_k$ 的极小左理想；我们有 $\mathfrak{l}''=\mathfrak{a}_k e''$，其

中 $e''$ 是自伴幂等元 (15.8.7)，并且不可能对一切 $n\in I_k$ 都有 $e'_n e''=0$，否则 $\mathfrak{l}''$ 将正交于所有 $\mathfrak{l}'_n(n\in I_k)$，因而正交于它们的和的闭包 $\mathfrak{a}_k$，但由于 $\mathfrak{l}''\neq\{0\}$，这是不可能的。于是至少存在一个指标 $n\in I_k$，使得 $\mathfrak{l}'_n\mathfrak{l}''\neq\{0\}$，又因 $\mathfrak{l}'_n\mathfrak{l}''\subset\mathfrak{l}''$ 是 $\mathfrak{a}_k$ 的左理想，所以必有 $\mathfrak{l}'_n\mathfrak{l}''=\mathfrak{l}''$，这表明 $\mathfrak{l}''$ 是 $A$ 的极小左理想，且必同构于 $\mathfrak{l}'_n$，从而同构于 $\mathfrak{l}_k$(15.8.12，(iii))。现在设 $\mathfrak{b}$ 是代数 $\mathfrak{a}_k$ 的非零双边理想，则它至少包含这个代数的一个极小左理想 $\mathfrak{l}''$(15.8.8)，因而包含（对于 $n\in I_k$ 的）所有 $\mathfrak{l}''\mathfrak{l}'_n$；然而 $\mathfrak{l}''\mathfrak{l}'_n=\mathfrak{l}'_n$(15.8.12，(iii))，故 $\mathfrak{b}$ 包含 $\mathfrak{l}'_n(n\in I_k)$ 的和。若 $\mathfrak{b}$ 是闭的，则必有 $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}_k$。最后，若 $h\neq k$，则 $\mathfrak{a}_h\mathfrak{a}_k\subset\mathfrak{a}_h\cap\mathfrak{a}_k=\{0\}$，因为 $\mathfrak{a}_h$ 与 $\mathfrak{a}_k$ 都是双边理想。

完备 Hilbert 代数 $A$ 称为**拓扑单的**，如果它不包含任何异于 $A$ 与 $\{0\}$ 的闭双边理想。由(15.8.13)得知，对可分完备 Hilbert 代数 $A$ 的结构的研究，完全归结为对 $\mathfrak{a}_k$ 的研究，换言之，归结为对 $A$ 是拓扑单的情形的研究。

**(15.8.14)** 设 $A$ 是拓扑单的完备的可分 Hilbert 代数，则对 $A$ 的每个极小左理想 $\mathfrak{l}$，$A$ 到 Hilbert 空间 $\mathfrak{l}$ 的表示 $x\to U_{\mathfrak{l}}(x)$ 是忠实的。

若 $A$ 是无穷维的，则 $\mathfrak{l}$ 也是无穷维的；$A$ 在 $U_{\mathfrak{l}}$ 下的象是 $\mathfrak{l}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子所成的代数 $\mathscr{L}_2(\mathfrak{l})$(15.4.8)，并且存在常数 $\gamma>0$，使得(对于 (15.7.4) 中定义的纯量积)

$$\gamma(x|y)=(U_{\mathfrak{l}}(x)|U_{\mathfrak{l}}(y)). \tag{18.8.14.1}$$

若 $A$ 是有限维的，则 $A$ 在 $U_{\mathfrak{l}}$ 下的象是向量空间 $\mathfrak{l}$ 的所有自同态所成的代数 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{l})$，并且对于(15.7.4.1)中定义的纯量积(从 $A$ 的纯量积在 $\mathfrak{l}$ 上的限制出发)，关系式 (15.8.14.1) 仍然成立。

我们可以假定 $A$ 是极小左理想 $\mathfrak{l}_n=Ae_n$ 组成的(有限或无穷)序列的 Hilbert 和，其中 $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1$(15.8.11.1)，而且所有 $\mathfrak{l}_n$ 都是同构的 (15.8.13)。若有 $x\neq 0$ 且 $U_{\mathfrak{l}}(x)=0$，即若有 $x\mathfrak{l}=\{0\}$，则就会推出 $(Ax)\mathfrak{l}=\{0\}$，而由于理想 $Ax\neq\{0\}$，所以它包含一个极小左理想 $\mathfrak{l}'$(15.8.8)，$\mathfrak{l}'$ 必同构于 $\mathfrak{l}$(15.8.13)；于是就有 $\mathfrak{l}'\mathfrak{l}=\{0\}$，这与(15.8.12，(iii))矛盾。因而表示 $U_{\mathfrak{l}}$ 是忠实的。令 $P_n=U_{\mathfrak{l}}(e_n)$，

这是 $\mathfrak{l}=Ae_1$ 在一维子空间 $e_nAe_1$ 上的正交投影(15.8.12)，因为 $(xe_1-e_nxe_1|e_nye_1)=(e_nxe_1-e_n^2xe_1|ye_1)=0$。由于当 $m\neq n$ 时 $e_me_n=0$，所以 $P_mP_n=0$，故这些子空间 $e_nAe_1$ 两两正交。$\mathfrak{l}$ 还是这些子空间 $e_nAe_1$ 的 Hilbert 和，因为若 $xe_1$ 与所有这些子空间正交，则对一切 $n$ 有 $P_n(xe_1)=0$，或对一切 $n$ 有 $e_nxe_1=0$；于是 $xe_1$ 属于 $A$ 的右零化子，而后者是 $\{0\}$(15.7.5.7)。这表明，为使序列 $(\mathfrak{l}_n)$ 为有限，必须且只须 $\mathfrak{l}$（因而每个 $\mathfrak{l}_n$）在 $\boldsymbol{C}$ 上是有限维的，或等价地，$A$ 是有限维的。

设 $(a_n)$ 是 $\mathfrak{l}$ 的 Hilbert 基，使得 $a_n\in e_nAe_1$；于是 $a_na_n^*\in e_nAe_n$，因而对某个 $\lambda_n\in\boldsymbol{C}^*$ 有 $a_na_n^*=\lambda_ne_n$(15.8.12)。同理 $a_n^*a_n=\lambda_n'e_1$。我们来证明 $\lambda_n'=\lambda_n$。事实上，一方面有

$$a_na_n^*a_na_n^*=\lambda_n^2e_n;$$

另一方面，因为 $a_ne_1=a_n$，所以

$$a_na_n^*a_na_n^*=\lambda_n'a_ne_1a_n^*=\lambda_n'a_na_n^*=\lambda_n'\lambda_ne_n.$$

此外我们可以写

$$1=(a_n|a_n)=(a_n|e_na_n)=(a_na_n^*|e_n)=\lambda_n(e_n|e_n),$$

另一方面又有

$$1=(a_n|a_n)=(a_n|a_ne_1)=(a_n^*a_n|e_1)=\lambda_n(e_1|e_1);$$

因而对一切 $n$ 有

(15.8.14.2) $$(e_n|e_n)=(e_1|e_1),$$

并且所有 $\lambda_n$ 都取相同的值 $\gamma=(e_1|e_1)^{-1}$。于是对 $A$ 中任何 $x,y$，有 $(xa_n|ya_n)=(y^*x|a_na_n^*)=(y^*x|\gamma e_n)=\gamma(xe_n|ye_n)$。由于以 $(xe_n|ye_n)$ 为通项的级数绝对收敛且以 $(x|y)$ 为和(15.8.11)，故若 $A$ 是无穷维的，则 $U_1(x)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，并且关系式(15.8.14.1)成立。由于 $A$ 是 Hilbert 空间，从而它在 $U_1$ 下的象同样是 Hilbert 空间；为了证明这个象是整个 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2(\mathfrak{l})$(15.4.8)，只须证明它在 $\mathscr{L}_2(\mathfrak{l})$ 中稠密。现在，对 $m\neq n$，有

$$e_mAe_n\cdot e_nAe_1=e_m(Ae_n)(Ae_1)=e_mAe_1$$

(15.8.12，(iii))，由于 $e_nAe_1=\boldsymbol{C}a_n$，所以存在 $e_{mn}\in e_mAe_n$，使得 $e_{mn}a_n=a_m$（这蕴涵 $e_{mn}=\gamma^{-1}a_ma_n^*$），并且显然当 $p\neq n$ 时有

$e_{mn}a_p = 0$. 由此推出 $E_{mn} = U_{\mathfrak{l}}(e_{mn})$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{l}$ 的连续自同态，使得 $E_{mn} \cdot a_n = a_m$，且当 $p \neq n$ 时有 $E_{mn} \cdot a_p = 0$. 这样我们的论断由 $E_{mn}$ 的有限线性组合在 $\mathscr{L}_2(\mathfrak{l})$ 内处处稠密(15.4.8)得到. 当 $A$ 为有限维时，推理类似，但更简单些.

我们注意到，在所有情形下，$U_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}_n)$ 以形如 $U(x)\circ P_n$ 的自同态作为它的元，因而由 $\mathfrak{l}$ 的秩为 1 的自同态所构成.

**(15.8.15)** 在 (15.8.14) 的假定下，若 $A$ 的中心内存在非零元，则 $A$ 是有限维的。此时 $A$ 的中心是 $\mathbf{C}u$，其中 $u$ 是 $A$ 的单位元.

事实上，设 $c \in A$ 属于 $A$ 的中心，则 $U_{\mathfrak{l}}(c)$ 是 $A$ 模 $\mathfrak{l}$ 的自同态，因而是一个相似变换 $x \to \lambda x$，其中 $\lambda \in \mathbf{C}$(15.8.12). 然而显然相似变换不可能是无穷维 Hilbert 空间上的 Hilbert-Schmidt 算子，除非它是零.

**(15.8.16)** 设 $A$ 是可分完备 Hilbert 代数，$\mathfrak{a}_k (k \in J)$ 是拓扑单的 Hilbert 代数，且它们的 Hilbert 和是 $A$(15.8.13)，并设对每个 $k \in J$，$\mathfrak{l}_k$ 是 $\mathfrak{a}_k$ 的极小左理想. 设 $V$ 是 $A$ 到可分 Hilbert 空间 $H$ 中的非退化表示 (15.5.5)，使得 $V: A \to \mathscr{L}(H)$ 连续，则

(i) $H$ 是关于 $V$ 为稳定的子空间 $H_k (k \in J)$ 的 Hilbert 和，使得若 $V_k$ 是 $V$ 在 $H_k$ 上的限制，则对 $s \in \mathfrak{a}_h$ 与 $h \neq k$，有 $V_k(s) = 0$，因而可把 $V_k$ 看作 $\mathfrak{a}_k$ 到 $H_k$ 中的一个表示.

(ii) 若 $\mathfrak{a}_k$ 在 $\mathbf{C}$ 上是有限维的，则表示 $V_k$ 是全都等价于 $\mathfrak{a}_k$ 的表示 $U_{\mathfrak{l}_k}$ 的不可约表示的（有限或无穷）序列的 Hilbert 和 (15.8.14).

设 $H_k$ 是 $H$ 的由 $V(s_k) \cdot x$ (其中 $s_k$ 取遍 $\mathfrak{a}_k$ 而 $x$ 取遍 $H$) 所生成的向量子空间，由于每个 $s \in A$ 可写成 $s = \sum_k s_k$ (其中 $s_k \in \mathfrak{a}_k$) 且 $V$ 是连续的，所以 $V(s) \cdot x = \sum_k V(s_k) \cdot x$(5.5.2)，因而 $H$ 是这些 $H_k$ 的和的闭包. 又若 $h \neq k$，$s_h \in \mathfrak{a}_h$，$s_k \in \mathfrak{a}_k$，则 $(V(s_h) \cdot x \mid V(s_k) \cdot y) = (V(s_k^* s_h) \cdot x \mid y) = 0$，因为 $\mathfrak{a}_k$ 是自伴的且 $\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_h = \{0\}$. 从而证明了 (i). 现在限于考虑 $A$ 是拓扑单并且在 $\mathbf{C}$ 上是有限维因而具有单位元的情形，此时可以限于存在关于 $V$ 的全化

向量 $x_0$(15.5.6) 的情形．$H$ 的由所有 $V(s)\cdot x_0$ 生成的向量子空间是有限维的，因而是闭的 (5.9.2)，故等于 $H$．这样只须就 $H$ 的维数进行归纳推理．因为 $A$ 是有限个极小左理想的和，所以至少存在一个极小左理想，设为 $\mathfrak{l}$，使得子空间 $E=V(\mathfrak{l})\cdot x_0$ 不等于 $\{0\}$；于是 $\mathfrak{l}$ 到 $E$ 的满射 $s\to V(s)\cdot x_0$ 是 $A$ 模同态，并且由于它的核是包含在 $\mathfrak{l}$ 内且异于 $\mathfrak{l}$ 的左理想，所以只能是 $\{0\}$．于是 $E$ 是 $H$ 的关于 $V$ 为稳定的子空间，并且表示 $V$ 在 $E$ 上的限制等价于 $U_{\mathfrak{l}}$．因为 $E$ 在 $H$ 内的正交补空间 $H'$ 关于 $V$ 为稳定且其维数严格地小于 $H$ 的维数，所以只须应用归纳法假定即可完成证明．

可以证明，不假定 $\mathfrak{a}_k$ 为有限维，(15.8.16，(ii)) 的结果仍然成立 (问题 1)．

## 问　　题

1) 设 $A$ 是拓扑单的可分的完备 Hilbert 代数．

设 $V$ 是 $A$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的非退化表示．采用 (15.8.14) 的证明中的记号，令 $E_n=V(e_n)$，$A_n=V(a_n)$．$E_n$ 是 $H$ 在子空间 $H_n$ 上的正交投影算子，这里 $H$ 是这些 $H_n$ 的 Hilbert 和，并且 $A_n(H_1)=H_n$，$A_n^*(H_n)=H_1$．设 $(b_{k1})_{k\in I}$ 是 $H_1$ 的 Hilbert 基(有限或无穷)，则对每个指标 $n$，$b_{kn}=\gamma^{-1/2}A_n(b_{k1})$ $(k\in I)$ 形成 $H_n$ 的 Hilbert 基．由此推断，若 $H'_k$ 是 $H$ 的由 $b_{kn}(n\geqslant 1)$ 生成的子空间，则 $H'_k$ 关于 $V$ 为稳定，并且 $V$ 是表示 $V_k$ 的 Hilbert 和，其中 $V_k$ 是 $V$ 在 $H'_k$ 上的限制；由于 $E_1\cdot b_{k1}=b_{k1}$，所以 $b_{k1}$ 是全化向量，从而表示 $V_k$ 都是单演的．试证这个表示等价于表示 $U_{\mathfrak{l}}$．

2) 设 $H$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，$A=\mathscr{L}_2(H)$ 是 $H$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子所成的 Banach 代数，$B$ 是 $A$ 的闭自伴子代数，试证存在 $H$ 作为子空间 $H_0$ 与在 $B$ 下为稳定的闭子空间 $H_k$ 的 (有限或无穷) 序列的 Hilbert 和的分解，它具有下列性质：1° 属于 $B$ 的算子在 $H_0$ 上的限制都是零；2° 每个 $H_k$ 是由维数相同 (有限或无穷) 且在 $B$ 下为稳定的子空间的有限序列 $(H_{kp})_{1\leqslant p\leqslant r_k}$ 的 Hilbert 和；属于 $B$ 的算子在 $H_{k1}$ 上的限制形成 $H_{k1}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子组成的代数；对于 $\alpha\leqslant p\leqslant r_k$，存在 $H_{k1}$ 到 $H_{kp}$ 上的等距同构 $T_p$，使得若 $U_1$ 是算子 $U\in B$ 在 $H_{k1}$ 上的限制，则 $U$ 在 $H_{kp}$ 上的限制是 $T_pU_1T_p^{-1}$．

## 9. Plancherel-Godement 定理

现在我们研究交换 Hilbert 代数(一般不完备);更一般地，为便于实用,考虑交换对合代数 $A$,赋予它满足 (15.6) 中的条件($U$)与($N$)的双迹 $g$(15.7). 我们以 $\mathfrak{n}_g$ 记使得 $g(s,s)=0$ 的 $s\in A$ 所成的双边理想(于是假定它不是 $\{0\}$), 以 $\pi_g:A\to A/\mathfrak{n}_g$ 记典则映射. 我们记得, $A/\mathfrak{n}_g$ 被典则地赋予 Hilbert 代数结构 (15.7). 以下假定准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 是可分的,因而是某个可分 Hilbert 空间 (把它记为 $H_g$) 的处处稠密的子空间. 于是由 $g$ 出发可典则地获得 $A$ 到 $H_g$ 中的一个表示 (15.6.10), 把这个表示记作 $U_g$. $A$ 在 $U_g$ 下的象是 $\mathscr{L}(H_g)$ 的对合交换子代数 (15.5.1);把它在 $\mathscr{L}(H_g)$ 内的闭包记作 $\mathscr{A}_g$, 于是 $\mathscr{A}_g$ 是交换星代数 (因而由正规算子所构成 (15.4.11)). 以下假定代数 $\mathscr{A}_g$ 是可分的(这不是 $A/\mathfrak{n}_g$ 为可分的推论,参阅问题 1).

$A$ 上的迹(从而它典则地给出一个双迹 (15.6.2)) 的一个特殊情形由 $A$ 的 Hermite 特征标给出; $A$ 的特征标 $\chi$(15.3) 称为 **Hermite** 特征标,如果它满足

(15.9.1) $$\chi(x^*)=\overline{\chi(x)},$$

此时 $\chi(x^*x)=|\chi(x)|^2\geqslant 0$, 而且对于

$$g(x,y)=\chi(y^*x)=\overline{\chi(y)}\chi(x),$$

(15.6) 中的条件 ($U$) 显然得到满足,因为

$$g(st,st)=|\chi(s)|^2|\chi(t)|^2=|\chi(s)|^2g(t,t).$$

另一方面,理想 $\mathfrak{n}_g$——此时它是 $\chi$ 的核——是 $A$ 中的超平面,因此代数 $A/\mathfrak{n}_g$ 可等同于 $\mathbf{C}$, 而条件 ($N$) 可由下述事实立即推出: 若 $\chi(x)\neq 0$, 则也有 $\chi(x^2)\neq 0$. 对应的表示 $U_\chi$ 显然是不可约的.

我们以 $\boldsymbol{H}(A)$ 记 $A$ 的 Hermite 特征标所成的集, 它是积空间 $\mathbf{C}^A$ 的子集, 关于积拓扑是闭的 (3.15.1). 我们赋予 $\boldsymbol{H}(A)$ 以 $\mathbf{C}^A$ 上的积拓扑所诱导的拓扑(即弱拓扑(12.15)). 当 $A$ 是可分交换对

合 Banach 代数且具有单位元 $e \neq 0$ 时，$\boldsymbol{H}(A)$ 是 $\boldsymbol{X}(A)$(15.3.2)的紧可度量化子空间. 注意，此时可有 $\boldsymbol{H}(A) \neq \boldsymbol{X}(A)$ (15.4，问题 3)，然而如果 $A$ 还是可分星代数，就恒有 $\boldsymbol{H}(A) = \boldsymbol{X}(A)$ (15.4.14).

我们证明，从 Hermite 特征标出发，通过"积分"的典则过程，可以得到满足本节一开始所述条件的所有双迹 $g$.

**(15.9.2)** **(Plancherel-Godement 定理)** 设 $g$ 是交换对合代数 $A$ 上满足条件 $(U)$ 与 $(N)$ 的双迹，使得准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 与星代数 $\mathscr{A}_g \subset \mathscr{L}(H_g)$ 是可分的.

I) 我们可以典范地定义：1° $\boldsymbol{H}(A)$ 的一个子空间 $S_g$，它在 $\boldsymbol{C}^A$ 内的闭包等于 $S_g$ 或 $S_g \cup \{0\}$ 并且是紧可度量化的（因而 $S_g$ 是局部紧可度量化且可分的）；2° $S_g$ 上的一个正测度 $m_g$，它具有下列性质：

(i) 对每个 $x \in A$，函数 $\chi \to \hat{x}(\chi) = \chi(x)$ 属于 $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(S_g, m_g)$，且对 $A$ 中任何 $x, y$，有

$$
\textbf{(15.9.2.1)} \qquad g(x, y) = \int_{S_g} \chi(xy^*)dm_g(\chi) = \int_{S_g} \hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_g(\chi).
$$

(ii) 当 $x$ 取遍 $A$ 时，函数 $\hat{x}$ 的集包含在 $\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{C}}(S_g)$ 内(13.20.6)，且在这个 Banach 空间内处处稠密.

(iii) 测度 $m_g$ 的支集等于整个空间 $S_g$.

(iv) 映射 $x \to \hat{x}$ 可分解为 $x \to \pi_g(x) \xrightarrow{T_0} \hat{x}$，而 $A/\mathfrak{n}_g$ 到 $\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{C}}(S_g)$ 的映射 $T_0$ 可延拓为 Hilbert 空间 $H_g$ 到 $L^2_{\boldsymbol{C}}(S_g, m_g)$ 上的同构 $T$，使对一切 $x \in A$，有 $U_g(x) = T^{-1}M(\hat{x})T$，其中 $M(\hat{x})$ 是乘以 $L^2_{\boldsymbol{C}}(S_g, m_g)$ 中的 $\hat{x}$ 的类的乘法（参阅(13.12.5)）；进而对 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ 与 $x \in A$ 还有 $\|\lambda \cdot 1_{H_g} + U_g(x)\| = \|\lambda + \hat{x}\|$.

II) 反之，设 $S$ 是 $\boldsymbol{H}(A)$ 的子空间，使得 $S \cup \{0\}$ 是紧可度量化的；$m$ 是 $S$ 上的一个正测度，其支集等于 $S$，使对每个 $x \in A$，函数 $\chi \to \hat{x}(\chi) = \chi(x)$ 属于 $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(S, m) \cap \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{C}}(S)$，则 $g'(x, y) = \int_S \hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm(\chi)$ 是 $A$ 上满足 $(U)$ 与 $(N)$ 的一个双迹，且使得

$A/\mathfrak{n}_{g'}$ 与 $\mathscr{A}_{g'}$ 是可分的，并有 $S_{g'}=S$，$m_{g'}=m$。

我们分几步证明这个结果.

**(15.9.2.2)** 构造 $S_g$ 并证明 (ii).

子代数 $\boldsymbol{C}\cdot 1_{H_g}+\mathscr{A}_g=\mathscr{A}'_g$ 在 $\mathscr{L}(H_g)$ 内是闭的(5.9.2)，它是具有单位元的交换星代数. 对于每个特征标 $\xi'\in \boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$，由(15.4.14)得知 $\xi'\circ U_g$ 或在 $A$ 上恒等于零，或是 $A$ 的一个 Hermite 特征标；换言之，

$$\omega:\xi'\to\xi'\circ U_g$$

是 $\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$ 到 $\boldsymbol{H}(A)\cup\{0\}$ 的映射. 这个映射是单射，因为对一切 $\xi'\in \boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$，有 $\xi'(1_{H_g})=1$，并且由于 $\xi'$ 在 $\mathscr{A}'_g$ 内连续(15.3.1)，所以 $\xi'$ 在 $U_g(A)$ (它在 $\mathscr{A}_g$ 内稠密)上的值完全决定了特征标 $\xi'$.另一方面，由定义得知 $\omega$ 关于 $\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$ 与 $\boldsymbol{C}^A$ 上的弱拓扑是连续的.由于 $\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$是可度量化的并且是紧的，所以它的象

$$\omega(\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g))=S'_g\subset \boldsymbol{H}(A)\cup\{0\}$$

也是可度量化的与紧的，而且 $\omega$ 是 $\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g)$ 到 $S'_g$ 上的一个同胚(12.3.6).若$1_{H_g}\in\mathscr{A}_g$,则 $\mathscr{A}'_g=\mathscr{A}_g$ 且 $S'_g$ 不含有 $\boldsymbol{C}^A$ 的零元;此时令 $S_g=S'_g$.反之,若 $1_{H_g}\notin\mathscr{A}_g$,则 $\mathscr{A}_g$ 是 $\mathscr{A}'_g$ 中的闭超平面，也是 $\mathscr{A}'_g$ 中的理想，因而是极大理想，并且存在 $\mathscr{A}'_g$ 的特征标 $\xi'_0$，其核为 $\mathscr{A}_g$(15.3.1);于是它在 $\omega$ 下的象是 $\boldsymbol{C}^A$ 的零元，此时令 $S_g=S'_g-\{0\}$. 在这两种情形下，$S_g$ 是可度量化的、可分的与局部紧的，并且 $S_g$ 的紧子集在 $S_gU\{0\}$ 内的余集是 0 在 $S_gU\{0\}$ 内的开邻域. 对于 $x\in A$，函数 $\chi'\to(\omega^{-1}(\chi'))(U_g(x))$——Гельфанд 变式 $\mathscr{G}U_g(x)$ 与 $\omega^{-1}$ 的合成——在 $S'_g$ 内连续，并且它在 $S_g$ 上的限制就是 $\hat{x}$;在用语随便时,仍把这个函数记作 $\hat{x}$. 当 $0\in S'_g$ 时，$\omega^{-1}(0)=\xi'_0$，因而 $\hat{x}(0)=0$，这表明在所有情形下都有 $\hat{x}\in\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{C}}(S_g)$(13.20.5). 为证明 (ii) 中关于稠密性的论断，注意 Гельфанд 变换是 $\mathscr{A}'_g$ 到 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{X}(\mathscr{A}'_g))$ 上的等距 (15.4.14);因而函数 $\lambda+\hat{x}(\lambda\in C)$ 形成 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(S'_g)$ 内的处处稠密集，由此在所有情形下断言得证.

**(15.9.2.3)** 构造 $m_g$ 的预备工作.

对 $A$ 中的任何 $x, y$，映射 $V \to (V \cdot \pi_g(x) | \pi_g(y))$ 是 $\mathscr{A}'_g$ 上的连续线性形式，由于 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S'_g)$ 与 $\mathscr{A}'_g$ 同构，因而存在(13.1)$S'_g$ 上的(复)测度 $\mu_{x,y}$，使对一切 $z \in A$，有

(**15.9.2.4**) $$g(zx, y) = (U_g(z) \cdot \pi_g(x) | \pi_g(y)) = \int_{S'_g} \chi'(z) d\mu_{x,y}(\chi').$$

当 $0 \in S'_g$ 时，我们已证明(15.9.2.2)函数 $\hat{z}: \chi' \to \chi'(z)$ 在点 0 处取值为零，因而若 $m_{x,y}$ 是 $\mu_{x,y}$ 在 $S_g$ 上的诱导测度(13.1.8)，则在所有情形下都可写

(**15.9.2.5**) $$g(zx, y) = \int_{S_g} \hat{z}(\chi) dm_{x,y}(\chi).$$

显然测度 $m_{x,y}$ 有界；又对 $A$ 中给定的 $x, y$，测度 $m_{x,y}$ 是 $S_g$ 上使得 $g(zx, y) = \int_{S_g} \hat{z}(\chi) dm'(\chi)$ 对一切 $z \in A$ 成立的唯一的有界测度 $m'$，因为这些函数 $\hat{z}$ 在 $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S_g)$ 内稠密(13.20.6)。

若公式(15.9.2.1)为真，则对 $A$ 中任何 $x, y, z$，应有 $g(zx, y) = \int_{S_g} \hat{z}(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)} dm_g(\chi)$。比较(15.9.2.5)，事实上我们要证明的是 $S_g$ 上满足下述条件的测度 $m_g$ 的存在性：对 $A$ 中的 $x, y$，有

(**15.9.2.6**) $$m_{x,y} = \hat{x}\bar{\hat{y}} \cdot m_g$$

(参阅(13.1.5))。

如果已经构造了这样一个测度，则对每个函数 $F \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S_g)$，令 $m_F = F \cdot m_g$ (它是有界测度(13.14.4))，就有

(**15.9.2.7**) $$F \cdot m_{x,y} = (F\hat{x}\bar{\hat{y}}) \cdot m_g = (\hat{x}\bar{\hat{y}}) \cdot m_F.$$

我们从构造 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S_g)$ 到 $M^1_{\mathbf{C}}(S_g)$ 的满足下述条件的线性映射 $F \to m_F$ 出发：对 $A$ 中任意的 $x, y$，等式

(**15.9.2.8**) $$F \cdot m_{x,y} = (\hat{x}\bar{\hat{y}}) \cdot m_F$$

成立，并且当 $F \geqslant 0$ 时，有 $m_F \geqslant 0$。若做到这一点，则测度 $m_g$ 是正线性形式 $F \to m_F(1)$(13.3.1)。

(**15.9.2.9**) $m_F$ 的定义。

以 $\Phi \subset \mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S_g)$ 记满足下述条件的连续函数 $F$ 所成的集：

$F$ 在无穷远处趋于 0，对于它存在 $S_g$ 上的有界测度 $m_F$，使对 $A$ 中每对元 $x$，$y$，(15.9.2.8) 都成立．借助下面三条引理，我们证明 $\Phi$ 包含 $\mathscr{K}_C(S_g)$。

**(15.9.2.10)** $\Phi$ 是代数 $\mathscr{C}_C^0(S_g)$ 的一个理想．

显然 $\Phi$ 是向量空间；另一方面，若 $F\in\Phi$ 且 $G\in\mathscr{C}_C^0(S_g)$，则由 (15.9.2.8) 推出

$$(GF)\cdot m_{x,y}=(G\hat{z}_g)\cdot m_F=(\hat{z}_g)\cdot(G\cdot m_F),$$

因此 $GF\in\Phi$，并且可取 $m_{GF}=G\cdot m_F$（因为 $G$ 关于 $m_F$ 是可积的 (13.20.5)）。

**(15.9.2.11)** 对于每个函数 $F\in\Phi$，存在唯一的有界测度 $m_F$，它对 $A$ 中的 $x$，$y$ 满足 (15.9.2.8)；映射 $F\to m_F$ 是线性的，且若 $F\geqslant 0$，则 $m_F\geqslant 0$。

为建立 $m_F$ 的唯一性，只须证明，当 $x$，$y$ 取遍 $A$ 时，形如 $\hat{x}\hat{y}$ 的函数在 Banach 空间 $\mathscr{C}_C^0(S_g)$ 内形成一个全子集，或形如 $\lambda+\hat{x}\hat{y}$ ($\lambda\in C$) 的函数在 Banach 空间 $\mathscr{C}_C(S'_g)$ 内形成一个全子集．因为 $A$ 是代数且 $x\to\hat{x}$ 是代数同态，这些函数所成的集 $B$ 是 $\mathscr{C}_C(S'_g)$ 的子代数，且含有常数．这个子代数区分 $S'_g$ 的点，因为若 $\chi_1,\chi_2$ 是 $S_g$ 的两个不同的点，则根据 (ii)，存在 $x\in A$，使得 $\hat{x}(\chi_1)\neq\hat{x}(\chi_2)$；由此推出，或者 $\hat{x}^2(\chi_1)\neq\hat{x}^2(\chi_2)$，或者 $\hat{x}^3(\chi_1)\neq\hat{x}^3(\chi_2)$．另一方面，当 $S'_g=S_g\cup\{0\}$ 时，对每个 $\chi\neq 0$，存在 $x\in A$，使得 $\hat{x}(\chi)\neq 0$，因而也有 $\hat{x}^2(\chi)\neq 0$，这就完成了所述断言的证明．最后，因为 $\bar{\hat{x}}=(x^*)^\wedge$ (15.9.1)，所以 $B$ 的每个函数的共轭函数属于 $B$．于是我们可以应用 Stone-Weierstrass 定理 (7.3.2)，从而建立了 $m_F$ 的唯一性，映射 $F\to m_F$ 的线性性质可立即由唯一性推出．剩下要证明 $F\geqslant 0$ 蕴涵 $m_F\geqslant 0$．设 $G$ 是属于 $\mathscr{K}_R(S_g)$ 的非负函数，则根据 (ii)，存在 $A$ 中的序列 $(x_n)$，使得函数 $\hat{x}_n$ 在 $S_g$ 上一致收敛于 $G^{1/2}$，从而函数 $\hat{x}_n\bar{\hat{x}}_n$ 在 $S_g$ 上一致收敛于 $G$，由此根据 (15.9.2.8)，有

$$\int G(\chi)dm_F(\chi)=\lim_{n\to\infty}\int|\hat{x}_n(\chi)|^2dm_F(\chi)=\lim_{n\to\infty}\int F(\chi)dm_{x_n,x_n}(\chi).$$

因此一切归结为证明，对任何 $x\in A$，测度 $m_{x,x}$ 都是正的，或者等

价地，对属于$\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(S_g)$的一切非负函数 $G$，都有$\int G(\chi)dm_{x,x}(\chi) \geqslant 0$. 通过同样的推理，可以归结为证明，对一切 $y\in A$，有 $\int |\hat{y}(\chi)|^2 dm_{x,x}(\chi) \geqslant 0$. 然而由 (15.9.2.5)，这等价于关系式 $g(y^*yx,x) \geqslant 0$；可是这个关系式也可写为 $g(yx,yx) \geqslant 0$(15.6.3)，故引理得证.

**(15.9.2.12)** 对 $A$ 中的 $x$, $y$，形如 $F = \hat{x}\bar{\hat{y}}$ 的函数属于 $\Phi$ 且有 $m_F = m_{x,y}$.

我们必须证明，对 $A$ 中的 $u$, $v$，有 $(\hat{x}\bar{\hat{y}})\cdot m_{u,v} = (\hat{u}\bar{\hat{v}})\cdot m_{x,y}$，或由于 (ii)，这等价于证明，对一切 $z\in A$，有

$$\int \hat{z}(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_{u,v}(\chi) = \int\hat{z}(\chi)\hat{u}(\chi)\overline{\hat{v}(\chi)}dm_{x,y}(\chi).$$

但上式左边等于 $g(zxy^*u, v)$，而右边等于 $g(zuv^*x, y)$. 由 $A$ 的交换性与 (15.6.3)，有

$$g(zxy^*u, v) = g(y^*zxu, v) = g(zxu, yv),$$
$$g(zuv^*x, y) = g(v^*zux, y) = g(zux, vy) = g(zxu, yv).$$

现在我们来完成每个函数 $G\in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S_g)$ 属于 $\Phi$ 的证明. 设 $K = \mathrm{Supp}(G)$；问题归结为证明：存在函数 $F\in\Phi$，它在 $K$ 上不等于零；因为此时可写 $G = G'F$，其中 $G'\in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}^0(S_g)$，从而用引理 (15.9.2.10) 就能证明 $G\in\Phi$. 对每个 $\chi\in K$，由定义存在 $x\in A$，使得 $\hat{x}(\chi)\neq 0$，故存在 $\chi$ 在 $S_g$ 内的邻域 $V(\chi)$，使对 $\chi'\in V(\chi)$，有 $\hat{x}(\chi')\neq 0$. 可以用有限个邻域 $V(\chi_i)$ 覆盖 $K$；若 $x_i$ 是 $A$ 的对应元，则根据 (15.9.2.12)，函数 $F = \sum_i \hat{x}_i\bar{\hat{x}}_i$ 就是所需的解.

**(15.9.2.13)** $m_g$ 的定义与 (i) 的证明.

由于 (15.9.2.11)，我们已经看到，$F\to m_F(1)$ 是 $S_g$ 上的正测度 $m_g$；下面证明，对每个函数 $F\in\Phi$，有

**(15.9.2.14)** $$m_F = F\cdot m_g.$$

事实上，对每个函数 $G\in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S_g)$，有 $m_g(GF) = m_{GF}(1)$，根据 (15.9.2.10)，有 $m_{GF} = G\cdot m_F$，因而 $m_{GF}(1) = \int G(\chi)dm_F(\chi)$. 然

而按定义，$m_{GF}(1)=\int G(\chi)F(\chi)dm_g(\chi)$，这就推出关系式(15.9.2.14)．特别是，考虑到(15.9.2.12)，对 $A$ 中任何 $x$，$y$，有

**(15.9.2.15)** $$m_{x,y}=\hat{x}\bar{\hat{y}}\cdot m_g.$$

由于 $m_{x,y}$ 是有界测度，从而推出 $\hat{x}\bar{\hat{y}}$ 是 $m_g$ 可积的(13.14.4)．于是函数 $\hat{x}$ 属于 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(S_g, m_g)$；又由(15.9.2.15)与(15.9.2.5)得到，对一切 $z\in A$，有

**(15.9.2.16)** $$g(zx, y)=\int\hat{z}(\chi)dm_{x,y}(\chi)=\int\hat{z}(\chi)\hat{x}(\chi)\bar{\hat{y}}(\chi)dm_g(\chi).$$

换言之，我们证明了 $x$ 由积 $zx$ 代替的特殊情形下的(15.9.2.1)．剩下要证明这个公式对一般情形也成立．(15.9.2.3)中一开始所作的附注表明，对每个算子 $V\in\mathscr{A}'_g$，有

**(15.9.2.17)** $$(V\cdot\pi_g(x)|\pi_g(y))=\int_{S'_g}(\mathscr{G}V)(\omega^{-1}(\chi'))d\mu_{x,y}(\chi').$$

特别，对 $V=1_{H_g}$，有

**(15.9.2.18)** $$g(x, y)=\int_{S'_g}d\mu_{x,y}(\chi').$$

然而鉴于(15.9.2.15)，有

$$\int_{S_g}\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_g(\chi)=\int_{S_g}dm_{x,y}(\chi).$$

按定义，测度 $m_{x,y}$ 是自 $\mu_{x,y}$ 在 $S_g$ 上所诱导的，故一切归结为证明，当 $0\in S'_g$（因而 $S_g=S'_g-\{0\}$）时，有

**(15.9.2.19)** $$\mu_{x,y}(\{0\})=0.$$

由 $\mu_{x,y}$ 的定义立即得到，映射 $(x, y)\to\mu_{x,y}$ 是半双线性的，因而(13.16.1)复值函数 $(x, y)\to\mu_{x,y}(\{0\})$ 是 $A\times A$ 上的半双线性形式．又由(15.9.2.17)与 Гельфанд-Наймарк 定理(15.4.14)可以立即推出，对紧空间 $S'_g=S_g\cup\{0\}$ 上的每个连续函数 $F$，有 $\left|\int F(\chi')d\mu_{x,y}(\chi')\right|\leqslant\|F\|\cdot\|\pi_g(x)\|\cdot\|\pi_g(y)\|$，因而 $\|\mu_{x,y}\|\leqslant\|\pi_g(x)\|\cdot\|\pi_g(y)\|$，于是更有 $|\mu_{x,y}(\{0\})|\leqslant\|\pi_g(x)\|\cdot\|\pi_g(y)\|$．由于 $A/\mathfrak{n}_g$ 在 $H_g$ 内处处稠密，所以立即推出存在向量 $E\cdot x\in H_g$，使对一切 $y\in A$，有 $\mu_{x,y}(\{0\})=(E\cdot x|\pi_g(y))$(6.3.2)，且有 $\|E\cdot x\|\leqslant\pi_g(x)$．这表明 $E\cdot x$ 只依赖于 $\pi_g(x)$，因而可以写为 $W_0\cdot\pi_g(x)$，

其中 $W_0$ 是 $A/\mathfrak{n}_g$ 到 $H_g$ 的线性映射. 此外还有 $\|W_0\cdot\pi_g(x)\|\leqslant\|\pi_g(x)\|$，因此 $W_0$ 是连续的且可延拓为属于 $\mathscr{L}(H_g)$ 的连续算子 $W$. 另一方面，在 (15.9.2.17) 中用 $zx$ 代替 $x$ 并注意到对 $V\in\mathscr{A}'_g$，有 $V\cdot\pi_g(zx)=(VU_g(z))\cdot\pi_g(x)$，就得到

$$\mu_{zx,y}=((\mathscr{G}U_g(z))\circ\omega^{-1})\cdot\mu_{x,y};$$

且由于函数 $\chi'\to(\mathscr{G}U_g(z))(\omega^{-1}(\chi'))$ 在点 0 处为零，我们看到，对一切 $z\in A$，有 $\mu_{zx,y}(\{0\})=0$，或 $(W\cdot\pi_g(zx)|\pi_g(y))=0$. 由于这些 $\pi_g(y)$ 组成的集在 $H_g$ 内稠密，所以对 $A$ 中任何 $z$ 与 $x$，有 $W\cdot\pi_g(zx)=0$. 然而根据条件 (N)（这个条件只在此处用到），这些 $\pi_g(zx)$ 在 $H_g$ 内形成一个全子集，因而 $W=0$，从而完成了 (i) 的证明.

**(15.9.2.20)** (iii) 的证明.

为证明 $m_g$ 的支集是整个 $S_g$，只须证明，对每个 $\chi\in S_g$ 与 $\chi$ 在 $S_g$ 内的每个开邻域 $V$，至少存在一个非负连续函数 $F$，其支集包含在 $V$ 内，并且 $m_g(F)\neq 0$. 如不然，则对每个这样的函数 $F$，对 $A$ 中任何 $x,y$，有

$$\int F(\chi)dm_{x,y}(\chi)=\int F(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_g(\chi)=0.$$

然而根据 Гельфанд-Наймарк 定理 (15.4.14)，$F$ 是形如 $\mathscr{G}V\circ\omega^{-1}$ 的函数在 $S_g$ 上的限制，其中 $V\in\mathscr{A}'_g$；且由 (15.9.2.17)，对 $A$ 内任意的 $x,y$，有 $(V\cdot\pi_g(x)|\pi_g(y))=0$. 基于 $A/\mathfrak{n}_g$ 在 $H_g$ 内稠密的事实，由此即有 $V=0$，从而 $F=0$，而这是不可能的(4.5.2).

**(15.9.2.21)** (iv) 的证明.

由于 (iii)，向量空间 $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S_g)\cap\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(S_g,m_g)$（因而它的子空间 $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S_g)$）（代数地）等同于 $L^2_{\mathbf{C}}(S_g,m_g)$ 的一个处处稠密的子空间 (13.11.6). 另一方面，由于关系式 (15.9.2.1)，可以写出 $(\pi_g(x)|\pi_g(y))=\int\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_g(\chi)$，因而定义了准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 到它在 $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S_g)$ 内的象上的同构 $T_0$，使得 $T_0\cdot\pi_g(x)=\hat{x}$，所以问题归结为证明这个象在 $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S_g)\cap\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(S_g,m_g)$ 内关于 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(S_g,m_g)$ 的拓扑是处处稠密的. 给定 $\varepsilon>0$ 与任意的函数 $F\in$

$\mathscr{K}_C(S_g)$，只须证明，存在 $x\in A$，使得

$$\int |F(\chi)-\hat{x}(\chi)|^2 dm_g(\chi)\leqslant \varepsilon^2.$$

前面已经证明，存在函数 $\hat{u}=\sum_i \hat{x}_i\bar{\hat{x}}_i(x_i\in A)$，它在 Supp$(F)$ 上不取值零，因而可写 $F=G\hat{u}$，其中 $G\in\mathscr{K}_C(S_g)$．根据(ii)，存在 $y\in A$，使对一切 $\chi\in S_g$，都有 $|G(\chi)-\hat{y}(\chi)|\leqslant\varepsilon/N_2(\hat{u})$．由此推出

$$\int |F(\chi)-\hat{u}(\chi)\hat{y}(\chi)|^2 dm_g(\chi)$$
$$\leqslant(\varepsilon/N_2(\hat{u}))^2\int |\hat{u}(\chi)|^2 dm_g(\chi)=\varepsilon^2.$$

最后，对 $A$ 中的 $x$，$y$，按照定义有

$T_0\cdot(U_g(x)\cdot\pi_g(y))=T_0\cdot\pi_g(xy)=\hat{x}\hat{y}=M(\hat{x})\cdot(T_0\cdot\pi_g(y))$，并把 $T_0$ 连续延拓为 $H_g$ 到 $L^2_C(S_g,m_g)$ 上的同构 $T$，就得到 $TU_g(x)=M(\hat{x})T$．至于 $\lambda\cdot 1_{H_g}+U_g(x)$ 在 $\mathscr{L}(H_g)$ 内的范数等于 $\lambda+\hat{x}$ 在 $\mathscr{C}_C(S'_g)$ 内的范数，这是 Гельфанд-Наймарк 定理(15.4.14)的推论．

**(15.9.2.22)** $S_g$ 与 $m_g$ 的唯一性．

易见 Hermite 形式 $g'$ 满足(15.6.3)与(15.7.3)，因而是 $A$ 上的一个双迹．函数 $\hat{x}$ 有界，故

$$g'(xy,xy)=\int|\hat{x}(\chi)|^2|\hat{y}(\chi)|^2 dm(\chi)\leqslant\|\hat{x}\|^2 g'(y,y),$$

从而 $g'$ 满足条件(U)．为证明 $g'$ 满足条件(N)，记 $S'$ 为 $S$ 在 $\boldsymbol{H}(A)\cup\{0\}$ 内的闭包，若 $S$ 为紧，则 $S'$ 等于 $S$，否则等于 $S\cup\{0\}$．根据(13.11.6)，只须证明当 $\lambda\in\mathbf{C}$ 以及 $x$，$y$ 取遍 $A$ 时，函数 $\lambda+\hat{x}\hat{y}$ 在空间 $\mathscr{C}_C(S')$ 内形成一个全子集；利用 Stone-Weierstrass 定理与按定义函数 $\hat{x}$ 的集区分 $S\cup\{0\}$ 的点，这一断言的证明与(15.9.2.11)相同．理想 $\mathfrak{n}_{g'}$ 是使得 $\hat{x}$ 为 $m$ 可忽略的 $x\in A$ 的集．然而由于 $m$ 以 $S$ 为其支集且 $\hat{x}$ 连续，所以仅当 $\hat{x}=0$ 时 $\hat{x}$ 才能是 $m$ 可忽略的，故 $\pi_{g'}(x)\to\hat{x}$ 是 $A/\mathfrak{n}_{g'}$ 到使得 $(\pi_{g'}(x)|\pi_{g'}(y))=\int\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm(\chi)$ 的函数 $\hat{x}$ 所成的代数上的同构．此外(15.9.2.21)的推理还表明这些 $\hat{x}$ 的集在 $\mathscr{L}^2_C(S,m)$ 内处处稠密，因而上述同构可延拓为

Hilbert 空间的同构 $T':H_{g'}\to L^2_{\mathbf{C}}(S,m)$，使得 $U_{g'}(x)=T'^{-1}M(\hat{x})T'$. 下面证明 $\|\lambda\cdot 1_{H_{g'}}+U_{g'}(x)\|=\|\lambda+\hat{x}\|$. 这等价于证明，若 $F\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S')$，则 Hilbert 空间 $L^2_{\mathbf{C}}(S,m)$ 上的连续算子 $M(F)$（乘以 $F$ 的乘法）具有范数 $\|F\|$. 由 (13.12.5) 立即得到 $\|M(F)\|\leqslant\|F\|$. 另一方面，存在 $\chi_1\in S'$，使得 $|F(\chi_1)|=\|F\|$ (3.17.10)；因而对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\chi_1$ 在 $S'$ 内的紧邻域 $V$，使对一切 $\chi\in V$，有 $|F(\chi)|\geqslant\|F\|-\varepsilon$. 由于按假定 $m$ 的支集是 $S$，且由于在各种情形下 $\chi_1$ 都属于 $S$ 在 $S'$ 内的闭包，所以有 $m(V\cap S)=\int\varphi_{V\cap S}dm=(N_2(\varphi_{V\cap S}))^2>0$. 再则，显见 $|F\varphi_{V\cap S}|\geqslant(\|F\|-\varepsilon)\varphi_{V\cap S}$，由此得到

$$N_2(F\varphi_{V\cap S})\geqslant(\|F\|-\varepsilon)N_2(\varphi_{V\cap S}),$$

从而 $\|M(F)\|\geqslant\|F\|-\varepsilon$(5.7.1). 因 $\varepsilon$ 为任意，这就完成了所述论断的证明. 于是同构 $\lambda\cdot 1_{H_{g'}}+U_{g'}(x)\to\lambda+\hat{x}$ 可连续延拓为 $\mathscr{A}'_{g'}$ 到 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S')$ 上的等距. 考虑到 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(S')$ 的每个特征标都形如 $F\to F(\chi')$（其中 $\chi'\in S'$）(15.3.7)，故推出 $S'_{g'}=S'$，由此 $S_{g'}=S$. 剩下要证明 $m_{g'}=m$，或等价地，证明对每个函数 $F\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S)$，有 $\int F(\chi)dm_{g'}(\chi)=\int F(\chi)dm(\chi)$. 然而根据 (i)，有

$$\int\hat{x}(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm_{g'}(\chi)=\int\hat{x}(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}dm(\chi),$$

且因函数 $\hat{z}$（对于 $z\in A$）在 $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}(S)$ 内形成一个全子集，这就证明了对 $A$ 中任何 $x,y$，有界测度 $\hat{x}\hat{y}\cdot m_{g'}$ 与 $\hat{x}\hat{y}\cdot m$ 相等. 另一方面，上面已经看到，存在函数 $\hat{u}=\sum_i\hat{x}_i\bar{\hat{x}}_i$（其中 $x_i$ 属于 $A$），它在 $\operatorname{Supp}(F)$ 上不取零值，因而 $F=G\hat{u}$，其中 $G\in\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(S)$. 由前所证，得到

$$\begin{aligned}\int F(\chi)dm_{g'}(\chi)&=\int G(\chi)\hat{u}(\chi)dm_{g'}(\chi)\\&=\sum_i\int G(\chi)\hat{x}_i(\chi)\overline{\hat{x}_i(\chi)}dm_{g'}(\chi)\\&=\sum_i\int G(\chi)\hat{x}_i(\chi)\overline{\hat{x}_i(\chi)}dm(\chi)\end{aligned}$$

$$= \int G(\chi)\hat{u}(\chi)dm(\chi) = \int F(\chi)dm(\chi).$$

于是，我们完全证明了 Plancherel-Godement 定理。

特别把 Plancherel-Godement 定理应用到双迹 $g$ 形如 $(x, y) \mapsto f(y^*x)$ 的情形，这里 $f$ 是 $A$ 上的正线性形式(因而是 $A$ 上的迹，因为 $A$ 是交换的)。当 $g$ 由迹 $f$ 所导出时，公式 (15.9.2.1) 导致是否也有

**(15.9.3)** $$f(x) = \int_{S_g} \hat{x}(\chi)dm_g(\chi)$$

的问题。这个问题的部分解答由下述定理给出：

**(15.9.4)** (**Bochner-Godement 定理**) (i) 设 $f$ 是交换对合代数 $A$ 上的正线性形式，使得双迹 $g(x, y) = f(xy^*)$ 满足 (15.9.2) 的假定。于是，若公式 (15.9.3) 成立且若测度 $m_g$ 有界，则 $f$ 满足条件：

($B$) 存在数 $M > 0$，使对一切 $x \in A$，有 $|f(x)|^2 \leqslant M \cdot f(xx^*)$。

(ii) 反之，若 $f$ 是 $A$ 上的正线性形式，满足条件 ($B$)，且假定对应的双迹 $g(x, y) = f(xy^*)$ 满足条件 ($U$) 并使得准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 是可分的且星代数 $\mathscr{A}_g$ 也是可分的，则 $g$ 也满足条件 ($N$)，测度 $m_g$ 有界，并且公式 (15.9.3) 成立。

对于 (i)，若 $m_g$ 有界且公式(15.9.3) 成立，则由 Cauchy-Schwarz 不等式 (13.11.2.2)，有

$$\left|\int \hat{x}dm_g\right|^2 \leqslant m_g(S_g) \cdot \int |\hat{x}|^2 dm_g,$$

这就给出 ($B$) 中的不等式，其中 $M = m_g(S_g)$。

对于(ii)，我们提醒一下，在 Hilbert 空间 $H_g$ 的定义中，不一定假定满足条件($N$)。($B$)中的不等式可写成 $|f(x)|^2 \leqslant M\|\pi_g(x)\|^2$，因而 $f$ 在 $\mathfrak{n}_g$ 上取值为零，于是 $f$ 可以写为 $f' \circ \pi_g$，其中 $f'$ 是 $A/\mathfrak{n}_g$ 上的线性形式。又我们有 $|f'(\pi_g(x))|^2 \leqslant M\|\pi_g(x)\|^2$，这表明 $f'$ 在准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 上连续 (5.5.1)，因而可以延拓为 Hilbert 空间 $H_g$ 上的连续线性形式 (5.5.4)。于是由 (6.4.2) 推出，存在确定

的向量 $a \in H_g$，使得

(15.9.4.1) $$f(x) = (\pi_g(x) \mid a).$$

由此推出，对一切 $x \in A$，有

(15.9.4.2) $$U_g(x) \cdot a = \pi_g(x).$$

事实上，对一切 $y \in A$，有

$$\begin{aligned}(\pi_g(y) \mid U_g(x) \cdot a) &= (U_g(x^*) \cdot \pi_g(y) \mid a) \\ &= (\pi_g(x^*y) \mid a) = f(x^*y) = (\pi_g(y) \mid \pi_g(x)),\end{aligned}$$

因为 $A/\mathfrak{n}_g$ 在 $H_g$ 内稠密，由此即得公式 (15.9.4.2).

现在证明 $g$ 满足条件 $(N)$. 事实上，设 $b \in H_g$ 是这样一个向量，它属于由元 $\pi_g(xy)$（其中 $x$，$y$ 取遍 $A$）所生成的子空间的闭包的正交补空间，则有 $(\pi_g(xy) \mid b) = 0$，即 $(U_g(x) \cdot \pi_g(y) \mid b) = 0$，或对 $A$ 中任何 $x$，$y$ 有 $(\pi_g(y) \mid U_g(x^*) \cdot b) = 0$. 由于元 $\pi_g(y)$（$y$ 取遍 $A$）形成 $H_g$ 的稠密子空间，从而推出 $(a \mid U_g \times (x^*) \cdot b) = 0$，或 $(U_g(x) \cdot a \mid b) = 0$，最后得到 $(\pi_g(x) \mid b) = 0$，因为 $A/\mathfrak{n}_g$ 在 $H_g$ 内稠密，由此即得 $b = 0$.

在代数 $\mathscr{A}'_g$ 上考虑正线性形式 $f''(V) = (V \cdot a \mid a)$，有

$$|f''(V)| \leqslant \|V \cdot a\| \cdot \|a\| \leqslant \|V\| \cdot \|a\|^2.$$

根据 Гельфанд-Наймарк 定理 (15.4.14)，可写 $f''(V) = h(\mathscr{G}V)$，其中 $h$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{X}(A'_g))$ 上的线性形式，并且由于 $\|\mathscr{G}V\| = \|V\|$，故 $h$ 是紧空间 $\boldsymbol{X}(A'_g)$ 上的一个测度（开始时是复测度）. 由于在 $\boldsymbol{X}(A'_g)$ 上连续的非负函数 $G$ 具有 $F \cdot \overline{F}$ 的形式，因而具有 $\mathscr{G}V \cdot \mathscr{G}V^* = \mathscr{G}(VV^*)$ 的形式，所以 $h(G) = \|V \cdot a\|^2 \geqslant 0$，即 $h$ 是正测度. 考虑到 (15.9.4.2)，(15.9.4.1) 与 $\boldsymbol{X}(A'_g)$ 到 $S'_g$ 上的典则同胚 $\omega$，我们看到，存在 $S_g$ 上的正测度 $\nu$（它由 $S'_g$ 上的测度 $\omega(h)$ 所诱导，因而是有界的），使对一切 $x \in A$，有

$$f(x) = (U_g(x) \cdot a \mid a) = \int \hat{x}(\chi) d\nu(\chi).$$

于是，还剩下证明 $\nu = m_g$. 由于

$$g(x, y) = \int \hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)} d\nu(\chi),$$

所以根据(15.9.2，II))，只须证明：1° 函数 $\hat{x}$(对于 $x\in A$) 属于 $\mathscr{L}_C^2(S_g, \nu)$；2° $\nu$ 的支集是 $S_g$。第一个论断是显然的，因为连续函数 $\hat{x}$ 有界且测度 $\nu$ 有界．为证明第二个论断，假定在 $\mathscr{K}_C(S_g)$ 中存在非负函数 $F$，使得 $\int F(\chi)d\nu(\chi)=0$．由此立即推出，对 $A$ 中任何 $x$，$y$，有 $\int F(\chi)\hat{x}(\chi)\overline{\hat{y}(\chi)}d\nu(\chi)=0$．由于 $F\circ\omega$ 是 $\mathbf{X}(\mathscr{A}'_g)$ 上的连续函数，所以它具有 $\mathscr{G}V$ 的形式，其中 $V\in\mathscr{A}'_g$，因而按 $\nu$ 的定义，上面的关系式可写为

$$(U_g(y^*)VU_g(x)\cdot a|a)=0,$$

或

$$(VU_g(x)\cdot a|U_g(y)\cdot a)=0,$$

于是根据(15.9.4.2)，对 $A$ 中任何 $x$，$y$，有 $(V\cdot\pi_g(x)|\pi_g(y))=0$．因为 $A/\mathfrak{n}_g$ 在 $H_g$ 内稠密，所以由此推出 $V=0$，故 $F=0$．证毕．

**(15.9.5)** **例．**我们已经看到(15.6.2.4)，具有单位元的对合代数 $A$ 上的正线性形式 $f$ 必定满足条件 $(B)$．读者记得，若 $A$ 还是 Banach 代数，则对应的 Hilbert 形式 $g$ 满足条件$(U)$(15.6.11)．若 $A$ 是具有单位元 $e$ 的可分 Banach 代数，则准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 与星代数 $\mathscr{A}_g$ 都是可分的．事实上，$A/\mathfrak{n}_g$ 的可分性由 $f$ 为连续(15.6.11)，从而 $\|\pi_g(x)\|^2=f(x^*x)\leqslant\|f\|\cdot\|x^*x\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|^2$ 推出，因为这表明 $A$ 内的处处稠密的可数集在 $\pi_g$ 下的象在准 Hilbert 空间 $A/\mathfrak{n}_g$ 内也是处处稠密的．$\mathscr{A}_g$ 的可分性由表示 $U_g$ 为连续(15.5.7)推出，因为若 $U_g$ 连续，则它把 $A$ 内的处处稠密可数集变换为 $\mathscr{A}_g$ 内的处处稠密可数集．于是就能把 Bochner-Godement 定理应用到 $A$ 与 $A$ 的任一正线性形式 $f$ 上．

**(15.9.6)** 若 $s\to U(s)$ 是 $A$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的表示，则对每个 $x_0\in H$，线性形式 $f_{x_0}(s)=(U(s)\cdot x_0|x)$ 满足条件$(B)$，因为我们有(6.2.4)

$$|f_{x_0}(s)|^2\leqslant\|U(s)\cdot x_0\|^2\cdot\|x_0\|^2=\|x_0\|^2f_{x_0}(s^*s).$$

考虑到(15.5.6)，这表明对于具有单位元的交换对合代数 $A$，掌握

了关于$A$的 Hermite 特征标的知识，也就确定了$A$的所有表示．此外，在(15.9.4)的证明中，我们还看到，若$f$是满足(15.9.4，(ii))的条件的正线性形式，则对应的表示$x \to U_g(x)$具有全化向量$a$(15.9.4.2)．

**(15.9.7)** 附注．可能有这样的情形：公式(15.9.3)成立(以及(15.9.2)中的条件满足)，但测度$m_g$却无界(因而$f$不满足(B))(问题2)．另一方面，可以给出满足条件(U)与(N)而不满足条件(B)的例子(问题4)与满足条件(B)与(N)而不满足条件(U)的例子(问题5)．

## 问　　题

1) 设$A$是$\boldsymbol{R}$上的有界连续复值函数的对合代数$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{\infty}(\boldsymbol{R})$，$\mu$是$\boldsymbol{R}$上的有界正测度，以$\boldsymbol{R}$为其支集，试证

$$g(x, y) = \int x(t)\overline{y(t)}d\mu(t)$$

是$A$上的一个双迹，对于这个双迹，准 Hilbert 空间$A/\mathfrak{n}_g = A$是可分的，然而星代数$\mathscr{A}_g$不是可分的(7.4 问题4)．

2) 设$\lambda$是$\boldsymbol{R}$上的 Lebesgue 测度，$A$是$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{0}(R)$内由平方$\lambda$可积函数组成的对合子代数，则$g(x,y) = \int x(t)\overline{y(t)}d\lambda(t)$是$A$上的双迹，它满足条件(U)与(N)，但对于它测度$m_g$无界，并且(15.9.3)的右边对一切$x \in A$都没有定义．若$B \subset A$是$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^{0}(\boldsymbol{R})$内由$\lambda$可积函数组成的子代数，则$f(x) = \int x(t)d\lambda(t)$是$B$上的正线性形式，它满足(15.9.3)，但测度$m_g$无界．

3) 设$I = [0, 1]$，$A$是$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$内由在$I$上二次连续可导且满足$x(0) = 0$的函数$x$组成的对合子代数，试证

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt + x''(0)$$

是$A$上的一个正线性形式，使得对应的双迹$g$满足条件(U)，但不满足条件(N)．(设$(f_n)$是属于$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$的函数的序列，每个$f_n$都二次连续可导，在[0, 1]上取值，且$f_n(t)$在0的一个邻域内等于1，而当$t \geqslant 1/n$时，$f_n(t) = 0$．在 Hilbert 空间$H_g$中考虑函数$x_n \in A(x_n(t) = tf_n(t))$的类所成的序列．)

4) 设$A$是$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$内由在$I$上连续可导且满足$x(0) = 0$的函数$x$组成

的对合子代数，试证在 $A$ 上，$f(x)=x'(0)$ 是正线性形式，对应于 $f$ 的双迹 $g$ 是零(因而满足 $(U)$ 与 $(N)$)，但却不满足条件 $(B)$.

5) 设 $A$ 是定义在 $[0,1]$ 上的形如 $P(t,\log t)$ 的复值函数所成的对合代数(其对合是 $x\to\bar{x}$)，其中 $P(u,v)$ 是两个变量的复系数多项式，则线性形式 $f(x)=\int_0^1 x(t)dt$ 在 $A$ 上是正的，且因 $A$ 具有单位元，所以该线性形式满足 $(B)$；对应的双迹 $g$ 满足条件 $(N)$，但不满足条件 $(U)$.

6) 设 $\Gamma$ 是赋予结合合成律 $(x,y)\to xy$ 且具有幺元 $e$ 的集，赋予对合 $x\to x^*$，即 $\Gamma$ 到自身的一个双射，满足 $e^*=e$，$(x^*)^*=x$ 与 $(xy)^*=y^*x^*$. $\Gamma$ 到 Hilbert 空间 $H$ 中的表示定义为 $\Gamma$ 到 $\mathscr{L}(H)$ 的映射 $x\to U(x)$，满足 $U(e)=1_H$、$U(xy)=U(x)U(y)$，$U(x^*)=U(x)^*$.

设 $E$ 是 Hilbert 空间，$x\to T(x)$ 是 $\Gamma$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的映射，则为使存在作为 $E$ 与另一 Hilbert 空间 $F$ 的 Hilbert 和的 Hilbert 空间 $H$，以及 $\Gamma$ 到 $H$ 中的表示 $x\to U(x)$，使对一切 $x\in\Gamma$，有 $T(x)=PU(x)|E$，其中 $P$ 是 $H$ 在 $E$ 上的正交投影，必须且只须 $T$ 满足下列三个条件：

1° $T(e)=1_E$；对一切 $x\in E$ 有 $T(x^*)=T(x)^*$.

2° 对除有限个元 $x\in\Gamma$ 外满足 $g(x)=0$ 的映射 $g:\Gamma\to E$，有

$$\sum_{(x,y)\in\Gamma\times\Gamma}(T(x^*y)\cdot g(y)|g(x))\geqslant 0.$$

3° 对除有限个元 $x\in\Gamma$ 外满足 $g(x)=0$ 的映射 $g:\Gamma\to E$ 与每个 $z\in\Gamma$，存在常数 $M_z>0$，使得

$$\sum_{(x,y)\in\Gamma\times\Gamma}(T(x^*z^*zy)\cdot g(y)|g(x))\leqslant M_z\sum_{(x,y)\in\Gamma\times\Gamma}(T(x^*y)\cdot g(y)|g(x)).$$

再者，若 $U$ 与 $H$ 满足这些条件且使得元 $U(x)\cdot f$ (这里 $x$ 取遍 $\Gamma$、$f$ 取遍 $H$) 在 $H$ 内形成一个全子集，则表示 $U$ 除等价外是完全确定的(等价性如同(15.5)中所定义).

(为证明这些条件是充分的，考虑 $E^\Gamma$ 内由满足下述条件的映射 $g:\Gamma\to E$ 组成的子空间 $G$：除有限个 $x\in\Gamma$ 外有 $g(x)=0$；并在 $G\times G$ 上考虑

$$(g,h)\to\sum_{(x,y)\in\Gamma\times\Gamma}(T(x^*y)\cdot g(y)|h(x))=B(g,h),$$

这是一个正 Hermite 形式. 若 $N$ 是 $G$ 内使得 $B(g,g)=0$ 的 $g\in G$ 所成的子空间，则 $B$ 通过商在 $G/N$ 上定义非退化正 Hermite 形式 $(\dot{g},\dot{h})\to(\dot{g}|\dot{h})=B(g,h)$，它使 $G/N$ 成为准 Hilbert 空间. 假定 $G/N$ 是一个 Hilbert 空间 $H_0$ 的处处稠密子空间. 定义 $G/N$ 到 $E^\Gamma$ 的单射 $j$ 如下：对每个 $g\in G$，取 $j(\dot{g})$

为映射

$$x \mapsto \sum_{y \in \Gamma} T(x^* y) \cdot g(y);$$

通过 $j$ 转移 $G/N$ 上的纯量积，就在 $j(G/N)$ 上得到一个准 Hilbert 空间结构，由此通过连续延拓，得到 $H_0$ 在 Hilbert 空间 $H$ 上的同构．然后定义 $U(x)$ 如下：$U(x) \cdot j(\dot{g})$ 是映射

$$z \mapsto \sum_{y \in \Gamma} T(z^* x y) \cdot g(y).)$$

7）设 $A$ 是具有单位元 $e$ 的可分交换对合 Banach 代数，$P$ 是 $A$ 上的正线性形式（或 $A$ 上的迹）所成的集，它是 Banach 空间 $A$ 的对偶 $A'$ 的子集（15.6.11）．对 $P$ 的两个元素 $f_1, f_2$，如果 $f_2 - f_1 \in P$，就写为 $f_1 \leqslant f_2$.

a）试证，若 $f, f_0$ 是 $A$ 上的迹，满足 $f_0 \leqslant f$，则存在 $A$ 中的序列 $(y_n)$，使对一切 $x \in A$，有 $f_0(x) = \lim_{n \to \infty} f(y_n^* x)$．（若 $g$ 是对应于 $f$ 的双迹，注意 $f_0$ 可写成 $f_0 = u \circ \pi_g$，其中 $u$ 是 $H_g$ 上的连续线性形式．）

b）设 $P_1$ 是使得 $\|f\| = f(e) \leqslant 1$ 的迹 $f \in P$ 所成的集，它是弱紧且凸的，试证 $P_1$ 的端点（12.15 问题 5）集等同于 $(P \cap \mathfrak{X}(A)) \cup \{0\}$．（利用 a）证明，若某个特征标是迹，则它必是 $P_1$ 的端点．为建立相反的论断，注意若 $f \in P_1$ 满足 $1 = \|f\| = f(e)$，则存在 $z \in A$，使得 $\|z\| < 1$ 且 $f(z^* z) \neq 0$；利用（15.6.11.1）证明线性形式

$$f_1(x) = f(z^* z x)/f(z^* z) \text{ 与 } f_2(x) = f((e - z^* z)x)/(f(e) - f(z^* z))$$

属于 $P_1$，且若 $f$ 是端点，则可推出 $f = f_1 = f_2$．于是 $f(z^* z x) = f(x) f(z^* z)$；用 $z(e + y)$ 代替 $z$，其中 $y$ 充分小，由此推出 $f$ 是特征标．）

c）试证对每个 $f \in P_1$，存在 $P_1$ 上的唯一的正测度 $\mu_f$，其质量为 1，且使得对每个 $x \in A$，有

$$f(x) = \int_{P \cap \mathfrak{X}(A)} \hat{x}(\chi) \, d\mu_f(\chi).$$

（利用 13.10 问题 2b）；为建立 $\mu_f$ 的唯一性，利用 Stone-Weierstrass 定理．）

## 10. 由连续函数构成的代数的表示

设 $K$ 是紧可度量化空间，把 15.9 的结果应用到 $A = \mathscr{C}_C(K)$ 的情形，就能简单地写出这个代数的所有表示．先考虑单演表示 $u \to T(u)$.

**(15.10.1)** 设$K$是紧可度量化空间，令$A=\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$，则对合交换代数$A$到可分 Hilbert 空间$E$中的每个单演表示等价于如下定义的表示$u\to M_\mu(u)$：考虑$K$上的正测度$\mu$与对应的 Hilbert 空间$L^2_{\mathbf{C}}(K,\mu)$，并对每个$u\in A$，以$M_\mu(u)$记$L^2_{\mathbf{C}}(K,\mu)$上满足下述条件的连续算子：对每个函数$f\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K,\mu)$，$M_\mu(u)\cdot\tilde{f}$是$uf$在$L^2_{\mathbf{C}}(K,\mu)$内的类$(uf)^\sim$.

事实上，设$a$是$A$到可分 Hilbert 空间$E$中的表示$u\to T(u)$的全化向量，则这个表示除等价外由$A$上的正线性形式$f_a(u)=(T(u)\cdot a|a)$所确定(15.6). 由于$A$是可分的(7.4.4)，故可以应用 Bochner-Godement 定理. $A$的所有特征标是 Hermite 的，并且谱$\boldsymbol{X}(A)$典则等同于$K$(15.3.7)，于是所述命题是(15.9.2，(iv))的直接推论.

由(15.10.1)中的定义得到

**(15.10.2)** $$\|M_\mu(u)\|=\operatorname*{ess.sup}_{t\in K}|u(t)|=N_\infty(u)$$

(相对于测度$\mu$). 事实上，由(13.12.2)推出$\|M_\mu(u)\|\leqslant N_\infty(u)$；又对每个正数$\alpha<N_\infty(u)$，存在不可忽略的可积集$P\subset K$，使在$P$上有$|u(t)|\geqslant\alpha$；于是显然$N_2(u\varphi_P)\geqslant\alpha N_2(\varphi_P)$，由此得到(15.10.2).

测度$\mu$不是唯一确定的；稍后我们将明确这一点(15.10.7).

当$u$在$K$上不一定连续但简单地为$\mu$可测且依测度有界时，(15.10.1)中所给的$M_\mu(u)$的定义与公式(15.10.2)仍然有意义(根据(13.12.5))；这样延拓的映射$u\to M_\mu(u)$仍然是对合代数$\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(K,\mu)$到 Hilbert 空间$L^2_{\mathbf{C}}(K,\mu)$中的一个表示. 显见，若$u_1$与$u_2$关于$\mu$几乎处处相等，则$M_\mu(u_1)=M_\mu(u_2)$. 通常我们把表示$M_\mu$限制在$\mathscr{L}^\infty_{\mathbf{C}}(K,\mu)$的一个不依赖于$\mu$的自伴子代数上，这个子代数就是由普遍可测(13.9)且有界的复值函数组成的代数$\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$. 根据(13.9.8.1)，它是$\mathbf{C}$上的一个对合代数，且由 Егоров 定理(13.9.10)，它是$\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(K)$的 Banach 子代数.

**(15.10.3)** 考虑$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$到可分 Hilbert 空间$E$中的具有全化向量$a$的表示$u\to T(u)$(这些假定将一直保留到(15.10.7)). 由前

所述，可以把表示 $T$ 延拓到对合代数 $\mathscr{U}_C(K)$ 上，而延拓的表示(仍记作 $T$)不依赖于所考虑的全化向量 $a$。事实上，设 $x, y$ 是 $E$ 的两个向量，则对一切 $u \in \mathscr{C}_C(K)$，有 $\|T(u)\| \leqslant \|u\|$(15.5.7)，故有

(15.10.3.1) $$|(T(u) \cdot x | y)| \leqslant \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

从而线性形式 $u \to (T(u) \cdot x | y)$ 是 $K$ 上的一个测度 $\mu_{x,y}$，使得 $\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

由这个定义立即得到

(15.10.3.2) $$\mu_{y,x} = \bar{\mu}_{x,y}.$$

再者，若 $x = T(v) \cdot a, y = T(w) \cdot a$，其中 $v, w$ 都在 $\mathscr{U}_C(K)$ 内，则对每个函数 $u \in \mathscr{U}_C(K)$ 有

$$\begin{aligned}(T(u) \cdot x | y) &= (T(uv) \cdot a | T(w) \cdot a) \\ &= (T(\bar{w}uv) \cdot a | a) = \int \bar{w}uv d\mu,\end{aligned}$$

因而

(15.10.3.3) $$\mu_{T(v) \cdot a, T(w) \cdot a} = (v\bar{w}) \cdot \mu.$$

上面所说的 $T$ 不依赖于 $a$ 的性质是下面的更为明确的命题的推论:

**(15.10.4)** (i) 对 $E$ 中任何 $x, y$，对一切 $u \in \mathscr{U}_C(K)$，有

(15.10.4.1) $$(T(u) \cdot x | y) = \int u(t) d\mu_{x,y}(t).$$

(ii) 若 $(u_n)$ 是属于 $\mathscr{U}_C(K)$ 的函数的一致有界序列，它简单收敛于 $u$，则对 $E$ 中的 $x, y$，有

(15.10.4.2) $$(T(u) \cdot x | y) = \lim_{n \to \infty} (T(u_n) \cdot x | y).$$

只须对 $E$ 的一个全子空间中的 $x, y$ 证明(15.10.4.2)，因为半双线性函数 $(x, y) \to (T(u_n) \cdot x | y)$ 形成一个等度连续集，这是由于

$$\begin{aligned}&|(T(u_n) \cdot x | y) - (T(u_n) \cdot x_0 | y_0)| \leqslant \\ &\quad \leqslant \|u_n\|(\|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| \\ &\quad + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\|)\end{aligned}$$

(7.5.5)。取 $x = T(s_1) \cdot a$, $y = T(s_2) \cdot a$，其中 $s_1, s_2$ 属于 $\mathscr{C}_C(K)$，

于是由定义，有 $(T(u_n)\cdot x|y)=(T(\bar{s}_2u_ns_1)\cdot a|a)=\int\bar{s}_2u_ns_1d\mu$，因此只须对测度 $\mu$ 应用控制收敛定理(13.8.4)即可．为证明(15.10.4.1)，我们注意，按照定义，这一性质对 $u\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 成立；而在一般情形下对测度 $\mu_{x,y}$ 两次应用控制收敛定理且利用 (13.7.1) 即可．

**(15.10.5)** 为使 $T(u)$ 是 Hermite 算子(相应地，正 Hermite 算子(11.5)；零算子；酉算子)，必须且只须 $u(x)$ 关于测度 $\mu$ 几乎处处是实的(相应地，$u(x)\geqslant 0$；$u(x)=0$；$|u(x)|=1$)．

易于直接验证，若 $U$ 是 Hilbert 空间 $E$ 上的 Hermite (相应地，正 Hermite；酉)算子，且若 $S$ 是 $E$ 到 Hilbert 空间 $E'$ 上的同构，则 $SUS^{-1}$ 在 $E'$ 上具有相应的性质 (这些性质只涉及 Hilbert 空间结构)．于是可以限于 $T(u)=M_\mu(u)$ 的情形，在这种情形下，所述条件的充分性是显见的．另一方面，例如，如果存在 $K$ 的可测子集 $X$，使得 $\mu(X)=\alpha>0$，且在 $X$ 上

$$\mathscr{I}(u(x))\geqslant\beta>0,$$

则 $\mathscr{I}((T(u)\cdot\tilde{\varphi}_X|\tilde{\varphi}_X)=\mathscr{I}\left(\int_X ud\mu\right)\geqslant\alpha\beta$，因而 $T(u)$不是 Hermite 的．其余情形可以类似地处理．

**(15.10.6)** (i) 属于代数 $T(\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K))$ 的正交投影算子是形如 $T(\varphi_X)$ 的算子，其中 $X$ 是 $K$ 的一个普遍可测子集．

(ii) $\mathscr{L}(E)$ 的子代数 $T(\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K))$ 是 $\mathscr{L}(E)$ 的一个极大交换子代数．

(iii) 为使 $E$ 的闭向量子空间 $F$ 关于 $T$ 为稳定，必须且只须它具有 $T(\varphi_X)(E)$ 的形式，其中 $X$ 是 $K$ 的一个普遍可测子集．

对于 (i)，由 $E$ 上正交投影算子的特征(15.5.3.1)与(15.10.5)，为使 $T(u)$ 是正交投影算子，必须且只须 $u$ 几乎处处等于一个有限实值 $\mu$ 可测函数 $v$，$v$ 为有界且满足 $v^2=v$．于是 $v=\varphi_X$，其中 $X$ 是 $K$ 的一个 $\mu$ 可测子集，由此即得所需的结论．

对于 (ii)，显然只须证明，与所有 $T(u)$ (这里 $u\in\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(X)$) 可交换的连续算子 $V\in\mathscr{L}(E)$ 具有 $T(v)$ 的形式．设 $a$ 是关于 $T$

的全化向量，则对 $K$ 的每个普遍可测子集 $X$，因为 $T(\varphi_X)$ 是与 $V$ 可交换的正交投影算子，所以

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi_X d\mu_{V\cdot a,a}\right| &= |(T(\varphi_X)V\cdot a|a)| \\ &= |(VT(\varphi_X)\cdot a|T(\varphi_X)\cdot a)| \leqslant \\ &\quad \|V\|\cdot\|T(\varphi_X)\cdot a\|^2 \\ &= \|V\|\int \varphi_X d\mu_{a,a} = \|V\|\int \varphi_X d\mu.\end{aligned}$$

于是由 Lebesgue-Nikodym 定理 (13.15.5, $c'$)) 得知 $\mu_{V\cdot a,a} = h\cdot\mu$，其中 $h$ 是一个 $\mu$ 可积函数。由于从上面的不等式还能得到，对每个阶梯函数 $w\in\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(X)$，有 $\left|\int wd\mu_{V\cdot a,a}\right| \leqslant \|V\|\cdot N_1(w)$，故定义在这些阶梯函数所成的向量空间上的线性形式 $w\to\int hwd\mu$ 可以连续延拓到 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^1(K,\mu)$ 上((13.9.12)与(13.9.13))，由(13.17.1)得知，$h$ 关于 $\mu$ 是依测度有界的，并可假定 $h\in\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$。对于 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 中任何 $s$，$t$，有

$$\begin{aligned}(VT(s)\cdot a|T(t)\cdot a) &= (T(s)V\cdot a|T(t)\cdot a) \\ &= \int s\bar{t}d\mu_{V\cdot a,a} = \int s\bar{t}hd\mu = (T(h)T(s)\cdot a|T(t)\cdot a),\end{aligned}$$

由于 $s$ 取遍 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 时向量 $T(s)\cdot a$ 在 $E$ 内形成一个全子集，所以得到 $V=T(h)$。

对于 (iii)，$F$ 关于 $T$ 为稳定意味着，对于 $u\in\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$，正交投影算子 $P_F$ 与所有 $T(u)$ 可交换 (15.5.3)，因而根据 (ii)，$P_F$ 属于 $T(\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K))$，由 (i)，它具有 $T(\varphi_X)$ 的形式。

我们还能刻划所考虑的表示的所有全化向量：

**(15.10.7)** 为使向量 $\tilde{g}\in L_{\mathbf{C}}^2(K,\mu)$ 关于 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 的表示 $M_\mu$ 是全化子，必须且只须关于 $\mu$ 几乎处处有 $g(t)\neq 0$。

事实上，为使当 $f$ 取遍 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 时类 $(fg)^\sim$ 在 Hilbert 空间 $L_{\mathbf{C}}^2(K,\mu)$ 内生成一个不处处稠密的子空间，必须且只须存在不可忽略的 $h\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(K,\mu)$，使对一切函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$，有 $\int fghd\mu=0$(6.3.1)。此外还有 $gh\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^1(K,\mu)$(13.11.7)；因而测度 $(gh)\cdot\mu$

是零测度，这蕴涵关于$\mu$几乎处处有$g(t)h(t)=0$ (13.14.4). 然而按假定，使得$h(t)\neq 0$的$t\in K$所成的可积集$A$不是可忽略的，所以在$A$内必定几乎处处有$g(t)=0$，这就证明了本命题.

对这样的关于$M_\mu$的全化向量$\tilde{g}$，通过定义(15.10.1)使之对应于$K$上的正测度$|g|^2\cdot\mu$. 因为$|g|^2$为$\mu$可积并且几乎处处不等于0，这样就得到$K$上所有等价于$\mu$的正测度(13.15.6). 换言之，(15.10.1)中所述的测度$\mu$除等价外仅由表示$T$确定.

**(15.10.8)** 我们转向$\mathscr{C}_C(K)$到可分 Hilbert 空间$E$中的任一非退化表示$T$. 此时已知(15.5.6)，$E$是关于$T$为稳定的闭子空间的序列$(F_n)$的 Hilbert 和，且使得$T$在每个$F_n$上的限制具有全化向量$a_n$. (15.10.3)中给出的测度$\mu_{x,y}$的定义可以不加修改地应用；另一方面，对每个函数$u\in\mathscr{U}_C(K)$，我们在每个$E_n$上定义$T_n(u)$(15.10.1)，而且根据(15.10.2)，对一切$n$都有$\|T_n(u)\|\leqslant\|u\|$.

现在我们注意下述引理:

**(15.10.8.1)** 设$E$是 Hilbert 空间，它是闭子空间序列$(E_n)$的 Hilbert 和. 对每个指标$n$，设$U_n$是$E_n$上的连续算子，并且假定范数序列$(\|U_n\|)$有界. 于是在$E$上存在唯一的连续算子$U$，使得它在每个$E_n$上的限制是$U_n$. 此外，$U^*$在每个$E_n$上的限制是$U_n^*$.

事实上，假定对一切$n$有$\|U_n\|\leqslant a$. 对于每个$x=\sum_n x_n\in E$，其中$x_n\in E_n$且$\|x\|^2=\sum_n\|x_n\|^2$(6.4)，有

$$\sum_n\|U_n\cdot x_n\|^2\leqslant a^2\sum_n\|x_n\|^2=a^2\|x\|^2,$$

这表明级数$\sum_n U_n\cdot x_n$在$E$内收敛. 若$U\cdot x$是此级数的和，则显然$U$是线性的，且由前所证，$\|U\cdot x\|\leqslant a\|x\|$，因而$U$是连续算子(5.5.1). 唯一性由这些$E_n$的并是$E$内的全子集推出(6.4). 最后，对一切$n$，有$\|U_n^*\|=\|U_n\|\leqslant a$，因而存在$E$上的连续算子$V$,

使它在每个 $E_n$ 上的限制是 $U_n^*$. 若 $y=\sum_n y_n$（其中 $y_n\in E_n$）且有

$$\sum_n \|y_n\|^2=\|y\|^2,$$

则 (6.4)

$$(U\cdot x|y)=\sum_n(U_n\cdot x_n|y_n)=\sum_n(x_n|U_n^*\cdot y_n)=(x|V\cdot y),$$

这表明 $V=U^*$.

应用 (15.10.8.1)，我们看到，在 $E$ 上存在唯一的正规连续算子 $T(u)$，它在每个 $E_n$ 上的限制是 $T_n(u)$. 显然 $u\to T(u)$ 是 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 $E$ 中的一个表示，它是 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 的表示 $T$ 的延拓. 然后通过同样的证明推广 (15.10.4)，只须注意作为 $E$ 的全子集，现在可取元 $T_n(s)\cdot a_n$（其中 $s\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$，$n$ 任意）所成的集.

一般地说，$E$ 作为具有 (15.10.8) 中的性质的子空间的 Hilbert 和的分解有无穷多种，然而我们有下述命题：

**(15.10.9)** 存在 $E$ 作为关于 $T$ 为稳定的闭子空间的（有限或无穷）序列 $(E_n)$ 的 Hilbert 和的分解，使得 $T$ 在 $E_n$ 上的限制具有全化向量 $a_n$，并且若 $\mu_n$ 是 $K$ 上对应 $a_n$ 的正测度 (15.10.1)，则对一切 $n$，$\mu_{n+1}$ 是以 $\mu_n$ 为基的测度 (13.13).

我们从 $E$ 作为上面所写的任一序列 $(F_n)$ 的 Hilbert 和的分解出发. 设 $b_n$ 是 $T$ 在 $F_n$ 上的限制的一个全化向量，$\nu_n$ 是 $K$ 上对应于 $b_n$ 的正测度. 由于测度 $\nu_n$ 只是除等价外确定 (15.10.7)，所以可用正的常数相乘，使得以范数 $\|\nu_n\|$ 为通项的级数收敛.

就 $n\geqslant 2$ 归纳地定义 $K$ 上正测度的两个序列 $(\nu_n')$，$(\nu_n'')$ 如下：$\nu_2'$ 与 $\nu_2''$ 是 $\nu_2$ 相对于 $\nu_1$ 的 Lebesgue 典则分解中的两个测度，$\nu_2'$ 以 $\nu_1$ 为基而 $\nu_2''$ 与 $\nu_1$ 互相奇异 (13.18.4)；对于 $k>2$，$\nu_k'$ 与 $\nu_k''$ 同样是使得 $\nu_k=\nu_k'+\nu_k''$ 的测度，其中 $\nu_k'$ 以 $(\nu_1+\nu_2''+\cdots+\nu_{k-1}'')$ 为基而 $\nu_k''$ 与 $\nu_1+\nu_2''+\cdots+\nu_{k-1}''$ 互相奇异. 每个这样的分解，对应 $K$ 分为两个普遍可测集 $B_k'$，$B_k''$ 的划分，使得 $\nu_k'$，$\nu_k''$ 分别集中在 $B_k'$，$B_k''$ 上. 设 $F_k=F_k'\oplus F_k''$ 是相应的 $F_k$ 作为两个互

相正交的子空间的 Hilbert 和的分解；若 $F_k$ 等同于 $L^2_C(K, \nu_k)$ (15.10.1)，则 $F'_k$ 与 $F''_k$ 分别具有全化向量 $b'_k = \bar{\varphi}_{B'_k}$ 与 $b''_k = \bar{\varphi}_{B''_k}$ (15.10.6)．测度 $\nu_1 + \nu''_2 + \cdots + \nu''_k$ 的序列是递增的，并且这些测度的范数以 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\nu_n\|$ 为上界，因而 (13.4.4) 这个序列在 $M_{\boldsymbol{R}}(K)$ 内有上确界 $\mu_1$，$\mu_1$ 也是这一序列的粗疏极限．前面的构造允许我们假定，若 $\nu_1$ 集中在 $B_1$ 上，则集 $B_1, B''_2, \cdots, B''_k, \cdots$ 两两不相交，且 $\nu''_k$ 等同于 $\varphi_{B''_k} \cdot \mu_1$． 若 $E_1$ 是 $F_1$ 与 $F''_k(k \geqslant 2)$ 的 Hilbert 和，则 $E$ 是 $E_1$ 与 $F'_k(k \geqslant 2)$ 的 Hilbert 和．子空间 $E_1$ 等同于 $L^2_C(K, \mu_1)$；由于 $\|b''_k\|^2 = \nu_k(B''_k) \leqslant \|\nu_k\|$，故级数 $b_1 + b''_2 + \cdots + b''_k + \cdots$ 在 $E_1$ 内收敛且它的和 $a_1$ 等同于 $\bar{\varphi}_{A_1}$，其中 $A_1$ 是 $B_1$ 与 $B''_k(k \geqslant 2)$ 的并．显见 $a_1$ 是关于 $T$ 在 $E_1$ 上的限制的全化向量．

于是，从 $E$ 的已给分解 $(F_n)$ 出发，构成了 $E$ 的分解 $E_1$ 与 $F'_k$，其中对于 $k \geqslant 2$，对应于 $F'_k$ 的测度 $\nu'_k$ 都以 $\mu_1$ 为基．通过归纳法，对于每个 $n$，我们定义了 $E$ 作为关于 $T$ 为稳定的子空间 $E_1, \cdots, E_n, F^{(n)}_{n+1}, \cdots, F^{(n)}_{n+k}, \cdots$ 的 Hilbert 和的分解，使得 $T$ 在每个子空间上的限制都具有全化向量，且若对于 $E_k$ 对应这个向量的测度为 $\mu_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，对于 $F^{(n)}_{n+k}$ 对应的测度为 $\nu^{(n)}_{n+k}$，则对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$\mu_{k+1}$ 以 $\mu_k$ 为基，而对 $k \geqslant 1$，$\nu^{(n)}_{n+k}$ 以 $\mu_n$ 为基；事实上为此只须把上面所作的推理应用到 Hilbert 和 $E_n \oplus F^{(n)}_{n+1} \oplus \cdots \oplus F^{(n)}_{n+k} \oplus \cdots$ 上．于是由构造显见

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \subset E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

由于 $E$ 是这些 $F_k$ 的 Hilbert 和，所以 $E$ 也是这些 $E_k$ 的 Hilbert 和 (6.4.2)，因而 $E_k$ 与 $\mu_k$ 都满足 (15.10.9) 中所述的条件．

令 $\mu_k = g_k \cdot \mu_1$，设 $S_k$ 是使得 $g_k(t) > 0$ 的点 $t \in K$ 所成的集．显然可以假定序列 $(S_k)$ 递减且每个 $S_k$ 是普遍可测集(13.9.3)．令 $M_1 = K - S_2$，对 $k \geqslant 2$，令 $M_k = S_k - S_{k+1}$，$M_\infty = \bigcap_{k \geqslant 1} S_k$；对 $1 \leqslant i \leqslant k$，设

$$H_{ik} = T(\varphi_{M_k})(E_i).$$

由 (15.10.7) 推出，$T$ 在 $k$ 个子空间 $H_{ik}(1 \leqslant i \leqslant k)$ 上的限制是等价的；令 $G_k = H_{1k} \oplus \cdots \oplus H_{kk}$. 显然 $G_k$ 是 $H_{ik}(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的 Hilbert 和. 同样对每个 $i \geqslant 1$ 令 $H_{i\infty} = T(\varphi_{M_\infty})(E_i)$；$T$ 在所有子空间 $H_{i\infty}(i \geqslant 1)$ 上的限制是等价的；令 $G_\infty$ 是 $H_{i\infty}(i \geqslant 1)$ 的 Hilbert 和；于是显然 $E$ 是 $G_k(k \geqslant 1)$ 与 $G_\infty$ 的 Hilbert 和. 可以证明(问题 5)，测度 $\mu_k$ 除等价外是确定的，于是 $S_k$ (因而 $M_k$) 除一个 $\mu_1$ 可忽略集外是确定的；$G_k = T(\varphi_{M_k})(E)$ 完全由 $T$ 确定. 我们称 $T$ 在 $G_k$ (对应地，$G_\infty$) 上的限制具有**重数** $k$ (**相应地，无穷重数**)；于是重数为 1 表示是单演的.

**(15.10.10)** 由于测度 $\mu_k$ 只是除等价外确定 (15.10.7)，所以可假定 $\mu_k = \varphi_{S_k} \cdot \mu_1$. 于是我们看到，除等价外，$\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 到可分 Hilbert 空间 $E$ 中的最一般的表示 $u \to T(u)$ 可描述如下：

考虑$K$上的正测度 $\nu$ 与 $K$ 的普遍可测子集的递减序列 $(S_j)_{1 \leqslant j < \omega}$，$\omega$ 是有限整数或 $+\infty$. 空间 $E$ 是 Hilbert 空间 $L^2_{\mathbf{C}}(K, \varphi_{S_k} \cdot \nu)(1 \leqslant k < \omega)$ 的 Hilbert 和；每一个这样的空间的关于 $T$ 都是稳定的，并且 $T(u)$ 在 $L^2_{\mathbf{C}}(K, \varphi_{S_k} \cdot \nu)$ 上的限制是乘以 $\tilde{u}$ 的乘法.

## 问　　题

1) 设 $K$ 是紧空间，$E$ 是 Hilbert 空间，$(x, y) \to \mu_{x,y}$ 是 $E \times E$ 到 $M_{\mathbf{C}}(K)$ 的连续半双线性映射，而其中 $M_{\mathbf{C}}(K)$ 是 $K$ 上的复测度所成的 Banach 空间. 试证对每个函数 $u \in \mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$，存在 $E$ 上的唯一连续算子 $T(u)$，使对 $E$ 中任何 $x, y$，有

$$(T(u) \cdot x | y) = \int u(t) d\mu_{x,y}(t).$$

为使 $u \to T(u)$ 是 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 $E$ 中的表示，必须且只须对 $E$ 中任何 $x, y$ 与 $u \in \mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$，有 $(x|y) = \int d\mu_{x,y}$，$\mu_{y,x} = \bar{\mu}_{x,y}$，$u \cdot \mu_{x,y} = \mu_{T(u) \cdot x, y}$；在最后一个关系式中，可以用条件 $u \in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 代替 $u \in \mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$.

2) a) 由问题 1 给出下述事实的新证明：$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 Hilbert 空间 $E$ 中的表示 $u \to T(u)$ 可以唯一地延拓为 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 $E$ 中的满足关系式 (15.10.4.1) 的表示 $u \to T(u)$. (为证明对 $\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(K)$ 中 $u$, $v$ 有 $T(uv) = T(u)T(v)$，可以分两步进行. 首先假定这两个函数之一为连续，并利用当 $u$ 为连续时的关系式

$\mu_{T(u),x,y} = \mu_{x,T(\bar{u}),y}$，然后证明这个关系式对 $u \in \mathscr{U}_C(K)$ 仍然成立.)

b) 试证，若连续算子 $V \in \mathscr{L}(E)$ 与每个 $T(u)$ 可交换(其中 $u \in \mathscr{C}_C(K)$)，则它也与每个 $T(v)$ 可交换(其中 $v \in \mathscr{U}_C(K)$).

c) 设 $E$ 是可分的，试证对于 $u \in \mathscr{U}_C(K)$，每个算子 $T(u)$ 是某个序列 $(T(v_n))$ 关于 $\mathscr{L}(E)$ 上的弱拓扑(12.15 问题 9)的极限，其中 $v_n \in \mathscr{C}_C(K)$；考虑逆命题(对于逆命题，利用 (15.10.6,(ii)) 与 b)).

3) 使用问题 1 中的记号，为使对于 $x \in E$ 与 $u \in \mathscr{U}_C(K)$ 有 $T(u) \cdot x = 0$，必须且只须 $u$ 关于所有测度 $\mu_{x,y}$ 是可忽略的，其中 $y$ 取遍 $E$ 的一个全子集. 为使 $\mathscr{C}_C(K)$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的映射 $u \to T(u)$ 是单射，必须且只须测度 $\mu_{x,y}$ 的支集的并在 $K$ 内是稠密的.

4) 采用问题 1 的记号，假定 $E$ 是可分的. 设 $(a_j)$ 是 $E$ 内的一个稠密序列，并令 $\nu_{ij} = |\mu_{a_i,a_j}|$，则存在 $K$ 上的正测度 $\nu$，使得关系式 $\nu(N) = 0$ 等价于关系"对任何 $i, j$，有 $\nu_{ij}(N) = 0$"(13.15.8). $\mathscr{U}_C(K)$ 中所有关于 $\nu$ 为等价的函数在 $T$ 下的象都相同；因而可以把 $T$ 看作 $L_C(\nu)$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的一个单射同态. 试证对一切函数 $u \in \mathscr{L}_C^\infty(\nu)$，都有 $N_\infty(u) \leqslant \|T(u)\|$(首先考虑 $u$ 是阶梯函数的情形). 因而 $T$ 是 $L_C^\infty(\nu)$ 到它在 $\mathscr{L}(E)$ 内的象上的双方连续映射.

5) 设在 (15.10.8) 的假定下，存在满足 (15.10.9) 的条件的两个序列 $(E_n, \mu_n)$，$(E'_n, \mu'_n)$.

a) 试证若对 $n \geqslant 2$ 有 $\mu_n = 0$，则对 $n \geqslant 2$ 也有 $\mu'_n = 0$(就是说，单演表示不可能有作为至少两个单演表示的和且满足 (15.10.9) 的典则分解). 为此注意，若 $a$ 是关于 $T$ 的全化向量，$a'_n$ 是 $a$ 在 $E'_n$ 上的投影，则若 $E'_n \neq 0$(也即若 $\mu'_n \neq 0$)，就有 $a'_n \neq 0$. 证明若对某个 $n \geqslant 2$ 有 $a'_n \neq 0$，就会存在属于 $\mathscr{U}_C(K)$ 的函数的序列 $(g_m)$，使得 $T(g_m) \cdot a'_1$ 趋于 0 而 $T(g_m) \cdot a'_n$ 趋于 $a'_n$，并证明这与 $\mu'_n$ 是以 $\mu'_1$ 为基的测度相矛盾.

b) 试证关系式 $\mu_1(N) = 0$ 等价于 $T(\varphi_N) = 0$，由此证明测度 $\mu_1$ 与 $\mu'_1$ 等价.

c) 试证若 $F_1$ 与 $F'_1$ 分别是 $E_1$ 与 $E'_1$ 在 $E$ 内的正交补空间，则 $F_1$ 与 $F'_1$ 具有相同的维数(有限或无穷). 为此假定 $\dim(F_1)$ 为有限. 于是对 $n \geqslant 2$，测度 $\mu_n$ 由 $K$ 的一个有限子集 $M$ 所支撑，且当 $n$ 充分大时，$\mu_n$ 为零. 又若 $\nu_1$ 是 $\mu_1$ 在 $M$ 上的限制，则对 $n \geqslant 2$，测度 $\mu_n$ 以 $\nu_1$ 为基. 由此推断 $T(\varphi_M)(E)$ 是有限维的，并且 $T$ 在 $T(\varphi_M)(E)$ 的正交补空间 $T(1 - \varphi_M)(E)$ 上的限制是单演的. 利用 a) 推断，对于 $n \geqslant 2$，测度 $\mu'_n$ 集中在 $M$ 上，因而

$$T(1 - \varphi_M)(E) = T(1 - \varphi_M)(E_1) = T(1 - \varphi_M)(E'_1).$$

又由于 b)，$\mu'_1$ 在 $M$ 上的限制应等价于 $\mu_1$，因而 $T(\varphi_M)(E_1)$ 与 $T(\varphi_M)(E'_1)$ 具有相同的有限的维数，由此即得所需的结论.

d) 借助 c) 证明，存在 $E$ 的酉变换 $U_1$，使得 $U_1(E_1)=E'_1$.

e) 用归纳法证明，存在 $E$ 的酉变换序列 $(U_n)$，使对 $1\leqslant k\leqslant n$，有 $U_n(E_k)=E'_k$，且 $U_{n+1}$ 与 $U_n$ 在 $E_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 上相同. 试证这个序列强收敛(12.15问题8)于酉变换 $U$，使对一切 $n$，有 $U(E_n)=E'_n$. 此外，证明对一切 $n$，$\mu'_n$ 都与 $\mu_n$ 等价.

6) 采用(15.10.9)的记号，设 $V$ 是属于 $\mathscr{L}(E)$ 的算子，它与所有 $T(u)$ 可交换(其中 $u\in\mathscr{K}_C(K)$).

a) 试证每个子空间 $G_k$ 在 $V$ 之下是稳定的，并且 $V$ 在 $G_k$ 上的限制与所有 $T(\varphi_{M_k}u)$ 可交换.

b) 除等价外，每个 $H_{ik}(1\leqslant i\leqslant k)$ 都可等同于 $L^2_C(\mu_k)$，并且 $T(u)$ 在 $H_{ik}$ 上的限制 $T_{ik}(u)$ 可等同于乘以 $u$ 的类的乘法 $M(u)$，其中 $u$ 在有界 $\mu_k$ 可测函数集内变动. $G_k$ 上的每个连续算子 $V$ 可写成形如

$$V=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1k}\\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ V_{k1} & V_{k2} & \cdots & V_{kk}\end{pmatrix}$$

的矩阵，这个矩阵作用在 $(L^2_C(\mu_k))^k$ 的向量 $x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$(把它看作一列矩阵)上，其中 $V_{ij}$ 是 $L^2_C(\mu_k)$ 上的连续算子. 在同样的记号下，$T(u)$ 在 $G_k$ 上的限制可等同于一个对角矩阵，它的对角线上的所有元都等于 $M(u)$.

由此推断，为使 $V$ 与所有 $T(u)$ 在 $G_k$ 上的限制都可交换，必须且只须

$$V_{ij}=M(v_{ij}),$$

其中 $v_{ij}$ 是属于 $\mathscr{K}_C(K)$ 的函数.

c) 推断 $E$ 的每个关于 $T$ 为稳定的子空间 $F$ 是关于 $T$ 为稳定的子空间 $F_k\subset G_k$ 的 Hilbert 和，并且每个 $F_k$ 可描述如下：考虑 $M_k$ 分为 $k$ 个 $\mu_k$ 可测集 $L_{ik}(1\leqslant i\leqslant k)$ 的一个划分，另一方面考虑 $k$ 阶可逆矩阵 $(w_{ij})$，其元 $w_{ij}$ 是属于 $\mathscr{K}_C(K)$ 的函数. 以 $F'_{ik}$ 记作为 $T(\varphi_{L_{ik}})(H_{ji})(1\leqslant j\leqslant i)$ 的和的子空间，以 $F_{ik}$ 记 $F'_{ik}$ 在 $G_k$ 上的可逆算子

$$\begin{pmatrix}M(w_{11}) & M(w_{12}) & \cdots & M(w_{1k})\\ M(w_{21}) & M(w_{22}) & \cdots & M(w_{2k})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ M(w_{k1}) & M(w_{k2}) & \cdots & M(w_{kk})\end{pmatrix}$$

下的象 于是 $F_k$ 是 $F_{ik}(1\leqslant i\leqslant k)$ 的和(考虑投影算子 $P_F$).

## 11. Hilbert 谱理论

**(15.11.1)** 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$N$ 是 $E$ 上的正规连续算子(15.4.11). 若 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}(E)$ 内由 $1_E$, $N$ 与 $N^*$ 所生成的(交换)子代数的闭包,则已知((15.4.13)与(15.4.15)),$\mathscr{A}$ 是可分星代数，并且映射 $\omega:\chi\to\chi(N)$ 是 $\boldsymbol{X}(\mathscr{A})$ 到 $\mathrm{Sp}(N)\subset\boldsymbol{C}$ 上的同胚($\mathrm{Sp}(N)$是 $N$ 关于 $\mathscr{L}(E)$ 的谱，即 $N$ 的如同(11.1)中所定义的谱). 于是由 Гельфанд-Наймарк 定理(15.4.14)得知，映射 $f\to\mathscr{G}^{-1}(f\circ\omega)$ 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$ 到 $E$ 中的忠实表示(15.5),因而可延拓为 $\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$ 到 $E$ 中的忠实表示,我们把这个表示记作 $f\to f(N)$(15.10.8). 这个记号是合理的，因为若 $f, g$ 是任意两个属于 $\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$ 的函数,则在代数 $\mathscr{L}(E)$ 内有

**(15.11.1.1)** $(f+g)(N)=f(N)+g(N),(fg)(N)=f(N)g(N),$

$$\bar{f}(N)=(f(N))^*,$$

**(15.11.1.2)** $$1_{\mathrm{Sp}(N)}(N)=N$$

(提醒一下，$1_{\mathrm{Sp}}(N)$ 是 $\mathrm{Sp}(N)$ 的恒等映射 $\zeta\to\zeta$). Гельфанд-Наймарк 定理还表明,对 $\mathrm{Sp}(N)$ 上的每个连续函数 $f$，有

**(15.11.1.3)** $$\|f(N)\|=\rho(f(N))=\sup_{\zeta\in\mathrm{Sp}(N)}|f(\zeta)|$$

(参阅(15.11.8.1)).

此外((15.10.3)与(15.10.8)),存在 $E\times E$ 到 $M_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$ 的连续半双线性映射 $(x,y)\to m_{x,y}$ (这里 $M_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$ 是 $\mathrm{Sp}(N)$ 上的复测度所成的 Banach 空间),使得 $m_{y,x}=\bar{m}_{x,y}$，并且对一切函数 $f\in\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$，有

**(15.11.2)** $$(f(N)\cdot x|y)=\int f(\zeta)dm_{x,y}(\zeta).$$

此外，由(15.11.1.3)推出，对 $\mathrm{Sp}(N)$ 上的一切连续函数 $f$，有 $|(f(N)\cdot x|y)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$,因而对 $E$ 中任何 $x, y$，有

**(15.11.2.1)** $$\|m_{x,y}\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

若 $f\in\mathscr{U}_C(\mathrm{Sp}(N))$ 是复值函数 $g$ 在 $\mathrm{Sp}(N)$ 上的限制，这里 $g$ 定义在 $\boldsymbol{C}$ 的包含 $\mathrm{Sp}(N)$ 的一个子集上，则我们写 $g(N)$ 以代替 $f(N)$.

**(15.11.3)** $N$ 称为**单正规算子**，如果 $\mathscr{C}_C(\mathrm{Sp}(N))$ 到 $E$ 中的表示 $f\to f(N)$ 是单演的. 根据 (15.5.6)，存在 $E$ 作为关于 $\mathscr{A}$ 为稳定（从而关于 $N$ 与 $N^*$ 为稳定(参阅问题 3))的闭子空间 $E_n$ 的 Hilbert 和的分解，使得若 $N$ 在 $E_n$ 上的限制 $N_n$ 是正规连续算子，则算子 $N_n$ 是单的. 于是空间 $E_n$ 等同于 $L^2_C(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$，其中 $\mu_n$ 是正测度，而 $N_n$ 等同于乘以 $L^2_C(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$ 中的函数 $1_C$ 的类的乘法 $M_\mu(1_C)$. 若 $a_n$ 是表示 $f\to f(N_n)$ 的一个全化向量，则可取 (15.10.3.3)

**(15.11.3.1)** $$\mu_n=m_{a_n,\varphi_n}.$$

采用这些记号，我们有

**(15.11.4)** $\mu_n$ 的支集是整个 $\mathrm{Sp}(N_n)$.

事实上，若 $\alpha\notin\mathrm{Supp}(\mu_n)$，则函数 $\zeta\to(\alpha-\zeta)^{-1}$ 在 $\mathrm{Supp}(\mu_n)$ 上连续且有界，它可以延拓为 $\mathrm{Sp}(N_n)$ 上的一个有界连续函数 $g$(4.5.1)；由于在 $\mathrm{Supp}(\mu_n)$ 上 $g(\zeta)(\alpha-\zeta)=1$，所以 $L^2_C(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$ 上由乘以函数 $\zeta\to\alpha-\zeta$ 的类的乘法所定义的连续算子是可逆的，而这蕴涵 $\alpha\notin\mathrm{Sp}(N_n)$（因为这个算子等同于 $\alpha 1_{E_n}-N_n$).

**(15.11.5)** $$\mathrm{Sp}(N)=\overline{\bigcup_n\mathrm{Sp}(N_n)}\ (\text{在 } \boldsymbol{C} \text{ 内的闭包}).$$

显然 $\mathrm{Sp}(N_n)\subset\mathrm{Sp}(N)$. 由于 $\mathrm{Sp}(N)$ 是闭的，所以，它包含这些 $\mathrm{Sp}(N_n)$ 的并的闭包. 另一方面，若 $\alpha$ 不属于这个闭包，则存在 $r>0$，使对任何 $n$ 与 $\zeta\in\mathrm{Sp}(N_n)$，都有 $|\alpha-\zeta|\geqslant r$；由此推出 (15.11.1.3) $\|(\alpha 1_{E_n}-N_n)^{-1}\|\leqslant 1/r$，因而 (15.10.8.1) 得知 $(\alpha 1_{E_n}-N_n)^{-1}$ 是 $E$ 上的一个连续算子的限制，这个连续算子就是 $\alpha 1_E-N$ 的逆算子.

现在注意，对每个函数 $f\in\mathscr{U}_C(\mathrm{Sp}(N))$，有 $f(N_n)=f(N)|E_n$. 事实上，当 $f$ 是 $\zeta$ 与 $\bar\zeta$ 的多项式时，这是显然的 (15.11.1.1)；对于 $f\in\mathscr{C}_C(\mathrm{Sp}(N))$，所述论断可由 Stone-Weierstrass 定理 (7.3.1)

与 (15.11.1.3) 得到；而对于一般情形可由 (15.11.2) 得到。

我们即将看到，对$N$的研究可以归结为对 $N_n$ 的研究。例如寻求$N$的特征向量；显然，为使 $x$ 是$N$的特征向量，必须且只须它在每个 $E_n$ 上的投影 $x_n$ 或者是零，或者是 $N_n$ 关于某个与 $n$ 无关的特征值的特征向量。于是我们有：

**(15.11.6)** 为使数 $\alpha\in \mathrm{Sp}(N_n)$ 是 $N_n$ 的特征值，必须且只须 $\mu_n(\{\alpha\})\neq 0$；此时对应的特征向量是属于 $E_n$ 在投影算子 $\varphi\{\alpha\}(N_n)$ 下的象的那些向量，而这个象则是一维子空间。

事实上，对于 $N_n$ 的特征值 $\alpha$，设$F$是 $\alpha 1_{E_n}-N_n$ 的核。由假定，子空间$F$是闭的与非零的；且在 $N_n^*$ 之下也是稳定的，因为 $N_n\cdot(N_n^*\cdot x)=N_n^*\cdot(N_n\cdot x)=\alpha N_n^*\cdot x$. 因而$F$关于由 $N_n$ 与 $N_n^*$ 所生成的代数是稳定的。若使 $N_n$ 等同于乘以 $L_{\mathbf{C}}^2(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$ 中的 $1_{\mathbf{C}}$ 类的乘法，则$F$等同于形如 $L_{\mathbf{C}}^2(\mathrm{Sp}(N_n),\varphi_M\cdot\mu_n)$的子空间，其中$M$是使得 $\mu_n(M)\neq 0$ 的普遍可测集 (15.10.6). 我们来证明测度 $\nu=\varphi_M\cdot\mu_n$ 的支集是单点集。否则，在 $\mathrm{Sp}(N_n)$内就会存在两个没有公共点的闭集 $B$, $C$，使得 $\nu(B\cap M)\neq 0,\nu(C\cap M)\neq 0$. 函数 $\zeta\varphi_{B\cap M}(\zeta)$ (相应地，$\zeta\varphi_{C\cap M}(\zeta)$) 就(关于 $\nu$) 几乎处处等于 $\alpha\varphi_{B\cap M}(\zeta)$(相应地，$\alpha\varphi_{C\cap M}(\zeta)$)，换言之，在 $B\cap M$ 与 $C\cap M$ 内几乎处处有 $\zeta=\alpha$，而这是不可能的，因为 $B\cap C=\varnothing$. 于是我们可以限于 $M=\{\beta\}$ 的情形；而显然此时 $L_{\mathbf{C}}^2(\mathrm{Sp}(N_n),\varphi_M\cdot\mu_n)$ 是一维的，并且 $N_n$ 在这个空间上的限制是比例为 $\beta$ 的相似变换。

若 $\alpha\in \mathrm{Sp}(N)$ 是$N$的特征值，则使得 $\alpha$ 是 $N_n$ 的特征值的整数 $n$ 所成的集 $J$ 是非空的。若 $D_n$ 是 $E_n$ 内由 $N_n$ 的对应于特征值 $\alpha$ 的特征向量所生成的一维子空间，则$N$的对应于 $\alpha$ 的特征子空间 $E(\alpha;N)$(11.1) 是一维子空间 $D_n(n\in J)$ 的 Hilbert 和。若 $J$ 为有限集，则 $J$ 的元素的个数 ($E(\alpha;N)$ 的维数)称为 $\alpha$ 的**重数**；若 $J$ 是无穷集，则称 $\alpha$ 是**无穷重数**的。易于验证这个重数的概念与 (15.10.9)中引进的表示的重数的概念是一致的。由前面的叙述也推出，若 $\alpha$, $\beta$ 是$N$的两个不同的特征值，则特征子空间 $E(\alpha;N)$与 $E(\beta;N)$ 正交。

**(15.11.7)** 为使$N$是自伴(相应地,酉)的,必须且只须 $\mathrm{Sp}(N)\subset \boldsymbol{R}$ (相应地, $\mathrm{Sp}(N)\subset \boldsymbol{U}$). 若$H$是自伴的,则

**(15.11.7.1)**
$$\inf(\mathrm{Sp}(H))=\inf_{\|x\|=1}(H\cdot x|x),$$
$$\sup(\mathrm{Sp}(H))=\sup_{\|x\|=1}(H\cdot x|x);$$

**(15.11.7.2)**
$$\|H\|=\sup_{\|x\|=1}|(H\cdot x|x)|.$$

对于第一个论断,我们已经证明过所述条件是必要的(15.4.12). 为证明它是充分的,(根据 (15.11.5)) 只须证明它关于 $N_n$ 成立;而这是简单的,因为当 $N_n$ 等同于乘以 $L^2_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$ 中 $1_{\boldsymbol{C}}$ 类的乘法时, $N_n^*$ 等同于乘以函数 $\zeta\to\bar{\zeta}$ 的类的乘法. 为证明 (15.11.7.1),只须证明,为使自伴算子$H$满足: 对一切 $x\in E$,有 $(H\cdot x|x)\geqslant 0$ (在这种情形,我们称$H$是**正自伴算子**并记作 $H\geqslant 0$),必须且只须 $\mathrm{Sp}(H)\subset\boldsymbol{R}_+$. 考虑到 (15.11.5) 与关系式

**(15.11.7.3)**
$$(H\cdot x|x)=\sum_n(H_n\cdot x_n|x_n)$$

(这里的记号类似于 (15.11.3) 中的记号),可以归结为对单自伴算子 $H_n$ 证明这一论断. 如果使 $H_n$ 等同于乘以 $L^2_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(H_n),\mu_n)$ 中 $1_{\boldsymbol{C}}$ 类的乘法,则问题归结为证明,对 $\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(H_n))$ 中的一切非负函数 $f$ 有 $\int\zeta f(\zeta)d\mu_n(\zeta)\geqslant 0$ 成立的必要充分条件是 $\mathrm{Sp}(H_n)\subset\boldsymbol{R}_+$. 现在,若$M$是 $\mathrm{Sp}(H_n)$ 与 $\boldsymbol{R}_+$ 的余集 $]-\infty,0[$ 的交,则关系$M\neq\varnothing$ 蕴涵 $\mu_n(M)>0$(15.11.4). 因为 $]-\infty,0[$ 是区间 $]-\infty,-(1/m)]$ 的并,所以存在 $m>0$,使得

$$\mu_n(M\cap]-\infty,-(1/m)])=\alpha>0.$$

由此推出 $\int\zeta\varphi_M(\zeta)d\mu_n(\zeta)\leqslant-(\alpha/m)<0$, 与假定矛盾. 最后,关系式 (15.11.7.2) 由 (15.11.7.1)与(15.4.14.1) 推出,因为$H$的谱半径等于 $|\inf(\mathrm{Sp}(H))|$, $|\sup(\mathrm{Sp}(H))|$ 中最大的数.

**(15.11.8)** (i) 对每个函数 $f\in\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N))$, $f(N)$ 的谱包含在 $\overline{f(\mathrm{Sp}(N))}$ ($\boldsymbol{C}$ 中的闭包)内,且有

**(15.11.8.1)** $$\|f(N)\| \leqslant \sup_{\zeta \in \mathrm{Sp}(N)} |f(\zeta)|.$$

对$N$的每个特征值$\alpha$，$f(\alpha)$是$f(N)$的特征值且特征子空间$E(\alpha; N)$包含在$E(f(\alpha); f(N))$内。

若$f$是连续的，则$\mathrm{Sp}(f(N)) = f(\mathrm{Sp}(N))$.

(ii) 更精确地说（采用(15.11.3)中的记号），对于函数$f \in \mathscr{U}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N_n))$，$f(N_n)$的谱由使得$\operatorname*{ess.inf}_{\zeta \in \mathrm{Sp}(N_n)} |\beta - f(\zeta)| = 0$（相对于测度$\mu_n$）的数$\beta \in \mathbf{C}$所组成。

(iii) 若$f \in \mathscr{U}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N))$且若$g$是$\overline{f(\mathrm{Sp}(N))}$到$\mathbf{C}$的连续映射，则$g(f(N)) = (g \circ f)(N)$.

(iv) 若属于$\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}N))$的函数的序列$(f_k)$一致有界且简单收敛于$f$，则对每个$x \in E$，序列$(f_k(N) \cdot x)$在$E$内收敛于$f(N) \cdot x$.

先证明(ii). 我们已经看到，$f(N_n)$等同于乘以$L^2_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N_n), \mu_n)$中的函数$f$的类的乘法；于是$\beta \notin \mathrm{Sp}(f(N_n))$意味着存在数$a > 0$，使对一切函数$u \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N_n), \mu_n)$，有

$$N_2((\beta - f)u) \geqslant a \cdot N_2(u)$$

(5.5.1). 若$\operatorname*{ess.inf}_{\zeta \in \mathrm{Sp}(N_n)} |\beta - f(\zeta)| > 0$，则根据平均不等式(13.12.2)，可取$a$等于这个数，从而$\beta \notin \mathrm{Sp}(f(N_n))$. 反之，若$\operatorname*{ess.inf}_{\zeta \in \mathrm{Sp}(N_n)} |\beta - f(\zeta)| = 0$，则对每个$\varepsilon > 0$，使得$|\beta - f(\zeta)| \leqslant \varepsilon$的$\zeta \in \mathrm{Sp}(N_n)$所成的集$M$不是$\mu_n$可忽略的，并有$N_2((\beta - f)\varphi_M) \leqslant \varepsilon N_2(\varphi_M)$，从而$\beta \in \mathrm{Sp}(f(N_n))$.

由(ii)得到$\mathrm{Sp}(f(N_n)) \subset \overline{f(\mathrm{Sp}(N_n))}$. 若$f$还是连续的，则$f(\mathrm{Sp}(N_n))$是紧的(3.17.9)，且对每个$\beta = f(\alpha)$（其中$\alpha \in \mathrm{Sp}(N_n)$），$\alpha$的每个紧邻域对于$\mu_n$而言都具有大于零的测度(15.11.4)，因而$f(\mathrm{Sp}(N_n)) = \mathrm{Sp}(f(N_n))$. 为证明一般地有$\mathrm{Sp}(f(N)) \subset \overline{f(\mathrm{Sp}(N))}$，且当$f$连续时有$\mathrm{Sp}(f(N)) = f(\mathrm{Sp}(N))$，只须利用(15.11.5)与当$f$连续时$f(\mathrm{Sp}(N))$为紧集这一事实。最后关于特征值的论断是显然的，仍然把它归结到单算子的情形并利用(15.11.6).

为证明(iii)，先注意 $g\circ f$ 是 $\mathrm{Sp}(N)$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的普遍可测映射 (13.9.6). 关系

$$g(f(N))=(g\circ f)(N)$$

从 $g(\zeta)=\zeta^p\bar{\zeta}^q$ ($p$, $q$ 是非负整数) 情形下的 (15.11.1) 得到. 现在，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\zeta$ 与 $\bar{\zeta}$ 的多项式 $h$，使在 $\overline{f(\mathrm{Sp}(N))}$ 上有 $|g(\zeta)-h(\zeta)|\leqslant\varepsilon$(7.3.2). 由于在 $\mathrm{Sp}(N)$ 上 $|g(f(\zeta))-h(f(\zeta))|\leqslant\varepsilon$，故由 (15.11.8.1) 推出 $\|g(f(N))-h(f(N))\|\leqslant\varepsilon$ 与 $\|(g\circ f)(N)-(h\circ f)(N)\|\leqslant\varepsilon$；因为 $\varepsilon$ 是任意的，所以由此即得所需的结论.

最后，为证明 (iv)，注意根据 (15.11.8.1)，范数序列 $(\|f_k(N)\|)$ 是有界的，因此只须证明，对 $E$ 的一个全子集中的每个点 $x$，序列 $(f_k(N)\cdot x)$ 收敛 ((12.15.7.1) 与 (7.5.5)). 采用 (15.11.3) 中的记号，可以限于对每个 $N_n$ 证明所述论断，而由于 $f_k(N_n)$ 等同于乘以 $f_k$ 在 $\mathrm{Sp}(N_n)$ 上的限制的类 (它属于空间 $L^2_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Sp}(N_n),\mu_n)$) 的乘法，故所需的结论可由 (13.11.4,(iii)) 推出.

**(15.11.9)** 对于 $\mathrm{Sp}(N)$ 的每个普遍可测子集 $M$，设 $E(M)$ 是 $E$ 在正交投影算子 $P_{E(M)}=\varphi_M(N)$ 下的象，它是 $E$ 的闭子空间，并且在 $N$ 与 $N^*$ 下是稳定的 (15.10.6)；于是 $N$ 在 $E(M)$ 上的限制的谱包含在 $\overline{M}$($\boldsymbol{C}$ 中的闭包)内.

对每个 $n$，设 $E_n(M)$ 是 $E_n$ 在正交投影算子 $\varphi_M(N_n)$ 下的象. 显然 $E(M)$ 是这些 $E_n(M)$ 的 Hilbert 和，因而 (15.11.5) 可以限于对每个 $N_n$ 证明所述的命题. 若 $\alpha\notin\overline{M}$，则存在在 $\mathrm{Sp}(N_n)$ 上连续的函数 $g$，使在 $\mathrm{Sp}(N_n)$ 上有 $g(\zeta)(\alpha-\zeta)\varphi_M(\zeta)=\varphi_M(\zeta)$(4.5.1)，由此推出，若 $N'_n$ 是 $N_n$ 在 $E_n(M)$ 上的限制，则 $\alpha 1_{E_n(M)}-N'_n$ 具有逆算子，它就等于 $g(N_n)$ 在 $E_n(M)$ 上的限制.

**(15.11.10)** 附注. 注意，在 (15.11.8) 中证明 (ii) 时的推理表明：对 $\boldsymbol{C}$ 上的每个具有紧支集 $K$ 的正测度 $\mu$，乘以 $L^2_{\boldsymbol{C}}(K,\mu)$ 中的 $1_{\boldsymbol{C}}$ 类的乘法是一个正规连续算子 $N$，满足 $\mathrm{Sp}(N)=K$((15.11.3) 的逆命题).

**(15.11.11)** 设 $f$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的闭子集 $M$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的包含 $\mathrm{Sp}(N)$ 的闭子集 $N$

上的同胚，则在 $E$ 上存在唯一的正规连续算子 $N'$，使得它的谱包含在$M$内且满足

$$f(N') = N.$$

事实上，设 $h$ 是 $N$ 到 $M$ 上的同胚，使 $h$ 是 $f$ 的逆，则根据(15.11.8，(iii))，应有 $N' = h(f(N')) = h(N)$；反之，由于 $h(N)$ 的谱是 $h(\mathrm{Sp}(N)) \subset M$，所以 $f(h(N)) = N$. 所述命题得证.

特别有：

**(15.11.12)** 对每个正自伴算子 $H$，存在唯一的正自伴算子 $H'$，使得 $H'^2 = H$.

只须应用(15.11.11)，使其中 $M = N = \boldsymbol{R}_+$，$f(\zeta) = \zeta^2$.

我们把(15.11.12)中所定义的唯一的正自伴算子 $H'$ 记作$H^{\frac{1}{2}}$.

**(15.11.13)** 例. 设 $E$ 是 Hilbert 空间 $\boldsymbol{L}^2_C(\boldsymbol{R};\lambda)$，其中 $\lambda$ 是 Lebesgue 测度. 函数 $f(t) = e^{-|t|}$ 是 $\lambda$ 可积的，卷积 $g \to f * g$ 通过等价类定义了 $E$ 上的一个连续算子 $H$(14.10.6)，其范数为 $N_1(f) = 2$. 易证(如同(11.6.1))$H$是自伴的. 可以直接证明(问题 5)$\boldsymbol{R}$ 的区间[0, 2]等于 $\mathrm{Sp}(H)$；这也可从调和分析（第二十二章）的一般定理得到.

注意对每个 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，函数 $g_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$ 使得卷积 $f * g_\alpha$ 有定义且等于 $2g_\alpha/(1+\alpha^2)$；然而不能说 $g_\alpha$ 是$H$的“特征函数”，因为它不属于 $\mathscr{L}^2_C(\boldsymbol{R},\lambda)$. 我们将在第二十三章中得到这种现象的推广与解释.

**(15.11.14)** 其谱不含有不等于 0 的非孤立点的正规算子的情形. 在这种情形(即紧正规算子的情形(11.4.1))，设$(\lambda_n)$是 $\mathrm{Sp}(N)$ 中异于 0 的点的(有限或无穷)序列；这些$\lambda_n$都是$N$的特征值(15.11.6)，对应 $\lambda_n$ 的特征子空间 $E(\lambda_n;\ N)$ 正是(15.11.9)中所定义的空间 $E(\{\lambda_n\})$，而且这些闭子空间是两两正交的. 此外还有 $E(\{0\}) = \mathrm{Ker}(N)$，$N$ 在这个子空间上的限制的谱仅由 0 构成(15.11.9)，最后，$E$ 是 $E(\{0\})$ 与所有 $E(\{\lambda_n\})$ 的 Hilbert 和. 事实上，只须把(15.11.8，(iv))应用于函数序列 $(f_n)$，这里对于 $\zeta = \lambda_k$，$k \leqslant n$，有 $f_n(\zeta) = 1$，而对于 $\zeta = \lambda_k$，$k > n$，有 $f_n(\zeta) = 0$，并且 $f_n(0) = 1$；

特别，这证明了每个 $x\in E$ 是它在 $E(\{0\})$ 上的投影与它在 $E(\{\lambda_k\})(k\leqslant n)$ 上的投影的和的极限，由此即得我们的论断(6.4)。

特别，若 $E$ 是有限维的，则 $E$ 上的正规算子可以定义为这样的算子，它对于一个适当的正规正交基的矩阵是对角矩阵。

## 问　　题

1）试证，为使 Hilbert 空间 $E$ 上的连续算子 $N$ 是正规的，必须且只须对一切 $x\in E$，有 $\|N\cdot x\|=\|N^*\cdot x\|$。

2）设 $N$ 是 Hilbert 空间 $E$ 上的正规连续算子。

a）对每个 $x\in E$，考虑这样的开集 $W\subset \mathbf{C}$，使得存在 $W$ 到 $E$ 的连续映射 $f_W$，满足：对一切 $\lambda\in W$，有 $(\lambda\cdot 1-N)\cdot f_W(\lambda)=x$。试证存在具有这样性质的最大开集 $\Omega(x)$，并且所有函数 $f_W$ 是 $\Omega(x)$ 到 $E$ 的唯一的一个在 $\Omega(x)$ 内为解析的映射 $f$ 的限制。（借助(15.5.6)归结为正规算子 $N$ 是单算子的情形。在这种情形，$E$ 等同于 $L^2_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N),\mu)$，$x$ 等同于某个函数 $g$ 的类，而 $\Omega(x)$ 是使得函数 $\zeta\to(\lambda-\zeta)^{-1}g(\zeta)$ 属于 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N),\mu)$ 的 $\lambda\in\mathbf{C}$ 所成的集的内部。）

b）令 $\Phi(x)=\mathrm{Sp}(N)-\Omega(x)$，试证对 $\mathrm{Sp}(N)$ 的每个闭子集 $M$，空间 $E(M)=\varphi_M(N)(E)$ 是使得 $\Phi(x)\subset M$ 的 $x\in E$ 的集（还是归结为单正规算子的情形）。

c）试证与 $N$ 可交换的连续算子 $V\in\mathscr{L}(E)$ 也与所有算子 $g(N)$ 可交换，这里 $g\in\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}(N))$；特别 $V$ 也与 $N^*$ 可交换（**Fuglede 定理**）。（考虑 a）中定义的函数 $f$ 与函数 $\lambda\to V\cdot f(\lambda)$，先证明对一切 $x\in E$，有 $\Omega(V\cdot x)\supset\Omega(x)$。利用 b）推断，对 $E$ 的每个闭子集 $M$，$V$ 与投影算子 $P_{E(M)}=\varphi_M(N)$ 可交换，由此推出 $V$ 与所有算子 $g(N)$ 可交换，这里 $g$ 在 $\mathrm{Sp}(N)$ 上连续。）

d）由 c）推断，若 $N_1$ 与 $N_2$ 是两个可交换的正规算子，则 $N_1N_2$ 是正规的。

3）设 $\mu$ 是群 $U:|z|=1$ 上的规范化 Haar 测度 $(d\mu(\theta)=(1/2\pi)d\theta)$，$E=L^2_{\mathbf{C}}(\mu)$，则算子 $M_\mu(1_{\mathbf{C}})=U$ 是 $E$ 上的酉算子。$E$ 的每个关于 $U$ 为稳定的闭子空间或者具有 $\varphi_M(U)(E)$ 的形式，其中 $M\subset U$ 具有小于 1 的测度，或者具有 $\bar{q}\cdot H^2(\mu)$ 的形式，其中 $|q|=1$（15.3 问题 15）（**Beurling 定理**）。由此推断，存在 $E$ 的闭子空间 $F$，它在 $U$ 下稳定但在 $U^*=U^{-1}$ 下不稳定，并且使得正交投影算子 $P_F$ 与 $U$ 不可交换（比较(15.5.3)）。

4) 不用 Riesz 定理(11.4)证明;除点 0 外，正规紧算子的谱只有孤立点(归结为单正规算子的情形).

5) 试证 (15.11.13) 中考虑的自伴算子的谱是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0, 2]$. (注意 $\|H\|\leqslant 2$; 为证明 $H\geqslant 0$,即对一切函数 $u\in E$ 有 $(H\cdot u|u)\geqslant 0$，首先考虑函数 $u(t)=\int_a^b e^{itx}dx$ 以及它们的线性组合. 为证明每个形如 $2/(1+\alpha^2)$的数属于$H$的谱,用函数 $u_n g_\alpha$ 逼近 $g_\alpha$，其中 $u_n\in\mathscr{L}^2$ 且是非负的，序列 $(u_n)$ 递增且趋于 1.)

6) 设$E$是可分 Hilbert 空间,$T$是$E$上的连续算子，$R$与$L$是正 Hermite 算子,它们分别是$T^*T$与$TT^*$的平方根(15.11.12);记 $R=\text{abs}(T)$,称它为$T$的"绝对值";我们有 $L=\text{abs}(T^*)$.

a) 试证 $\text{Ker}(T)=\text{Ker}(R)$, $\overline{L(E)}=\overline{T(E)}$. 存在 $R(E)$ 到 $T(E)$ 上的唯一的等距 $V$，使得 $T=VR$. 如果把$V$连续延拓到 $\overline{R(E)}$ 上,然后通过在$R(E)$的正交补空间上令 $U(x)=0$ 把$V$延拓为一个算子 $U\in\mathscr{L}(E)$，则仍有 $T=UR$ ($T$ 的**极分解**)，还有 $R=U^*T=U^*UR=RU^*U$ 与 $L=URU^*$, $T=LU^*$.

b) 为使$T$是可逆的，必须且只须 $R=\text{abs}(T)$ 与 $L=\text{abs}(T^*)$ 都是可逆的(为证明所述条件是必要的,考虑$R$与$L$的谱;为证明它是充分的，利用闭图象定理.)

c) 为使$N$是正规的，必须且只须 $\text{abs}(N)=\text{abs}(N^*)$;此时存在酉算子$W$，使得 $N=W\cdot\text{abs}(N)$.

7) 可分 Hilbert 空间上的紧算子$T$称为**核子算子**,如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<+\infty$，这里记 $(\lambda_n)$ 为 $\text{abs}(T)$ 的特征值的完全序列(11.5 问题 8).

a) 利用极分解(问题 6)证明，两个 Hilbert-Schmidt 算子 $S_1$, $S_2$ 的积是核子的;反之,若$T$是核子的,则 $\text{abs}(T)^{1/2}$ 是自伴 Hilbert-Schmidt 算子,并且$T$是两个 Hilbert-Schmidt 算子的积. 因而 $T^*$ 也是核子的. 于是对$E$上的每个连续算子 $A$, $AT$ 与 $TA$ 也是核子的.

b) 设$A$与$B$是两个 Hilbert-Schmidt 算子,$(e_n)$ 是$E$的一个 Hilbert 基，则级数 $\sum_n(AB\cdot e_n|e_n)$ 与 $\sum_n(BA\cdot e_n|e_n)$ 绝对收敛并且两者相等(写 $B\cdot e_n=\sum_m(B\cdot e_n|e_m)e_m$);因而对每个酉算子$U$与每个核子算子$T$，有

$$\sum_n(U^{-1}TU\cdot e_n|e_n)=\sum_n(T\cdot e_n|e_n).$$

由此推断，对于核子算子 $T$，和 $\sum_n (T\cdot e_n|e_n)$ 不依赖于所考虑的 Hilbert 基 $(e_n)$；这个数称为 $T$ 的迹，记作 $\mathrm{Tr}(T)$. 设 $A$, $B$ 是两个 Hilbert-Schmidt 算子，则 $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=(A|B^*)$.

c) 若 $T$ 是核子的，试证

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{abs}(T))=\sup\left(\sum_n |(T\cdot a_n|b_n)|\right),$$

其中上确界是对 $(a_n)$, $(b_n)$ 取遍 $E$ 的 Hilbert 基所成的集取的（利用 $T$ 的极分解），并证明，若令 $\|T\|_1=\mathrm{Tr}(\mathrm{abs}(T))$，则 $E$ 上的核子算子所成的集 $\mathscr{L}_1(E)$ 是向量空间，而 $\|T\|_1$ 是 $\mathscr{L}_1(E)$ 上的一个范数，满足 $\|T\|_2\leqslant\|T\|_1$.

d) 试证，若 $(T_\nu)$ 是 $E$ 上的核子（相应地，Hilbert-Schmidt）算子序列，它弱收敛（12.15 问题 9）于算子 $T$ 并且范数序列 $(\|T_\nu\|_1)$（相应地，$(\|T_\nu\|_2)$）是有界的，则 $T$ 是核子算子（相应地，Hilbert-Schmidt 算子）.

e) 试证空间 $\mathscr{L}_1(E)$ 关于范数 $\|T\|_1$ 是 Banach 空间.

f) 设 $(\lambda_n)$ 是核子算子 $T$ 的特征值序列，其中每个特征值按照它的代数重数（11.4.1）写出，试证 $\sum_n |\lambda_n|\leqslant\|T\|_1$.（对每个整数 $p$，考虑 $p$ 个空间 $N(\mu_k;T)$($k\leqslant p$) 的和，其中 $\mu_1,\cdots,\mu_p$ 是序列 $(\lambda_n)$ 中前面 $p$ 个互不相同的特征值；取 $V$ 的一个正规正交基，使得 $T|V$ 对于这个基的矩阵是三角形的，并利用 c).）由此推断，若 $T$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，$(\lambda_n)$ 是 $T$ 的特征值序列，其中每个特征值都按照它的代数重数写出，则 $\sum_n |\lambda_n|^2\leqslant\|T\|_2^2$.

g) 试证，若连续算子 $T\in\mathscr{L}(E)$ 满足：对 $E$ 的每对 Hilbert 基 $(a_n)$, $(b_n)$，级数 $\sum_n (T\cdot a_n|b_n)$ 收敛，则 $T$ 是核子算子（写 $T=LU^*$（问题 6a）），并适当选择 $(a_n)$ 与 $(b_n)$，证明 $L^{1/2}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子.）

h) 为使连续算子 $T\in\mathscr{L}(E)$ 是核子的，必须且只须至少对 $E$ 的一个 Hilbert 基 $(e_n)$，级数 $\sum_n \|T\cdot e_n\|$ 收敛.（写 $T=UR$（问题 6a）），注意 $(R\cdot e_n|e_n)\leqslant\|T\cdot e_n\|$；这表明所述条件是充分的. 反之，取由 $R$ 的特征向量组成的基作为 $(e_n)$.）

i) 在空间 $E=L^2_C$ 内，设 $(e_n)$ 是典则 Hilbert 基，$a=\sum_n (1/n)e_n$；若 $F$ 是一维子空间 $\mathbf{C}\cdot a$，则投影算子 $P_F$ 是核子算子，然而级数 $\sum_n \|P_F\cdot e_n\|$

却不收敛.

8) 试证，对可分 Hilbert 空间 $E$ 上的每个正规算子 $N$，存在正规算子 $N'$，使得 $N'^2 = N$；给出存在无穷多个这样的算子的例子.

9) 设 $T$ 是可分 Hilbert 空间 $E$ 上的连续算子.

a) 为使 $T$ 是代数 $\mathscr{L}(E)$ 中的左拓扑零因子(15.2 问题 3)，必须且只须存在 $E$ 中的序列 $(x_n)$，使对一切 $n$ 有 $\|x_n\| = 1$，并且 $(T \cdot x_n)$ 趋于 0. 设 $\zeta \in \boldsymbol{C}$ 使得 $T - \zeta \cdot I$ 是 $\mathscr{L}(E)$ 中的左拓扑零因子，这些 $\zeta$ 形成所谓**逼近点谱** $\mathrm{Spa}(T)$；于是 $\zeta \notin \mathrm{Spa}(T)$ 意味着 $T - \zeta \cdot I$ 是单射并且是 $E$ 到 $E$ 的一个闭子空间上的同胚. 试证 $\mathrm{Spa}(T)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 内是闭的，并且形成 $\mathrm{Sp}(T)$ 的边界. 设 $P$ 是多项式，证明 $\mathrm{Spa}(P(T)) = P(\mathrm{Spa}(T))$.

b) 设 $T \in \mathscr{L}(E)$；对于每个 $\lambda \in \boldsymbol{C}$，以 $m(T, \lambda)$ 记 $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda \cdot I)$ 的维数(整数或 $+\infty$)，它也等于 $\overline{(T - \lambda I)(E)}$ 的余维数. 设 $T_0 \in \mathscr{L}(E)$，$\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ 不属于 $\mathrm{Spa}(T_0)$，试证存在数 $\varepsilon > 0$，使得如果 $\|T - T_0\| \leqslant \varepsilon$ 且 $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$，则有 $m(T, \lambda) = m(T_0, \lambda_0)$.

c) 由 b)推断，若 $K$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的紧子集，它与 $\mathrm{Spa}(T_0)$ 不相交，则存在 $\varepsilon > 0$，使对一切 $\lambda \in K$ 与满足 $\|T - T_0\| \leqslant \varepsilon$ 的 $T \in \mathscr{L}(E)$，有 $m(T, \lambda) = m(T_0, \lambda)$.

d) 设 $T \in \mathscr{L}(E)$，$K$ 是 $\mathrm{Sp}(T) - \mathrm{Spa}(T)$ 的紧子集，具有下列性质：1°$0 \notin K$；2°$K$ 在映射 $\zeta \to \zeta^2$ 下的逆象 $K'$ 是连通的；3°对一切 $\lambda \in K$ 有 $m(T, \lambda) = 1$. 在这些条件下，不存在算子 $T' \in \mathscr{L}(E)$，满足 $T'^2 = T$.（在相反的假定下，设 $L = K' \cap \mathrm{Sp}(T')$，则有 $L \subset \mathrm{Sp}(T') - \mathrm{Spa}(T')$ 且 $L \cup (-L) = K'$. 证明若 $\lambda \in L$，则必有 $-\lambda \notin L$，因而

$$L \cap (-L) = \phi,$$

这是矛盾的. 注意若 $\lambda \in L$，则 $\bar{\lambda}^2$ 是 $T^*$ 的特征值，且 $m(T, \bar{\lambda}^2) = 1$.）进而证明，若 $T$ 是可逆的，则存在 $\varepsilon > 0$，使得每个满足 $\|T_1 - T\| \leqslant \varepsilon$ 的算子 $T_1 \in \mathscr{L}(E)$ 是可逆的，然而不存在算子 $T' \in \mathscr{L}(E)$，使得 $T'^2 = T_1$（利用 c)）.

10) 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的有界开子集，$H$ 是由在 $\Omega$ 内解析且满足

$$\iint_{\Omega} |f(x+iy)|^2 dxdy < +\infty$$

的函数组成的 Hilbert 空间(9.13 的问题). 设 $T$ 是这样的算子，它使每个函数 $f \in H$ 对应于函数 $\zeta \to \zeta f(\zeta)$. 试证对每个 $\lambda \in \Omega$ 与每个使得 $g(\lambda) = 0$ 的函数 $g \in H$，存在唯一的函数 $f \in H$，使得 $(T - \lambda I) \cdot f = g$；此外，若圆盘 $|\zeta - \lambda| < \delta$ 包含在 $\Omega$ 内，则 $\|g\|^2 \geqslant (\delta^2/2)\|f\|^2$. 由此推断 $\mathrm{Sp}(T)$ 是 $\Omega$ 在 $\boldsymbol{C}$ 内的闭包 $\bar{\Omega}$，且 $\Omega$ 包含在 $\mathrm{Sp}(T) - \mathrm{Spa}(T)$ 内.

从这些结果推断，若取 $\Omega$ 为开圆环 $r_1 < |z| < r_2$，其中 $r_1 > 0$，则算子 $T$ 是

可逆的并且在 $\mathscr{L}(H)$ 中不具有"平方根"(参阅问题 9).

11) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$K$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个紧子集，$(x, y) \to m_{x,y}$ 是 $E \times E$ 到 $M_{\mathbf{C}}(K)$ 的一个连续半双线性映射，这里 $M_{\mathbf{C}}(K)$ 是 $K$ 上的复测度组成的空间. 假定 $(x|y) = \int dm_{x,y}(\zeta)$，$\overline{m}_{x,y} = m_{y,x}$ 且对任何 $x \in E$，测度 $m_{x,x}$ 都是正的. 设 $T$ 是 $E$ 上的连续算子，使对 $E$ 中的 $x, y$，有

$$(T \cdot x|y) = \int \zeta dm_{x,y}(\zeta);$$

对每个函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$，以 $f(T)$ 记由 $(f(T) \cdot x|y) = \int f(\zeta) dm_{x,y}(\zeta) (x, y \in E)$ 所定义的算子 (15.10 问题 1)，则 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的映射 $f \to f(T)$ 是线性的，并且满足 $T^* = c(T)$，其中 $c(\zeta) = \bar{\zeta}$，但这个映射一般不是代数同态. 试证存在可分 Hilbert 空间 $H$，它是 $E$ 与另一 Hilbert 空间 $F$ 的 Hilbert 和，且存在 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(K)$ 到 $\mathscr{L}(H)$ 中的表示 $f \to V(f)$，使得若 $P$ 是 $H$ 在 $E$ 上的正交投影，则有 $f(T) = PV(f)|E$. (应用 15.9 问题 6，取 $\Gamma$ 为 $K$ 内普遍可测集的特征函数 $\varphi_{A_n} (n \in \mathbf{N})$ 的有限积组成的集，选取这些函数使得它们在每个空间 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K, m_{x_n, x_n})$ 内形成一个全子集，其中 $(x_n)$ 是 $E$ 内的处处稠密序列.) (**Наймарк** 定理.)

12) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间.

设 $H$ 是 $E$ 上的自伴算子，满足 $0 \leqslant H \leqslant 1_E$. 试证存在作为 $E$ 与 $F$ 的 Hilbert 和的可分 Hilbert 空间 $G$ 与 $G$ 上的正交投影算子 $Q$，使得若 $P$ 是 $G$ 到 $E$ 上的正交投影，则有 $H = PQ|E$. (对 $E$ 中的 $x, y$，定义 $m_{x,y}$ 为两个点的集 $\{0, 1\}$ 所支撑的测度，且使得 $m_{x,y}(\{0\}) = ((1_E - H) \cdot x|y)$，$m_{x,y}(\{1\}) = (H \cdot x|y)$，并且应用问题 11.)

13) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$(H_n)$ 是具有下述性质的自伴算子序列：存在 $\mathbf{R}$ 的区间 $[-M, M]$，使得对于每个满足下述条件的实系数多项式 $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$：当 $-M \leqslant \xi \leqslant M$ 时有 $P(\xi) \geqslant 0$，也有 $a_0 I + a_1 H_1 + \cdots + a_n H_n \geqslant 0$ (就中也可推出，对一切 $n$，有 $-M \cdot I \leqslant H_n \leqslant M \cdot I$). 试证存在作为 $E$ 与 $F$ 的 Hilbert 和的可分 Hilbert 空间 $G$ 与 $G$ 上的自伴算子 $H$，使得若 $P$ 是 $G$ 到 $E$ 上的正交投影算子，则对一切正整数 $n$，有 $H_n = PH^n|E$. (利用 13.20 问题 5 证明，对 $E$ 的每个元偶 $(x, y)$，在 $[-M, M]$ 上存在实测度 $m_{x,y}$，使对一切 $n \geqslant 1$，有

$$(H_n \cdot x|y) = \int \xi^n dm_{x,y}(\xi), \quad (x|y) = \int dm_{x,y}(\xi).\ )$$

由此推断

$$H_1^2 \leqslant H_2,\quad H_{2n+1}^2 \leqslant \|H_{2n}\| H_{2n+2}.$$

14) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间, $T$ 是 $E$ 上满足 $\|T\|\leqslant 1$ 的连续算子,则存在作为 $E$ 与 $F$ 的 Hilbert 和的可分 Hilbert 空间 $H$ 与 $H$ 上的酉算子 $U$, 使得若 $P$ 是 $H$ 在 $E$ 上的正交投影,则有 $T^n = PU^n|E$. (利用 15.9 问题 6, 为此取 $\Gamma = \boldsymbol{Z}$, 且取对称变换 $n \to -n$ 为 $\Gamma$ 上的对合, 而 $\Gamma$ 到 $H$ 中的表示满足: 对 $n\geqslant 0$, 有 $U(n) = T^n$. 注意对 $y\in E$ 与满足 $|\zeta|<1$ 的一切复数 $\zeta$, 都有

$$(*)\qquad \mathscr{R}((I + \zeta T)\cdot y\,|\,(I - \zeta T)\cdot y)\geqslant 0,$$

并注意每个 $x\in E$ 可写为 $(I - \zeta T)\cdot y$, 其中 $y$ 是 $E$ 的一个元. 特别对每个线性组合 $x = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n e^{-ni\varphi}$ 也是如此,这里除有限个指标外 $x_n\in E$ 都等于零, 而 $\zeta = re^{i\varphi}$, $r>0$. 于是借助($*$)的左边展开 $\sum_{m,n} (r^{|n-m|}U(n-m)x_n|x_m)$ 然后令 $r$ 趋于 1.)

由此推断, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是在 $|z|=1$ 上绝对收敛的幂级数, 且若令 $u(T)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n T^n$, 则关系 $|u(z)|\leqslant 1$ (相应地, $\mathscr{R}u(z)\geqslant 0$) 在 $|z|\leqslant 1$ 上成立蕴涵 $\|u(T)\|\leqslant 1$ (相应地, $u(T) + u(T)^*\geqslant 0$) (注意 $u(T) = Pu(U)|E$).

15) 若 $N$ 是可分 Hilbert 空间 $E$ 上的正规连续算子, $K$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的包含 $\mathrm{Sp}(N)$ 的紧子集, 则有 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(K)$ 到 $E$ 中的(非忠实的)表示 $f\to f(N)$; 测度 $m_{x,y}$ 可以看作 $K$ 上满足 (15.11.2) 与 (15.11.2.1) 的测度. 特别若 $U$ 是 $E$ 上的酉算子, 则 $f\to f(U)$ 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(U)$ 到 $E$ 中的一个表示. 设 $(e_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基, 它以有理整数集 $\boldsymbol{Z}$ 为指标集, 且设 $U$ 是 $E$ 上的酉算子, 使对一切 $n\in\boldsymbol{Z}$ 有 $U\cdot e_n = e_{n+1}$ (**"双侧岔开"**). 试证 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(U)$ 到 $E$ 中的表示 $f\to f(U)$ 是单演的, $e_0$ 是全化向量, 并且若令 $\mu = m_{e_0,e_0}$, 则 $\mu$ 是 $U$ 上的规范化 Haar 测度(参阅 (7.4.2)); 由此推断 $\mathrm{Sp}(U)$ 是整个单位圆周 $U$; 再给出这个事实的一个直接证明.

给出 $E$ 的闭向量子空间的例子, 使它关于 $U$ 是稳定的, 但关于 $U^* = U^{-1}$ 却不是稳定的.

16) 设 $X$ 是局部紧空间, $\mu$ 是 $X$ 上的有界正测度, 其总质量为 1, $u$ 是 $X$ 到自身的 $\mu$ 可测映射, 使得 $\mu$ 在 $u$ 下不变(13.9 问题 24); 设 $U$ 是 $L^2_{\boldsymbol{C}}(X, \mu)$ 上的酉算子, 使得 $U\cdot \tilde{f} = (f\circ u)^\sim$(13.11, 问题 10).

a) 称 $u$ 关于 $\mu$ 为**混合映射**(相应地, **弱混合映射**), 如果对 $X$ 的每对 $\mu$ 可测子集 $A$, $B$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(\mu(u^{-n}(A)\cap B))=\mu(A)\mu(B)$$

（相应地，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\mu(u^{-k}(A)\cap B)-\mu(A)\mu(B)|=0).$$

混合映射必是弱混合的；弱混合映射必是遍历的（13.9 问题 13d））.

b）试证，为使 $u$ 是混合（相应地，弱混合）的，必须且只须对属于 $\mathscr{L}^2_C(X,\mu)$ 的每对函数 $f,g$，有

$$\lim_{n\to\infty}(U^n\cdot\tilde{f}\cdot|\tilde{g})=(\tilde{f}|\tilde{1})(\tilde{1}|\tilde{g})$$

（相应地，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|(U^n\cdot\tilde{f}|\tilde{g})-(\tilde{f}|\tilde{1})(\tilde{1}|\tilde{g})|=0).$$

一个等价的必要充分条件是，对每个使得 $(\tilde{f}|\tilde{1})=0$（即 $\int fd\mu=0$）的函数 $f\in\mathscr{L}^2_C(X,\mu)$，有

$$\lim_{n\to\infty}(U^n\cdot\tilde{f}|\tilde{f})=0$$

（相应地，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|(U^k\cdot\tilde{f}|\tilde{f})|^2=0).$$

（用 $f+g$ 代替 $f$. 另一方面，利用 Cauchy-Schwarz 不等式，注意若序列 $(a_n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2=0,$$

则也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|=0.\ )$$

c）为使 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的，必须且只须 1 是 $U$ 的重数为 1 的特征值. 此时 $U$ 的特征值的重数都等于 1，并且形成绝对值为 1 的复数群 $U$ 的子群；对 $U$ 的每个特征向量 $\tilde{f}\in L^2_C(X;\mu)$，函数 $|f|$ 几乎处处是常数（注意若 $U\cdot\tilde{f}=\lambda\tilde{f}$, $U\cdot\tilde{g}=\lambda\tilde{g}$，则 $U\cdot(g/f)^{\sim}=(g/f)^{\sim}$）.

d）试证下列陈述是等价的：

$\alpha$）$u$ 对于 $\mu$ 是弱混合的.

β) $u\times u$ 是 $X\times X$ 到自身的关于测度 $\mu\otimes\mu$ 的遍历映射.

γ) $U$ 只有一个特征值 1.

(为证明 α) 蕴涵 β), 在 $X\times X$ 内考虑形如 $M\times N$ 的集, 其中 $M$ 与 $N$ 是 $X$ 的 $\mu$ 可测子集. 为证明 β) 蕴涵 γ), 注意若 $\tilde{f}$ 是 $U$ 的特征向量, 则 $(f\otimes\bar{f})^{\sim}$ 是对应于 $u\times u$ 的酉算子的特征向量, 这个特征向量对应于特征值 1. 为证明 γ) 蕴涵 α), 利用 b) 的最后一个准则; 若 $(\tilde{f}|\tilde{1})=0$, 引进测度 $\nu=m_{\tilde{f},\tilde{f}}$ (15.11.1), 并注意 $U$ 上的这个测度是扩散的 (15.11.6), 于是问题归结为证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_U \xi^k d\nu(\xi)^2\right|=0.$$

把这个关系式写成:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi\bar{\eta})^k\right)d\nu(\xi)d\nu(\eta)=0,$$

并注意 $U\times U$ 的对角线关于测度 $\nu\otimes\nu$ 是可忽略的.)

e) 采用 13.9 问题 13c) 的记号, 试证若 $\theta$ 是无理数, 则 $U$ 到自身的映射 $z\mapsto e^{2\pi i\theta}z$ 是弱混合的(确定对应的酉算子 $U$ 的谱).

f) 假定空间 $L^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 是空间 $\mathbf{C}\cdot\tilde{1}$ (常数类)与至多可数族 $(H_j)_{j\in J}$ 的 Hilbert 和, 其中 $H_j$ 具有 Hilbert 基 $(e_{nj})_{n\in\mathbf{Z}}$, 使对一切 $n\in\mathbf{Z}$, 有 $U\cdot e_{nj}=e_{n+1,j}$ (参阅问题 15), 则映射 $u$ 是混合的. 特别若 $(X,\mu,\mu)$ 是 Bernoulli 概型 $B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ (13.21 问题 18), 则 $u$ 是混合的. (若对 $n\in\mathbf{Z}$, $f_n$ 是 $I^{\mathbf{Z}}$ 上的函数, 使得当 $\mathrm{Pr}_n(x)=0$ 时 $f_n(x)=-1$, 当 $\mathrm{Pr}_n(x)=1$ 时, $f_n(x)=1$, 则有限乘积 $f_{n_1}f_{n_2}\cdots f_{n_k}$ (其中所有指标各不相同)的类与 1 的类形成 $L^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 的 Hilbert 基.) 同样证明, 若 $X$ 是环面 $T^2$, $\mu$ 是 $X$ 上的规范化 Haar 测度, 且 $u(\pi(x),\pi(y))=(\pi(x+y),\pi(x+2y))$, 其中 $\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{T}$ 是典则同态, 则 $u$ 是混合的.

g) 假定 $u$ 关于 $\mu$ 是遍历的, 因而(根据 c)) $U$ 的特征值形成 $U$ 的一个至多可数的子群 $G$, 而对应于特征值 $\alpha\in G$ 的特征空间是 $L^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 内的一条直线 $D(\alpha)$; 假定 $L^2_{\mathbf{C}}(X,\mu)$ 是 $D(\alpha)$ (关于 $\alpha\in G$) 的 Hilbert 和, 试证存在 $U$ 的特征向量 $\tilde{f}_\alpha\in D(\alpha)$ 的一个族, 使得在 $X$ 上几乎处处有 $|f_\alpha|=1$, 并且对 $G$ 的每对点 $\alpha$. $\beta$. 几乎处处有 $f_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta$. (设 $\tilde{h}_\alpha\in D_\alpha$ 满足: 对一切 $\alpha\in G$, 几乎处处有 $|h_\alpha|=1$. 对 $G$ 的每对点 $\alpha,\beta$, 几乎处处可写 $h_{\alpha\beta}=r(\alpha,\beta)h_\alpha h_\beta$, 其中 $r(\alpha,\beta)\in U$ 是一个常数. 记 $A$ 为 $U^X$ 的这样的子群, 它由 $h_\alpha$ (其中 $\alpha\in G$)

与 $X$ 上取值于 $U$ 的常值函数组成的群（它等同于 $U$）所生成，试证存在同态 $\theta: A \to U$，使对 $\zeta \in U$ 有 $\theta(\zeta) = \zeta$. 为此，把这些 $h_\alpha$ 排成序列 $(h_n)$ 并通过归纳法进行：若 $\theta$ 已在由 $U$ 与 $h_j(j<n)$ 所生成的子群 $A_n$ 上有定义，接着考虑两种情形：对任何整数 $k \in \mathbf{Z}$，$h_n^k$ 都不几乎处处等于常数；或相反地，存在一个最小正整数 $k$，使得 $h_n^k$ 几乎处处等于常数. 利用下述事实：对每个 $\zeta \in U$ 与每个正整数 $k$，存在 $\eta \in U$，使得 $\eta^k = \zeta$. 于是取 $f_\alpha = \overline{\theta(h_\alpha)} h_\alpha$.）

h）设 $v$ 是 $X$ 到自身的关于 $\mu$ 为遍历的映射，$V$ 是对应的酉算子，试证，若 $u$ 满足 g）中的假定且若 $U$ 与 $V$ 具有相同的特征值，则 $u$ 与 $v$ 是共轭的（13.12 问题 11）.

17）设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，$N$ 是 $E$ 上的正规连续算子.

a）试证 $E$ 是两个无穷维子空间的 Hilbert 和 $E_1 + E_2$，这两个子空间在 $N$ 与 $N^*$ 下都是稳定的.（归结为单正规算子 $M_\mu(1_C)$ 的情形；采用（15.11.9）的记号，注意对 $\mathrm{Sp}(N)$ 的闭子集 $M$，除非 $M$ 是有限集，并且它的每一点对于 $\mu$ 而言都具有不为 0 的测度，否则 $E(M)$ 不可能是有限维的. 于是按照是否存在无穷多个测度不为 0 的点分成两种情形，对不存在的情形利用 13.18 问题 3b）.）

b）由 a）推断，存在 $E$ 作为无穷维子空间的无穷序列 $(E_n)$ 的 Hilbert 和的分解，使得每个子空间在 $N$ 与 $N^*$ 下都是稳定的.

18）a）设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，它是无穷维子空间的无限族 $(E_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ 的 Hilbert 和，则存在 $E$ 上的酉算子 $S$，使得对于一切 $n \in \mathbf{Z}$ 有 $S(E_n) = E_{n+1}$. 试证若 $P$（相应地，$Q$）是这样的算子，它在每个 $E_n$ 上等于 $S^{1-2n}$（相应地，$S^{-2n}$），则有 $P^2 = Q^2 = 1_E$，$S = PQ$.

b）由 a）与问题 17 推断，在无穷维可分 Hilbert 空间 $E$ 上，每个酉算子都是四个对合酉算子的乘积.

c）设 $\omega$ 是 1 的一个立方根，$U$ 是 $E$ 上的比例为 $\omega$ 的相似变换，它是酉算子；试证 $U$ 不可能是三个对合酉算子的乘积.（一般地说，如果在一个群内，元 $t$ 属于这个群的中心且存在三个元 $x$，$y$，$z$，使得 $t = xyz$，且 $x^2 = y^2 = z^2 = 1$，则也有 $t = yzx$，$t^2 = xyxy$，$t^3 = xzy = t^{-1}$.）

19）a）设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，$(e_n)_{n \geqslant 0}$ 是 $E$ 的 Hilbert 基. 设 $V$ 是连续算子，使对一切 $n \geqslant 0$，有 $V \cdot e_n = e_{n+1}$；这样的算子称为**单侧位开**；它是 $E$ 到正交于 $e_0$ 的超平面上的一个等距，它的谱是圆盘 $|\zeta| \leqslant 1$ 并且不含有特征值（11.1 问题 4）；它的逼近点谱（问题 9）是圆周 $U: |\zeta| = 1$. 伴随算子 $V^*$ 的谱也是圆盘 $|\zeta| \leqslant 1$，而 $|\zeta| < 1$ 中所有点都是这个算子的特征值.

b) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，$T$ 是 $E$ 上的连续算子，并且它是 $E$ 到子空间 $T(E)$(必是闭的)上的等距，试证存在 $E$ 作为子空间 $L$ 与至多可数族 $(F_i)_{i\in I}$ 的 Hilbert 和的分解，其中 $L$ 与所有 $F_i$ 在 $T$ 下都是稳定的，并且使得：1°限制 $T|L$ 是酉的；2° 每个 $F_i$ 是无穷维的且 $T|F_i$ 对于适当的 Hilbert 基是单侧岔开.（考虑作为 $T(E)$ 的正交补的子空间 $N$，证明 $E$ 是 $T^n(N)(n\geqslant 0)$ 与 $L$ 的 Hilbert 和，其中 $L$ 是 $T^n(E)(n\geqslant 0)$ 的交.）

c) 由 a) 与 b)推断，若 $T$ 是 $E$ 到 $E$ 的子空间上的等距，且它不是酉算子，则 $\mathrm{Sp}(T)$ 是单位圆盘 $|\zeta|\leqslant 1$，而且对一切酉算子 $U$，有 $\|T-U\|=2$.（注意 $\|T-U\|=\|U^*T-1_E\|$，并且 $U^*T$ 不是酉算子，因而点 $\zeta=-1$ 不属于它的谱.）

20) a) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$T$ 是 $E$ 上的连续算子，$C$ 是 $E$ 上的紧算子，试证 $\mathrm{Sp}(T+C)$ 中不属于 $\mathrm{Sp}(T)$ 的点是 $T+C$ 的特征值.（归结为 $\zeta=0$ 是一个这样的点的情形，注意到若 $T$ 是双射，则可写 $T+C=T(1_E+T^{-1}C)$，其中 $T^{-1}C$ 是紧的；若 $-1\in\mathrm{Sp}(T^{-1}C)$，则 $-1$ 是 $T^{-1}C$ 的特征值.）

b) 采用问题 15 的记号，设 $C$ 是由 $C\cdot x=-(x|e_{-1})e_0$ 所定义的秩为 1 的算子，试证 $\mathrm{Sp}(U+C)$ 是圆盘 $|\zeta|\leqslant 1$，此时 $\mathrm{Sp}(U)$ 是圆周 $|\zeta|=1$（分别考虑 $U+C$ 在由 $e_n(n\geqslant 0)$ 所生成的子空间上的限制与在该子空间的正交补空间上的限制).

c) 设 $N$ 是 $E$ 上的正规算子，$C$ 是 $E$ 上的紧算子，试证若 $\mathrm{Sp}(N)$ 是不可数的，则 $\mathrm{Sp}((N+C)^*(N+C))$ 也是不可数的(利用 a) 与 (15.11.8(i))). 由此推断单侧岔开 $V$（问题 19a)）不可能具有 $N+C$ 的形式（注意 $V^*V=1_E$).

21) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间.

a) 试证环 $\mathscr{L}(E)$ 的任一非零双边理想 $\mathfrak{J}$ 包含秩为有限的算子所成的理想 $\mathfrak{S}$.（若 $T\neq 0$ 属于 $\mathfrak{J}$，证明任何秩为 1 的算子可写为 $BTC$ 的形式，其中 $B$, $C$ 是适当选择的算子.）

b) 试证 Banach 代数 $\mathscr{L}(E)$ 内异于 $\mathscr{L}(E)$ 与 $\{0\}$ 的唯一闭双边理想是紧算子所成的理想 $\mathfrak{C}$.（首先注意 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的闭包；另一方面，注意若一个双边理想含有非紧算子，则它也含有非紧正 Hermite 算子 $H$（问题 6)；对这样的算子，证明存在区间 $M=[\alpha,+\infty[(\alpha>0)$，使得空间 $E(M)$((15.11.9) 的记号)是无穷维的；最后，若 $V$ 是 $E$ 到 $E(M)$ 上的等距，证明 $V^*HV$ 是可逆的.)

22) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间，则 $E$ 上的连续算子 $T$ 称为**指标算子**，如果 1°$T(E)$ 是闭的且是有限余维的；2°$T^{-1}(0)$ 是有限维的.

a) 试证，若 $T$ 是指标算子，则存在连续算子 $A$，使得 $1_E - AT$ 与 $1_E - TA$ 是秩为有限的.（证明 $T$ 是 $T^{-1}(0)$ 的正交补空间 $F$ 到 $T(E)$ 上的同胚，并取 $A$ 如下：它在 $F$ 上等于上述同胚的逆同胚而在 $F$ 的正交补空间上等于 0.）

b) 反之，假定 $T$ 是 $E$ 上的连续算子，并且存在连续算子 $A$，使得 $1_E - AT$ 与 $1_E - TA$ 是紧算子，试证 $T$ 是指标算子.（利用(11.3.2)，先证明 $T$ 与 $T^*$ 的核是有限维的，因而 $T(E)$ 是有限余维的. 然后利用 $AT$ 在 $AT$ 的核的正交补空间 $F$ 上的限制是 $F$ 到它的象上的同胚这一事实，最后利用 (12.13.2)(iii).）

23) 设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间.

a) 设 $T$ 是 $E$ 上的连续算子，使得 $T^{-1}(0)$ 是无穷维的，则 $E$ 是无穷维子空间组成的无穷序列 $(E_n)_{n\geq 0}$ 的 Hilbert 和，使得 $E_n(n\geq 1)$ 包含在 $T^{-1}(0)$ 内. 对 $n\geq 1$，以 $S_n$ 记 $E_0$ 到 $E_n$ 上的等距. 设 $A$ 是连续算子，它在 $E_0$ 上等于 $S_1$，在 $E_n(n\geq 1)$ 上等于 $\zeta_{n+1}\zeta_n^{-1}$；另一方面，设 $V$ 是这样的算子：在 $E_0$ 上等于 0，在 $E_1$ 上等于 $\zeta_1^{-1}$，在 $E_n(n\geq 2)$ 上等于 $\zeta_{n-1}\zeta_n^{-1}$. 以 $T_0$ 记 $P_{E_0}T$ 在 $E_0$ 上的限制，并设 $B$ 是这样的连续算子：在 $E_0$ 上等于 $VT$，在 $E_1$ 上等于 $-T_0\zeta_1^{-1}$，在 $E_n(n\geq 2)$ 上等于 $-\zeta_{n-1}T_0S_n^{-1}$，试证 $T = AB - BA$.

b) 由 a) 推断，对 $E$ 上的每个连续算子 $T$，存在四个连续算子 $A, B, C, D$，使得

$$T = (AB - BA) + (CD - DC).$$

（把 $T$ 写成两个连续算子的和，这两个算子的核都是无穷维的.）

24) 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间，$H$ 是正自伴算子，则对任何 $\lambda>0$，$I + \lambda H$ 是可逆的. 对 $x\in E$ 与 $\lambda>0$，令 $F_\lambda(x) = (\lambda(I + \lambda H)^{-1}\cdot x|x)$，试证明 $\lambda$ 的函数 $F_\lambda(x)$ 是递增的；而为使它是有界的，必须且只须 $x\in H^{1/2}(E)$（归结为 $H$ 是单算子的情形(15.11.3)).

25) 设 $E_0$ 是实 Hilbert 空间，$E$ 是把 $E_0$ 的纯量域扩张到 $\mathbf{C}$ 所得的 Hilbert 空间，因而 $E$ 的每个元可唯一地写成 $x + iy$，其中 $x$，$y$ 属于 $E_0$，并且

$$(x' + iy'|x'' + iy'') = (x'|x'') + (y'|y'') + i((y'|x'') - (x'|y'')).$$

试证 $E_0$ 上的每个自伴算子 $H_0$ 可以唯一地延拓为 $E$ 上的一个自伴算子 $H$，并且具有相同的谱.

26) 采用 13.13 问题 2 的记号，假定对 $X$ 的每个紧子集 $K$，存在常数 $b_K\geq 0$，使对一切函数 $u\in\mathscr{H}$，有

$$\int_K |u|^2 d\mu \leqslant b_K |u|^2; \tag{13}$$

这个条件蕴涵 13.13 问题 2 的条件 $(A)$，然而并不等价于条件 $(A)$.

a) 在 6.6 问题 5b) 中，假定 $X$ 是紧的，$f_n$ 是有限实值的且关于 $X$ 上的测度 $\mu$ 是可测的与有界的，并满足条件 $\sum_n \|f_n\|^2 < +\infty$（其中 $\|f_n\| = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$）. 以 $E$ 记 6.6 问题 5b) 中所涉及的空间，设 $\mathscr{H}$ 是这样的函数组成的空间，这些函数 $\mu$ 等价于属于 $E$ 的函数，则 $H = \mathscr{H}/\mathscr{N}$ 是同构于 $E$ 的 Hilbert 空间，且满足上述条件 $(B)$.

b) 对每个具有紧支集 $K$ 的函数 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2(X, \mu)$ 存在函数 $U^f \in \mathscr{H}$，使对一切函数 $u \in \mathscr{H}$，有 $(U^f|u) = \int uf d\mu$; $U^f$ 的类由 $f$ 的类完全确定，并有 $|U^f| \leqslant b_K^{1/2} N_2(f)$. 于是 13.13 问题 2b) 中所定义的集 $\mathscr{P}$ 也是相应于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2$ 中具有紧支集的非负函数 $f$ 的 $U^f$ 组成的集在 $\mathscr{H}$ 内的闭包. 把 13.13 问题 2c) 的结果推广到 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2$ 具有紧支集且几乎处处非负的情形；同样地推广该题的 f).

c) 假定 $X$ 是紧的，于是 $U^f$ 对每个函数 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2(X, \mu)$ 有定义，并且 $N_2 \times (U^f) \leqslant b_X N_2(f)$. 若 $G \cdot \tilde{f}$ 是 $U^f$ 的类，则 $G$ 是 $L_{\mathbf{R}}^2(X, \mu)$ 上的连续正自伴算子. 若 $F$ 是 $G^{1/2}(L_{\mathbf{R}}^2)$ 在 $L_{\mathbf{R}}^2$ 内的闭包（它是 $\operatorname{Ker}(G^{1/2}) = \operatorname{Ker}(G)$ 的正交补空间），则 $G^{1/2}$ 在 $F$ 上的限制是 $L_{\mathbf{R}}^2$ 的子空间 $F$ 到 Hilbert 空间 $H$（赋予范数 $|\tilde{u}|$）上的等距；因而 $H = G^{1/2}(L_{\mathbf{R}}^2)$.

d) 假定 $X$ 是紧的，并且"控制原理"在 b) 的形式下成立，换言之，若 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2$ 几乎处处非负，且若 $u \in \mathscr{P}$ 满足：在使得 $f(x) > 0$ 的点 $x$ 所成的集上，几乎处处有 $U^f(x) \leqslant u(x)$，则在 $X$ 上几乎处处有 $U^f(x) \leqslant u(x)$. 对每个 $\lambda > 0$，令 $R_\lambda = G(I + \lambda G)^{-1}$. 试证，若 $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2$ 几乎处处非负，且若 $g$ 是它所属的类等于 $R_\lambda \cdot \tilde{f}$ 的函数，则几乎处处有 $g(x) \geqslant 0$.（注意，在使得 $g^+(x) > 0$ 的 $x$ 所成的集上，几乎处处有

$$\lambda U^{g^+}(x) \leqslant U^f(x) + \lambda U^{g^-}(x).\text{）}$$

由此推断，对每个函数 $u \in \mathscr{H}$，有 $|u| \in \mathscr{H}$ 且 $|(|u|^\sim| \leqslant |\tilde{u}|$（若 $F_\lambda(\tilde{v}) = (\lambda(I + \lambda G)^{-1} \cdot \tilde{v}|\tilde{v})$，其中 $v \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2$，试证 $F_\lambda(|u|^\sim) \leqslant |\tilde{u}|^2$，并利用 c) 与问题 24).

e) 把 d) 的结果推广到 $X$ 为局部紧的情形.（设 $(K_n)$ 是 $X$ 的紧子集序列，它形成 $X$ 的一个覆盖，且对每个 $n$，$K_n$ 包含在 $K_{n+1}$ 的内部之中. 对于每个 $n$，考虑形如 $U^f$（这里 $f$ 取遍属于 $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^2(X, \mu)$ 且其支集包含在 $K_n$ 内的函数组成的集）的函数在 $K_n$ 上的限制构成的空间 $\mathscr{H}_n$，并对每个这样的空间应用 d).）

## 12. 无界正规算子

**(15.12.1)** 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间,其上的恒等映射记作 $I$. 在用语随便时,我们把 $E$ 的一个子空间 $\mathrm{dom}(T)$ (即"$T$ 的**定义域**",它不一定是闭的)到 $E$ 的线性映射 $T$ (它不一定连续) 称为 $E$ 上的**未必有界算子**,或简称为 $E$ 上的**无界算子**. 图象 $\Gamma(T)$ (1.4) 是 $E \times E$ 的向量子空间; $T$ 称为**闭算子**,如果 $\Gamma(T)$ 在积空间 $E \times E$ 内是闭的. 闭算子 $T$ 的核 $\mathrm{Ker}(T)$ 在 $E$ 内是闭的,因为它等同于 $E \times E$ 内 $\Gamma(T)$ 与 $E \times \{0\}$ 的交.

以下我们总是认为,$E$ 上的两个无界算子之间的等式 $T_1 = T_2$ 蕴涵等式

$$\mathrm{dom}(T_1) = \mathrm{dom}(T_2).$$

**(15.12.2)** 设 $T$ 是 Hilbert 空间 $E$ 上的无界算子,则在下面三个性质中,任意两个都蕴涵第三个: (i) $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内是闭的; (ii) $T$ 是闭的; (iii) $T$ 是连续的.

若 $T$ 是连续的,则 $\Gamma(T)$ 在 $\mathrm{dom}(T) \times E$ 内是闭的,因而若 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内为闭,则 $\Gamma(T)$ 在 $E \times E$ 内是闭的. 另一方面,若 $T$ 在 $\mathrm{dom}(T)$ 上连续,则它可连续延拓为在 $\mathrm{dom}(T') = \overline{\mathrm{dom}(T)}$ 上连续的线性算子 $T'$(5.54),并且 $\Gamma(T')$ 是 $\Gamma(T)$ 在 $E \times E$ 内的闭包;若 $T$ 是闭的,则必有 $\Gamma(T') = \Gamma(T)$,因而 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内是闭的. 最后,若 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内是闭的且 $\Gamma(T)$ 在 $E \times E$ 内是闭的,则由闭图象定理 (12.16.11) 推出 $T$ 是连续的.

**(15.12.3)** 以下,我们将致力于讨论 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密的无界算子 $T$. 设 $F$ 是使得线性形式 $x \to (T \cdot x | y)$ 在 $\mathrm{dom}(T)$ 上连续的 $y \in E$ 所成的集; 此时,这个线性形式可连续延拓到整个 $E$ 上 (5.5.4),因而可以写成 $x \to (x | T^* \cdot y)$,这里 $T^* \cdot y$ 是唯一确定的向量,因为 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密 (6.3.2). 由唯一性推出,$T^*$ 是 $F$ 到 $E$ 的线性映射,因而是一个无界算子,称为 $T$ 的**伴随算子**(当 $\mathrm{dom}(T) = E$ 且 $T$ 为连续时,这个定义显然与 (11.5) 中的定义一

致）．于是对任何 $x \in \mathrm{dom}(T)$ 与 $y \in \mathrm{dom}(T^*)$，有

**(15.12.3.1)** $$(T \cdot x | y) = (x | T^* \cdot y).$$

我们注意到，若 $T_1$ 是无界算子，使得 $\mathrm{dom}(T_1) \supset \mathrm{dom}(T)$ 且 $T_1$ 是 $T$ 的延拓，则 $\mathrm{dom}(T_1^*) \subset \mathrm{dom}(T^*)$．

以下赋予 $E \times E$ Hilbert 空间的结构，使得 $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = (x_1|y_1) + (x_2|y_2)$，从而 $E \times E$ 同构于$E$的两个子空间 $E \times \{0\}$ 与 $\{0\} \times E$ 的 Hilbert 和．以 $J$ 记连续算子 $(x, y) \to (y, -x)$，显然它是 $E \times E$ 上的酉算子且 $J^2 = -I$．

**(15.12.4)** 设$T$是$E$上的无界算子，$\mathrm{dom}(T)$ 在$E$内稠密，则

(i) 伴随算子 $T^*$ 是闭的，并且它的图象 $\Gamma(T^*)$ 是 $E \times E$ 内 $J(\overline{\Gamma(T)})$ 的正交补子空间．

(ii) 下列性质是等价的：

a) $T$ 可延拓为一个闭算子．

b) $\mathrm{dom}(T^*)$ 在$E$内稠密．

当这样的条件满足时，任一延拓$T$的闭算子的图象包含 $T^{**}$ 的图象，而 $T^{**}$ 的图象就是 $\overline{\Gamma(T)}$（因而 $T^{**}$ 是延拓 $T$ 的最小闭算子，特别当$T$为闭算子时，有 $T^{**} = T$）；此外，$(T^{**})^* = T^*$．

对于 (i)，设 $(y_n)$ 是 $\mathrm{dom}(T^*)$ 中的点列，它收敛于 $y \in E$ 且使得序列$(T^* \cdot y_n)$收敛于 $z \in E$，则连续线性形式 $x \to (x | T^* \cdot y_n)$ $(x \in E)$ 所成的序列收敛于连续线性形式 $x \to (x|z)$；然而对 $x \in \mathrm{dom}(T)$，有 $(x|z) = \lim\limits_{n \to \infty} (T \cdot x | y_n) = (T \cdot x | y)$，故按定义有 $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ 与 $z = T^* \cdot y$，这表明 $T^*$ 是闭的．

另一方面，$(y, z) \in E \times E$ 正交于所有元 $(T \cdot x, -x)(x \in \mathrm{dom}(T))$ 意味着 $(T \cdot x | y) = (x|z)$，这就是说，$x \to (T \cdot x | y)$ 是连续的，因而 $y \in \mathrm{dom}(T^*)$，$z = T^* \cdot y$．

对于 (ii)，$E \times E$ 的闭向量子空间$G$不是某个闭算子的图象等价于，对某个 $x \in \mathrm{pr}_1(G)$，至少有两个属于$G$的不同的点 $(x, y_1)$ 与 $(x, y_2)$，这等价于(由于$G$是向量子空间) $(0, y_1 - y_2) \in G$．然而 $\mathrm{dom}(T^*)$ 在$E$内不稠密蕴涵在$E$ 内存在 $z \neq 0$，它正交于 $\overline{\mathrm{dom}(T^*)}$(6.3.1)，或 $(z, 0)$ 正交于 $\Gamma(T^*)$，即$(0, -z)$属于 $\overline{\Gamma(T)}$；

于是 $(0, -z)$ 不能含于任一延拓 $T$ 的闭算子的图象内. 反之, 若 $\operatorname{dom}(T^*)$ 在 $E$ 内稠密, 则 $T^{**}$ 有定义且 $\Gamma(T^{**})$ 是 $J(\Gamma(T^*))$ 的正交补空间, 而这个正交补空间也等于 $J(J(\overline{\Gamma(T)})) = \overline{\Gamma(T)}$ (6.3.1). 此时,我们称 $T^{**}$ 为 $T$ 的**闭包**.

**(15.12.5)** 给定 $E$ 上的两个未必有界算子 $U, V$, 对 $x \in \operatorname{dom}(U) \cap \operatorname{dom}(V)$, 向量 $U \cdot x + V \cdot x$ 有定义, 以 $U+V$ 记 $\operatorname{dom}(U) \cap \operatorname{dom}(V)$ 到 $E$ 的线性映射 $x \to U \cdot x + V \cdot x$. 特别是,若 $V$ 处处有定义, 则 $\operatorname{dom}(U + V) = \operatorname{dom}(U)$; 于是图象 $\Gamma(U + V)$ 是 $\Gamma(U)$ 在 $E \times E$ 到自身的线性映射 $(x,y) \to (x, y + V \cdot x)$ 下的象. 若 $V$ 是连续的且 $U$ 是闭的,则 $U + V$ 也是闭的,映射

$$(x, y) \to (x, y + V \cdot x)$$

与它的逆映射 $(x, y) \to (x, y - V \cdot x)$ 都是连续的.

同样, 向量 $U \cdot (V \cdot x)$ 在使 $x \in \operatorname{dom}(V)$ 与 $V \cdot x \in \operatorname{dom}(U)$ 的 $x \in E$ 所成的集上有定义; 这个集是一个向量子空间, 记作 $\operatorname{dom}(UV)$; 我们以 $UV$ 记 $\operatorname{dom}(UV)$ 到 $E$ 的线性映射 $x \to U \cdot (V \cdot x)$. 另一方面,若 $T$ 是未必有界算子且是 $\operatorname{dom}(T)$ 到 $E$ 的单射, 则以 $T^{-1}$ 记 $T(\operatorname{dom}(T)) = \operatorname{dom}(T^{-1})$ 到 $E$ 的逆映射; 图象 $\Gamma(T^{-1})$ 是 $\Gamma(T)$ 在映射 $(x, y) \to (y, x)$ 之下的象;因而当 $T$ 为闭(且为单射)时, $T^{-1}$ 是闭的.

**(15.12.6) (Von Neumann)** 设 $T$ 是 $E$ 上的闭算子, $\operatorname{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密,则 $\operatorname{dom}(T^*T)$ 在 $E$ 内稠密,算子 $T^*T$ 是闭的,并且算子 $I + T^*T$ (它在 $\operatorname{dom}(T^*T)$ 上有定义)是 $\operatorname{dom}(T^*T)$ 到 $E$ 上的双射. 算子 $B = (I + T^*T)^{-1}$ 在 $E$ 上有定义, 它是连续的、自伴的且是单射,并且它的谱包含在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0,1]$ 内;又 Hermite 形式 $(x, y) \to (B \cdot x | y)$ 是正的且是非退化的, $C = TB$ 是定义在 $E$ 上的连续算子,并且使得 $C(E) \subset \operatorname{dom}(T^*)$. 最后还有 $(T^*T)^* = T^*T$.

我们已经看到 (15.12.4), $\Gamma(T)$ 与 $J(\Gamma(T^*))$ 在 $E \times E$ 内是互为正交补的子空间,因而对每个 $x \in E$, 存在唯一的 $y \in \operatorname{dom}(T)$ 与唯一的 $z \in \operatorname{dom}(T^*)$, 使得

(**15.12.6.1**) $(x,0)=(y,T\cdot y)+(T^*\cdot z,-z)$.

令 $y=B\cdot x$, $z=C\cdot x$; 显然 $B$ 与 $C$ 是定义在整个 $E$ 上的线性算子,并且 $B(E)\subset \mathrm{dom}(T)$,$C(E)\subset \mathrm{dom}(T^*)$. 再由 (15.12.6.1),有

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|T\cdot y\|^2+\|z\|^2+\|T^*\cdot z\|^2,$$

由此 $\|B\cdot x\|\leqslant\|x\|$, $\|C\cdot x\|\leqslant\|x\|$,因而 $B$ 与 $C$ 是连续的. 关系式 (15.12.6.1) 等价于

$$x=B\cdot x+T^*C\cdot x \text{ 与 } 0=-C\cdot x+TB\cdot x,$$

即 $C=TB$ 且 $T(B(E))\subset\mathrm{dom}(T^*)$, 或

$$B(E)\subset\mathrm{dom}(T^*T).$$

于是 $T^*TB$ 在整个 $E$ 上有定义且

$$I=B+T^*TB=(I+T^*T)B,$$

这表明 $B$ 是单射而 $I+T^*T$ 是满射. 对每个 $w\in\mathrm{dom}(T^*T)$, 因为 $T=T^{**}$,所以

(**15.12.6.2**) $$(w+T^*T\cdot w|w)=\|w\|^2+(T^*T\cdot w|w)$$
$$=\|w\|^2+\|T\cdot w\|^2;$$

这表明关系式 $w+T^*T\cdot w=0$ 蕴涵 $w=0$, 因而 $I+T^*T$ 是 dom $(T^*T)$ 到 $E$ 上的双射; 又由于 $\Gamma(B)$ 在 $E\times E$ 内是闭的 (15.12.2), 所以 $\Gamma(I+T^*T)$ 也是闭的 (15.12.5), 由此立即推出 (15.12.5) $T^*T$ 是闭的,现在注意,对 $E$ 中任何 $u$, $v$, 有

$$\begin{aligned}(B\cdot u|v)&=(B\cdot u|B\cdot v+T^*TB\cdot v)\\&=(B\cdot u|B\cdot v)+(B\cdot u|T^*TB\cdot v)\\&=(B\cdot u|B\cdot v)+(TB\cdot u|TB\cdot v)\\&=(B\cdot u|B\cdot v)+(T^*TB\cdot u|B\cdot v)\\&=((I+T^*T)B\cdot u|B\cdot v)=(u|B\cdot v),\end{aligned}$$

因而 $B$ 是自伴的. 再者,在 (15.12.6.2) 中用 $B\cdot x$ 代替 $w$,即得对一切 $x\in E$,有$(x|B\cdot x)=\|B\cdot x\|^2+\|TB\cdot x\|^2\geqslant 0$;由于 $\|B\cdot x\|\leqslant\|x\|$, 由前所述并由 (15.11.7) 推出, $\mathrm{Sp}(B)$ 包含在 $[0,1]$ 内; 进而关系式$(x|B\cdot x)=0$ 蕴涵 $B\cdot x=0$, 因而 $x=0$, 这表明 Hermite 形式 $(x,y)\to(B\cdot x|y)$ 是非退化的.

接着我们证明 $\mathrm{dom}(T^*T)$ 在 $E$ 内处处稠密. 设 $T'$ 是 $T$ 在 $\mathrm{dom}(T^*T)$ 上的限制，由于 $\mathrm{dom}(T^*T)$ 是 $\Gamma(T')$ 的第一射影而 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密，所以只须证明 $\Gamma(T')$ 在 $\Gamma(T)$ 内稠密. 为证明 Hilbert 空间 $\Gamma(T)$ 的子空间 $\Gamma(T')$ 在 $\Gamma(T)$ 内稠密，只须证明，若 $\Gamma(T)$ 中的向量 $(u, T\cdot u)$ 正交于 $\Gamma(T')$，则它必为零. 但前者意味着对任何 $v\in\mathrm{dom}(T^*T)$，有

$$((u, T\cdot u)|(v, T\cdot v))=0;$$

也可写成 $(u|v)+(T\cdot u|T\cdot v)=0$，或因为 $T\cdot v\in\mathrm{dom}(T^*)$，也可写成 $(u|v)+(u|T^*T\cdot v)=0$; 最后可写成

$$(u|(I+T^*T)\cdot v)=0.$$

然而 $I+T^*T$ 把 $\mathrm{dom}(T^*T)$ 映到 $E$ 上，因而 $u=0$.

最后，因为 $B$ 是自伴的，所以 $\Gamma(B)$ 是 $J(\Gamma(B))$ 的正交补空间. 由于 $\Gamma(B)$ 是 $\Gamma(I+T^*T)$ 在对称映射 $S:(x, y)\to(y, x)$ 下的象且 $JS=-SJ$，故 $\Gamma(I+T^*T)$ 是 $J(\Gamma(I+T^*T))$ 的正交补空间，换言之 (15.12.4)，$(I+T^*T)^*=I+T^*T$，这等价于 $(T^*T)^*=T^*T$.

**(15.12.7)** 未必有界算子 $T$ 称为**正规算子**，如果它是闭的，$\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密，并且 $T^*T=TT^*$（我们提醒一下，按照定义，这蕴涵关系 $\mathrm{dom}(T^*T)=\mathrm{dom}(TT^*)$）. $T$ 称为**自伴算子**，如果 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密并且 $T^*=T$（这蕴涵 $T$ 是闭的(15.12.4)）; 自伴算子显然是正规的. 由 (15.12.6) 推出，若 $T$ 是任一使得 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密的闭算子，则 $T^*T$ 与 $TT^*$ 都是自伴的.

通过下面的定理，正规算子的结构可以归结为连续正规算子的结构:

**(15.12.8)** 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间.

(i) 若 $N$ 是未必有界的正规算子，则 $\mathrm{dom}(N)=\mathrm{dom}(N^*)$，并且对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，都有 $\|N\cdot x\|=\|N^*\cdot x\|$; $E$ 是闭子空间族 $(E_n)$ 的 Hilbert 和，其中 $E_n\subset\mathrm{dom}(N)$，并且 $E_n$ 关于 $N$ 与 $N^*$ 是稳定的，因而 $N$ 在 $E_n$ 上的限制 $N_n$ 是连续正规算子.

(ii) 反之，若 $(E_n)$ 是 $E$ 的闭子空间的一个序列，使得 $E$ 是这

些$E_n$的 Hilbert 和；对每个 $n$，设 $N_n$ 是 $E_n$ 上的连续正规算子，则存在 $E$ 上的唯一正规算子 $N$，使得 $E_n \subset \mathrm{dom}(N)$，且对一切 $n$，$N_n$ 是 $N$ 在 $E_n$ 上的限制；$\mathrm{dom}(N)$ 是使得

$$\sum_n \|N_n \cdot x_n\|^2 < +\infty$$

（这里对一切 $n$ 都有 $x_n \in E_n$）的 $x = \sum_n x_n$ 所成的集 $F$，且有

$$N \cdot x = \sum_n N_n \cdot x_n, \quad N^* \cdot x = \sum_n N_n^* \cdot x_n.$$

我们证明 (i) 的第一个论断．在 (15.12.6) 的证明中，我们已经看到 $N$ 在 $\mathrm{dom}(N^*N)$ 上的限制的图象在 $\Gamma(N)$ 内是稠密的，因而对每个 $x \in \mathrm{dom}(N)$，存在 $\mathrm{dom}(N^*N)$ 中的点列 $(y_n)$，使得 $\lim_{n\to\infty} y_n = x$，$\lim_{n\to\infty} N \cdot y_n = N \cdot x$．然而对一切 $z \in \mathrm{dom}(N^*N)$，因为 $N^*N = NN^*$，所以 $\|N \cdot z\|^2 = (z|N^*N \cdot z) = (z|NN^* \cdot z) = \|N^* \cdot z\|^2$．把这个结果应用到 $z = y_n - y_m$ 上，即见序列 $(N^* \cdot y_n)$ 是 Cauchy 序列，因而在 $E$ 内收敛．因为 $N^*$ 是闭的 (15.12.4)，所以由此推出 $x \in \mathrm{dom}(N^*)$ 与 $N^* \cdot x = \lim_{n\to\infty} N^* \cdot y_n$，由此得到 $\|N \cdot x\| = \|N^* \cdot x\|$；这样我们证明了 $\mathrm{dom}(N) \subset \mathrm{dom}(N^*)$．由于 $N^{**} = N$，所以 $N^*$ 是正规的并且 $\mathrm{dom}(N^*) \subset \mathrm{dom}(N)$．

现在证明 (ii)．首先证明，若 $N$ 满足 (ii) 中的条件，则 $N^*(E_n) \subset E_n$．事实上，对一切 $m \neq n$，一切 $y_n \in E_n$ 与一切 $x_m \in E_m$，因为 $N(E_m) \subset E_m$，所以 $(x_m|N^* \cdot y_n) = (N \cdot x_m|y_n) = 0$；因而 $N^* \cdot y_n$ 与指标 $m \neq n$ 的所有 $E_m$ 正交，从而属于 $E_n$．其次证明，若 $x \in \mathrm{dom}(N)$，则

$$P_{E_n} N \cdot x = NP_{E_n} \cdot x = N_n \cdot (P_{E_n} \cdot x).$$

事实上，对一切 $y_n \in E_n$，有

$$(P_{E_n} N \cdot x|y_n) = (N \cdot x|P_{E_n} \cdot y_n) = (N \cdot x|y_n) = (x|N^* \cdot y_n),$$

且由前述，有 $N^* \cdot y_n = P_{E_n} N^* \cdot y_n$，所以

$$\begin{aligned}(P_{E_n} N \cdot x|y_n) &= (P_{E_n} \cdot x|N^* \cdot y_n) \\ &= (NP_{E_n} \cdot x|y_n) = (N_n \cdot (P_{E_n} \cdot x)|y_n);\end{aligned}$$

由于这个式子对一切 $y_n \in E_n$ 成立，所以 $E$ 的两个元 $P_{E_n}N \cdot x$ 与 $N_n \cdot (P_{E_n} \cdot x)$ 相等.

现在证明下述引理，它是 (15.10.8.1) 的推广：

**(15.12.8.1)** 设 $(E_n)$ 是 $E$ 的闭子空间序列，使得 $E$ 是这些 $E_n$ 的 Hilbert 和；对每个 $n$，设 $T_n$ 是 $E_n$ 上的连续算子，则在 $E$ 上存在唯一的闭算子 $T$，使对一切 $n$，有 $E_n \subset \mathrm{dom}(T)$，$T|E_n = T_n$，且对一切 $x \in \mathrm{dom}(T)$，有 $P_{E_n}T \cdot x = TP_{E_n} \cdot x$. 此外，$\mathrm{dom}(T)$ 是使得 $\sum\limits_n \|T_n \cdot x_n\|^2 < +\infty$（这里对一切 $n$ 有 $x_n \in E_n$）的 $x = \sum\limits_n x_n$ 所成的集 $F$，并且 $T \cdot x = \sum\limits_n T_n \cdot x_n$.

因为 $\sum\limits_n \|P_{E_n} \cdot (T \cdot x)\|^2 = \|T \cdot x\|^2 < +\infty$，故由所述条件推出 $\mathrm{dom}(T) \subset F$，且对一切 $x = \sum\limits_n x_n \in \mathrm{dom}(T)$，有 $T \cdot x = \sum\limits_n T_n \cdot x_n$. 由于在 $E$ 内有不等式 $\|z + z'\|^2 \leqslant 2(\|z\|^2 + \|z'\|^2)$，所以 $F$ 是 $E$ 的向量子空间. 对每个 $x = \sum\limits_n x_n \in F$，令 $T' \cdot x = \sum\limits_n T_n \cdot x_n$，我们证明这样就定义了一个闭算子 $T' : F \to E$. 显然 $\Gamma(T)$ 包含有限和 $\sum\limits_n (x_n, T_n \cdot x_n)$，因此 $\Gamma(T)$ 在 $\Gamma(T')$ 内稠密，且 $T$ 为闭的假定蕴涵 $T = T'$. 易见 $T'$ 是线性的；另一方面，若 $F$ 中的点列 $(x_m)$ 趋于 $x \in E$ 且若序列 $(T' \cdot x_m)$ 趋于 $y \in E$，则 $P_{E_n}T' \cdot x_m = T_n P_{E_n} \cdot x_m$ 一方面趋于 $P_{E_n} \cdot y$，另一方面，根据 $T_n$ 的连续性，它又趋于 $T_n P_{E_n} \cdot x$；这表明 $x \in F$ 且 $y = T' \cdot x$，于是引理得证.

把这一引理应用到 (ii) 的情形可证明 $N$ 的唯一性，于是它必定是 (15.12.8, (ii)) 中所描述的闭算子 (15.12.7). 剩下要证明算子 $N$ 是正规的. 对一切 $x \in F$ 有 $\|N_n^* P_{E_n} \cdot x\| = \|N_n P_{E_n} \cdot x\|$，因而把引理 (15.12.8.1) 应用到连续算子族 $(N_n^*)$ 上就能证明，存在唯一的闭算子 $N'$，使对一切 $n$，有 $E_n \subset \mathrm{dom}(N')$，$N'|E_n = N_n^*$，且对一切 $x \in \mathrm{dom}(N')$，有 $P_{E_n}N' \cdot x = N'P_{E_n} \cdot x$；此外还有

$$\mathrm{dom}(N') = \mathrm{dom}(N) = F,$$

且对 $x=\sum_n x_n\in F$，有 $N'\cdot x=\sum_n N_n^*\cdot x_n$. 从这些公式立即得到，对 $F$ 中的 $x$，$y$，有 $(N\cdot x|y)=(x|N'\cdot y)$，即有 $F\subset \mathrm{dom}(N^*)$(15.12.3)，并且 $N^*$ 在 $F$ 上的限制是 $N'$. 然而对一切 $n$ 与 $y\in F$，也有 $P_{E_n}N^*\cdot y=N^*P_{E_n}\cdot y$. 事实上，对一切 $x_n\in E_n$，有 $(x_n|P_{E_n}N^*\cdot y)=(x_n|N^*\cdot y)$(15.5.4)，由于 $x_n\in\mathrm{dom}(N)$，$N\cdot x_n=N_n\cdot x_n\in E_n$，所以 $(x_n|N^*\cdot y)=(N\cdot x_n|y)=(N\cdot x_n|P_{E_n}\cdot y)$；最后我们得到，由于 $E_n\subset\mathrm{dom}(N^*)$，从而 $(x_n|P_{E_n}N^*\cdot y)=(x_n|N^*P_{E_n}\cdot y)$，我们的论断得证. 因为 $N^*$ 是闭的(15.12.4)，根据(15.12.8.1)，就有 $N'=N^*$. 于是从前述结果还可推出，对 $\mathrm{dom}(N)=\mathrm{dom}(N^*)=F$ 中的 $x$，$y$，有 $(N\cdot x|N\cdot y)=(N^*\cdot x|N^*\cdot y)$. 这样，若 $z\in\mathrm{dom}(NN^*)$，则对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，有

$$(N\cdot x|N\cdot z)=(N^*\cdot x|N^*\cdot z)=(x|NN^*\cdot z),$$

由伴随算子的定义(15.12.3)得知 $N\cdot z\in\mathrm{dom}(N^*)$，并且 $N^*N\cdot z=NN^*\cdot z$. 于是我们证明了 $\mathrm{dom}(NN^*)\subset\mathrm{dom}(N^*N)$，算子 $NN^*$ 与 $N^*N$ 在 $\mathrm{dom}(NN^*)$ 上相同；因为 $N^{**}=N$，所以交换 $N$ 与 $N^*$ 则(ii)得证.

现在来证明(i). 考虑连续 Hermite 算子 $B=(I+N^*N)^{-1}$(15.12.6)，它的谱包含在 $I=[0,1]$ 内. 我们首先证明，对一切函数 $f\in\mathscr{U}_{\mathbf{C}}(I)$，有 $f(B)(\mathrm{dom}(N))\subset\mathrm{dom}(N)$，且对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，有 $f(B)N\cdot x=Nf(B)\cdot x$. 先就 $f=1_{\mathbf{C}}$ 的情形证明. 对 $x\in\mathrm{dom}(N)$，由于 $B(E)\subset\mathrm{dom}(N)$(15.12.6)，忆及 $NB(E)\subset\mathrm{dom}(N^*)$ 与 $N^*NB\cdot x=x-B\cdot x\in\mathrm{dom}(N)$，就可写 $BN\cdot x=BN(I+N^*N)B\cdot x=B(N+N^*NN)B\cdot x$. 然而 $NN^*=N^*N$，所以

$BN\cdot x=B(N+N^*NN)B\cdot x=B(I+N^*N)NB\cdot x=NB\cdot x$；换言之，对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，有 $BN\cdot x=NB\cdot x$. 通过对 $n$ 作归纳法得知，对 $x\in\mathrm{dom}(N)$ 与一切正整数 $n$，有 $B^n(\mathrm{dom}(N))\subset\mathrm{dom}(N)$ 与 $B^nN\cdot x=NB_n\cdot x$，于是当 $f$ 是实系数多项式时我们的断言得证. 又由此推出，对于实系数多项式 $f$ 与 $x\in\mathrm{dom}(N)$，$y\in$

dom$(N)$，有

(**15.12.8.2**) $\quad (f(B)N\cdot x|y)=(f(B)\cdot x|N^*\cdot y)$.

把(15.11.2)应用于 $B$，就能推出

$$\int f(\zeta)dm_{N.x,y}(\zeta)=\int f(\zeta)dm_{x,N^*.y}(\zeta),$$

根据 Weierstrass 定理(7.4.1)，实系数多项式在 $\mathrm{Sp}B\subset[0,1]$上的限制在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Sp}(B))$内处处稠密，所以上述关系证实了 $m_{N\cdot x,y}=m_{x,N^*\cdot y}$((3.15.1)与(13.2))．把(15.11.2)应用于 $B$，即见公式(15.12.8.2)对一切函数 $f\in\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(I)$成立．但这个公式表明 $f(B)\cdot x\in\mathrm{dom}(N^{**})=\mathrm{dom}(N)$以及对任何 $y\in\mathrm{dom}(N)$，有 $(f(B)N\cdot x|y)=(Nf(B)\cdot x|y)$；由于 dom$(N)$在 $E$ 内稠密，所以由此推出，对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，有 $Nf(B)\cdot x=f(B)N\cdot x$.

现在以 $f_0$ 记集$\{0\}$的特征函数，以 $f_n(n\geqslant 1)$ 记 $\boldsymbol{R}$ 的区间$]1/(n+1),1/n]$的特征函数．对每个 $\zeta\in\boldsymbol{R}$，级数 $f_0(\zeta)+f_1(\zeta)+\cdots+f_n(\zeta)+\cdots$收敛于区间$[0,1]$的特征函数在 $\zeta$ 处的值．对每个非负整数 $n$，设 $F_n$ 是 $E$ 在正交投影算子 $f_n(B)=P_{F_n}$(15.10.6)下的象；由前述并根据(15.11.8,(iv))，$E$ 是 $F_n(n\geqslant 0)$ 的 Hilbert 和．事实上我们还有 $F_0=\{0\}$，因为 $F_0$ 是算子 $B$ 的核(15.11.6)，又根据(15.12.6)，Hermite 形式$(x,y)\to(B\cdot x|y)$是非退化的，即关系$(B\cdot x|x)=0$蕴涵 $x=0$，因而 $F_0=\{0\}$.

根据前面所证，就有 $P_{F_n}(\mathrm{dom}(N))\subset\mathrm{dom}(N)$，并且对一切 $x\in\mathrm{dom}(N)$，有 $P_{F_n}N\cdot x=NP_{F_n}\cdot x$．另一方面，由当 $n\geqslant 1$ 时 $f_n$ 的定义得知，$g_n(\zeta)=(1/\zeta)f_n(\zeta)$(令定 $g_n(0)=0$)是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界简单函数，因而普遍可测(7.6.1)，于是可写 $P_{F_n}=Bg_n(B)$，由此得到 $NP_{F_n}=NBg_n(B)$；但我们已经看到(15.12.6)，$NB$ 是定义在 $E$ 上的连续算子，因而 $N$ 在 $F_n\cap\mathrm{dom}(N)$ 上的限制 $N_n$ 是子空间 $F_n\cap\mathrm{dom}(N)$到 $F_n$ 的连续映射；因为 $P_{F_n}(\mathrm{dom}(N))\subset F_n\cap\mathrm{dom}(N)$，所以 $F_n\cap\mathrm{dom}(N)$ 在 $F_n$ 内稠密；显见 $N_n$ 是 $F_n$ 上的闭算子，故得到 $F_n\subset\mathrm{dom}(N)$(15.12.2)．又因为 $N^*N=NN^*$，从而可交换 $N$ 与 $N^*$，这并不改变 $B$；于是 $N^*$ 在 $F_n$ 上的限制 $N'_n$ 也是这个

子空间上的连续算子，它显然等于伴随算子 $N_n^*$；从而 $N_n$ 是正规的，这就完成了 (15.12.8) 的证明.

**(15.12.9)** 设 $T$ 是 $E$ 上的(未必有界)闭算子. 此时(推广 (11.1)) $\zeta\in \boldsymbol{C}$ 称为 $T$ 的**正则值**，如果算子 $T-\zeta I$ 是 $\mathrm{dom}(T)$ 到 $E$ 上的双射线性映射，并且逆线性映射 $R_T(\zeta): E\to \mathrm{dom}(T)$ 连续.

**(15.12.10)** 为使 $\zeta\in\boldsymbol{C}$ 是闭算子 $T$ 的正则值，只须 $T-\zeta I$ 是 $\mathrm{dom}(T)$ 到 $E$ 的一个稠密子空间 $L$ 上的单射线性映射，并且逆映射 $(T-\zeta I)^{-1}: L\to E$ 连续.

事实上，显然 $T-\zeta I$ 的图象是闭的，而且 $(T-\zeta I)^{-1}$ 的图象也是闭的 (15.12.5)；因而由 (15.12.2) 推出 $L$ 在 $E$ 内是闭的，从而等于 $E$.

$T$ 的正则值集在 $\boldsymbol{C}$ 内的余集仍称为 $T$ 的**谱**，记作 $\mathrm{Sp}(T)$；若 $\zeta\in\mathrm{Sp}(T)$，则由 (15.12.10) 得知，可能有三种情形:

1° $\zeta$ 是 $T$ 的特征值(这些值的集仍称为 $T$ 的**点谱**)；

2° $\zeta$ 不是 $T$ 的特征值 (这蕴涵 $T-\zeta I$ 是 $\mathrm{dom}(T)$ 到 $E$ 的一个子空间 $L$ 上的双射)，子空间 $L$ 在 $E$ 内稠密，但 $(T-\zeta I)^{-1}$ 在 $L$ 上不连续(这些值的集称为 $T$ 的**连续谱**)；

3° $\zeta$ 不是 $T$ 的特征值，但子空间 $L$ 在 $E$ 内不稠密 (这些值的集称为 $T$ 的**剩余谱**).

例如，对 (11.1.1) 中所定义的算子，点谱是空集，连续谱是单位圆周 $U: |\zeta|=1$，而剩余谱是圆盘 $|\zeta|<1$(11.1 问题 4).

**(15.12.11)** $E$ 上的闭算子 $T$ 的谱在 $\boldsymbol{C}$ 内是闭的，而且 $\boldsymbol{C}-\mathrm{Sp}(T)$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的映射 $\zeta\to R_T(\zeta)$ 是解析的.

事实上，设 $\zeta_0$ 是 $\boldsymbol{C}-\mathrm{Sp}(T)$ 的点且令 $a=\|R_T(\zeta_0)\|$；于是连续算子 $V(\zeta)=(I-(\zeta-\zeta_0)R_T(\zeta_0))^{-1}R_T(\zeta_0)$ 对 $|\zeta-\zeta_0|<1/a$ 有定义且在这个圆盘内解析 (8.3.2.1). 对每个 $x\in\mathrm{dom}(T)$，有

$$R_T(\zeta_0)(T-\zeta I)\cdot x=x+(\zeta_0-\zeta)R_T(\zeta_0)\cdot x,$$

因而 $V(\zeta)(T-\zeta I)\cdot x=x$. 另一方面，对每个正整数 $n$，令

$$V_n(\zeta)=R_T(\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)T_T^2(\zeta_0)+\cdots+(\zeta-\zeta_0)^{n-1}R_T^n(\zeta_0),$$

于是 $V(\zeta)$ 是 $\mathscr{L}(E)$ 中的序列 $(V_n(\zeta))$ 的极限. 由定义，对一切

$y \in E$ 与正整数 $n$，有 $V_n(\zeta) \cdot y \in \mathrm{dom}(T)$，并且

$$(T - \zeta I)V_n(\zeta) \cdot y = (\zeta_0 - \zeta)V_n(\zeta) \cdot y + (T - \zeta_0 I)V_n(\zeta) \cdot y$$
$$= y - (\zeta - \zeta_0)^n R_T^n(\zeta_0) \cdot y,$$

因而当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，$(T - \zeta I)V_n(\zeta) \cdot y$ 趋于 $y$；因为按假定 $T$ 是闭的，所以推出 $V(\zeta) \cdot y \in \mathrm{dom}(T)$ 与 $(T - \zeta I)V(\zeta) \cdot y = y$. 这表明 $T - \zeta I$ 是 $\mathrm{dom}(T)$ 到 $E$ 上的双射线性映射且它的逆映射是 $V(\zeta)$，因而 $\zeta \notin \mathrm{Sp}(T)$ 且 $V(\zeta) = R_T(\zeta)$，从而完成了所述命题的证明.

**(15.12.12)** 设 $N$ 是 $E$ 上的未必有界正规算子，采用 (15.12.8) 的记号，有 $\mathrm{Sp}(N) = \overline{\bigcup_n \mathrm{Sp}(N_n)}$；$N$ 的点谱是所有 $N_n$ 的点谱的并，而 $N$ 的剩余谱是空集. 为使 $N$ 是自伴的，必须且只须它的谱是实的.

对一切 $n$ 有 $\mathrm{Sp}(N_n) \subset \mathrm{Sp}(N)$，因为如果 $N - \zeta I$ 是 $\mathrm{dom}(N)$ 到 $E$ 上的双射，则每个算子 $N_n - \zeta I_{E_n}$ 是 $E_n$ 到自身上的双射（因而根据闭图象定理，它是双方连续的）. 由此出发，考虑到 $\mathrm{Sp}(N)$ 是闭的 (15.12.11)，且若 $\alpha \notin \mathrm{Sp}(N_n)$，则 $(N_n - \alpha I_{E_n})^{-1}$ 是 $E_n$ 上的连续正规算子，以及 (15.12.10)，第一个论断的证明可通过重复 (15.11.5) 的证明得到. 关于点谱的论断是直接的，而且 $N$ 的特征子空间如同 (15.11.6) 那样来确定. 同样，为证明 $N$ 的剩余谱是空集，只须证明每个 $N_n$ 的剩余谱是空集，因而就归结到 $N$ 为连续的情形. 然后，利用 (15.11.3) 中的分解，可以假定算子 $N$ 是乘以 $L^2_{\mathbf{C}}(K, \mu)$ 中函数 $1_{\mathbf{C}}$ 类的乘法，其中 $K$ 在 $\mathbf{C}$ 内是紧的而 $\mu$ 是 $K$ 上的一个正测度. 于是问题归结为证明，若 $\mu(\{0\}) = 0$，则当 $g$ 取遍 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K, \mu)$ 时，函数 $\zeta \to \zeta g(\zeta)$ 所成的集在 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K, \mu)$ 内稠密. 根据 (6.3.1)，只须证明，若函数 $h \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K, \mu)$ 满足：对一切函数 $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(K, \mu)$，有 $\int \zeta g(\zeta) h(\zeta) d\mu(\zeta) = 0$，则 $h$ 是 $\mu$ 可忽略的；而根据关于 $\mu$ 的假定，取 $g(\zeta) = \overline{\zeta h(\zeta)}$，则上面这一点就是显见的.

最后，若 $N$ 是自伴的，则显然 $N_n$ 也是自伴的，因而对一切 $n$ 有

$\mathrm{Sp}(N_n)\subset \boldsymbol{R}$，因而 $\mathrm{Sp}(N)\subset \boldsymbol{R}$. 反之，若 $\mathrm{Sp}(N)\subset \boldsymbol{R}$，则对一切 $n$ 有 $\mathrm{Sp}(N_n)\subset \boldsymbol{R}$，故根据 (15.11.7)，$N_n$ 是自伴的，再由 (15.12.8)，$N$ 也是自伴的.

**(15.12.13)** 命题 (15.12.8) 与 (15.12.12) 本质上是把关于未必有界正规算子的问题归结为关于连续正规算子的类似问题. 特别，设 $f$ 是 $\boldsymbol{C}$ 到自身的普遍可测映射，我们证明对每个(未必有界的)正规算子 $N$，可以定义具有类似于 (15.11.1) 中所述性质的 (未必有界)正规算子 $f(N)$. 事实上，先假定函数 $f$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上有界；采用 (15.12.8)的记号，此时 $f(N_n)$ 是 $E_n$ 上的连续正规算子 (15.11.1)，且对一切 $n$，还有 $\|f(N_n)\|\leqslant \sup\limits_{\zeta\in \boldsymbol{C}}|f(\zeta)|$ (15.11.8). 因而 $E$ 上的在每个 $E_n$ 上的限制是 $f(N_n)$ 的正规算子连续 (15.10.8.1)，我们把这个算子记作 $f(N)$. 显然，若 $g$ 是另一属于 $\mathscr{U}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})$ 的函数，则根据 (15.11.1.1)，有 $(f+g)(N)=f(N)+g(N)$，$(fg)(N)=f(N)g(N)$，$\bar{f}(N)=(f(N))^*$. 现在设 $f$ 是定义在 $\boldsymbol{C}$ 上的任一复值普遍可测函数；对 $n\geqslant 0$，设 $A_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 内由使得 $n\leqslant|f(\zeta)|<n+1$ 的 $\zeta$ 组成的普遍可测子集，从而 $(A_n)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的一个划分. 基于刚才证明的事实，$P_n=\varphi_{A_n}(N)$ 是 $E$ 上的正交投影算子 (15.5.3.1)，且 $E$ 是闭子空间 $H_n=P_n(E)(n\geqslant 0)$ 的 Hilbert 和；再者，若令 $f_n=f\varphi_{A_n}$，则 $f_n$ 是普遍可测与有界的，因而 $f_n(N)$ 是 $E$ 上的连续正规算子，它使得 $H_n$ 是稳定的，并且在 $H_n$ 的正交补空间上为零. 于是由 (15.12.8)，存在唯一的正规算子(未必有界)，它在每个 $H_n$ 上的限制是 $f_n(N)$；这就是我们记作 $f(N)$ 的算子. 显然 $\bar{f}(N)=(f(N))^*$. 此外，若 $g$ 是 $\boldsymbol{C}$ 到自身的另一普遍可测映射，则仍有

$$(f+g)(N)=f(N)+g(N),\ (fg)(N)=f(N)g(N),$$

这里等式具有 (15.12.1) 与 (15.12.5) 中所指出的意义. 事实上，此处只须考虑集 $A_{m,n}(m\geqslant 0,n\geqslant 0)$，它是由使得 $m\leqslant|f(\zeta)|<m+1$ 与 $n\leqslant|g(\zeta)|<n+1$ 的 $\zeta\in\boldsymbol{C}$ 所组成的. 令 $P_{mn}=\varphi_{A_{m,n}}(N)$，$H_{mn}=P_{mn}(E)$，$f_{mn}=f\varphi_{A_{m,n}}$，$g_{m,n}=g\varphi_{A_{m,n}}$，显见 $E$ 是这些 $H_{mn}$ 的 Hilbert 和，$H_{mn}$ 关于 $f_{mn}(N)$ 与 $g_{mn}(N)$ 是稳定的，并且 $f(N)$ (相应地，$g(N)$) 是使得它在每个 $H_{mn}$ 上的限制为 $f_{mn}(N)$

（相应地，$g_{mn}(N)$）的唯一正规算子．由关于每对 $(f_{mn}, g_{mn})$ 的类似性质，我们的论断得证．

## 问　　题

1）设 $E$，$F$ 是两个 Hilbert 空间，定义 $E$ 到 $F$ 的**未必有界算子**（或简称为 $E$ 到 $F$ 的**无界算子**）为 $E$ 的向量子空间 $\mathrm{dom}(T)$ 到 $F$ 的线性映射 $T$．如果 $T$ 的图象 $\Gamma(T)$ 在 $E\times F$ 内是闭的，则称算子 $T$ 是**闭算子**．

a）试证，若 $T$ 是闭的，则 $\mathrm{Ker}(T)$ 在 $E$ 内是闭的，并把（15.12.2）推广到 $E$ 到 $F$ 的无界算子上．

b）若 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密，则如（15.12.3）那样定义 $T$ 的**伴随算子** $T^*$，它是 $F$ 到 $E$ 的无界算子．把（15.12.4）推广到 $E$ 到 $F$ 的无界算子上．

c）以下假定 $T$ 是 $E$ 到 $F$ 的闭算子，其定义域 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密．试证 $\mathrm{Im}(T^*)$ 在 $E$ 内的闭包是 $\mathrm{Ker}(T)$ 的正交补空间．

d）假定 $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$，也即假定 $T$ 是单射，则为使 $\mathrm{Im}(T)=G$ 在 $F$ 内是闭的，必须且只须 $G$ 到 $E$ 的逆映射 $T^{-1}$ 是连续的（利用 a））．

e）关于 $\mathrm{Ker}(T)$ 不作任何假定，试证下列陈述是等价的：1° $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的；2° $\mathrm{Im}(T^*)$ 在 $E$ 内是闭的．（设 $G$ 是 $\mathrm{Im}(T^*)$ 在 $E$ 内的闭包；为证明1°蕴涵 2°，考虑 $T$ 在 $G\cap\mathrm{dom}(T)$ 上的限制 $T_1$．证明 $\mathrm{Im}(T_1)=\mathrm{Im}(T)$ 并利用 d）推断 $T_1^{-1}$ 连续．注意到映射 $x\to(T_1^{-1}\cdot x\,|\,y)$ 是 Hilbert 空间 $\mathrm{Im}(T)$ 上的连续线性形式以推断任何 $y\in G$ 都具有 $T^*\cdot x$ 的形式．）

f）令

$$\gamma(T)=\inf\frac{\|T\cdot x\|}{d(x,\mathrm{Ker}(T))},$$

这里下确界是使 $x$ 取遍 $\mathrm{Ker}(T)$ 在 $\mathrm{dom}(T)$ 内的余集而求的（$d$ 表示 $E$ 上的距离）．试证，为使 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的，必须且只须 $\gamma(T)>0$．（借助 $T_1^{-1}$ 来表示 $\gamma(T)$，其中 $T_1$ 是 e）中所考虑的算子．）试证 $\gamma(T^*)=\gamma(T)$．

g）假定 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的，试证若 $M\supset\mathrm{Ker}(T)$ 是 $E$ 的闭子空间，则 $T(M\cap\mathrm{dom}(T))$ 在 $F$ 内是闭的（把 $T$ 在 $M\cap\mathrm{dom}(T)$ 上的限制看作 $M$ 到 $F$ 的无界算子并利用 f））．

h）设 $N$ 是 $F$ 的闭子空间，使得 $N\cap\mathrm{Im}(T)=\{0\}$，试证若 $N+\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的，则 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内也是闭的．（考虑 $E\times N$ 到 $F$ 的算子 $T_2$，它在 $\mathrm{dom}(T)\times N$ 上由 $T_2(x,y)=T\cdot x+y$ 定义，并注意 $\gamma(T)\geqslant\gamma(T_2)$．）特别，若 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是有限余维的，则 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的．

2) 设 $E, F, H$ 是三个 Hilbert 空间，$T$ 是 $E$ 到 $F$ 的无界算子，$U$ 是 $H$ 到 $E$ 的无界算子．假定 $T$ 是闭的，$\text{dom}(T)$ 在 $E$ 内是稠密的，$\text{Ker}(T)$ 是有限维的，并且 $\text{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的．

a) 试证若 $U$ 是闭的，则 $TU$（定义在 $\text{dom}(U)\cap U^{-1}(\text{dom}(T))$ 上）也是闭的．（假定 $z_n\in H$ 趋于 $z$ 且 $TU\cdot z_n$ 趋于 $y\in F$．利用关系 $\gamma(T)>0$（问题 1）证明，在 $\text{Ker}(T)$ 中存在序列 $(x_n)$，使得 $U\cdot z_n+x_n$ 在 $E$ 内具有极限 $x$．利用 $\text{Ker}(T)$ 为局部紧这一事实，先证明序列 $(x_n)$ 必定有界（用反证法），然后从 $(x_n)$ 中选出收敛子序列．）

b) 试证若 $U$ 是闭的且若 $\text{Im}(U)$ 在 $E$ 内是闭的，则 $\text{Im}(TU)$ 在 $F$ 内是闭的（利用问题 1g）以及 (5.9.2)）．

c) 假定 $\text{Ker}(U)$ 是有限维的，试证 $\text{Ker}(TU)$ 是有限维的且 $\dim(\text{Ker}(TU))=\dim(\text{Ker}(U))+\dim(\text{Im}(U)\cap\text{Ker}(T))$．

d) 假定 $U$ 是闭的，$\text{dom}(U)$ 在 $H$ 内稠密且 $\text{Im}(U)$ 在 $E$ 内是有限余维的（由问题 1h），这蕴涵 $\text{Im}(U)$ 在 $E$ 内是闭的），证明此时 $\text{dom}(TU)$ 在 $H$ 内是稠密的．（考虑 $\text{Ker}(U)$ 在 $H$ 内的正交补空间 $H_1$ 与 $U$ 在 $\text{dom}(U)\cap H_1$（它在 $H_1$ 内稠密）上的限制 $U_1$；注意 $U_1^{-1}$ 在 $\text{Im}(U_1)=\text{Im}(U)$ 上连续且 $\text{dom}(T)\cap\text{Im}(U)$ 在 $\text{Im}(U)$ 内稠密．）

e) 假定 $\text{Im}(T)$ 与 $\text{Im}(U)$ 分别在 $F$ 与 $E$ 内是有限余维的，又设 $\nu$ 是 $\text{Im}(U)\cap\text{Ker}(T)$ 在 $\text{Ker}(T)$ 内的余维数，试证 $\text{Im}(TU)$ 在 $F$ 内是有限余维的且

$$\text{codim}(\text{Im}(TU))=\text{codim}(\text{Im}(T))+\text{codim}(\text{Im}(U))-\nu.$$

（注意 $E$ 是下列子空间的直和：$\text{Im}(U)$；$\text{Im}(U)\cap\text{Ker}(T)$ 在 $\text{Ker}(T)$ 内的一个补空间 $N_1$；以及包含在 $\text{dom}(T)$ 内的一个有限维子空间 $N_2$．注意 $T$ 在 $N_2$ 上的限制是单射．）

3) 设 $E, F$ 是两个 Hilbert 空间．我们仍把 $E$ 到 $F$ 的无界算子 $T$ 称为**指标算子**（15.11 问题 22），如果 $T$ 是闭的，$\text{dom}(T)$ 稠密，$\text{Ker}(T)$ 为有限维且 $\text{Im}(T)$ 为有限余维（此时由问题 1h），$T(E)=\text{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的）；数

$$i(T)=\dim(\text{Ker}(T))-\text{codim}(\text{Im}(T))$$

称为 $T$ 的**指标**．

a) 试证，若 $T$ 是 $E$ 到 $F$ 的指标算子，则 $T^*$ 是 $F$ 到 $E$ 的指标算子且有 $i(T^*)=-i(T)$（利用问题 1e））．

b) 由问题 2 推断，若 $U:H\to E$ 与 $T:E\to F$ 是指标算子，则 $TU:H\to F$ 也是指标算子且 $i(TU)=i(T)+i(U)$．

c) 设 $T_1$ 是 $E$ 到 $F$ 的无界算子，它是 $T$ 的延拓且使得 $\text{dom}(T_1)=\text{dom}(T)$

$\oplus M$，其中 $M$ 是 $E$ 的有限维子空间．试证若 $T$ 是闭的，则 $T_1$ 也是闭的；若 $\mathrm{Im}(T)$ 在 $F$ 内是闭的，则 $\mathrm{Im}(T_1)$ 在 $F$ 内也是闭的；若 $T$ 是指标算子，则 $T_1$ 也是指标算子且 $i(T_1) = i(T) + \dim(M)$（就 $\dim(M)$ 运用归纳推理）．

4）设 $E, F$ 是两个 Hilbert 空间，$T$ 是 $E$ 到 $F$ 的无界算子，并假定 $T$ 是闭的，$\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内处处稠密．设 $B$ 是 $E$ 到 $F$ 的连续算子．

a）试证对每个 $x \in \mathrm{Ker}(T+B)$，有

$$d(x, \mathrm{Ker}(T)) \leqslant \frac{\|B\|}{\gamma(T)} \|x\|.$$

由此推断，若 $\mathrm{Ker}(T)$ 为有限维，$\gamma(T) > 0$ 且 $\|B\| < \gamma(T)$，则 $\dim(\mathrm{Ker}(T+B)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(T))$（利用 6.3 问题 9）．又 $\mathrm{Im}(T+B)$ 在 $F$ 内是闭的（考虑 $T+B$ 在 $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Ker}(T+B)$ 在 $E$ 内的正交补空间上的限制）．

b）假定 $T$ 是指标算子且 $\|B\| < \gamma(T)$，试证此时有 $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T+B)) \leqslant \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T))$，且 $i(T+B) = i(T)$．（为证明第一个不等式，考虑$(T+B)^*$；为证明关于指标的等式，考虑 $\mathrm{Ker}(T)$ 的正交补空间并利用问题 3c），归结为 $T$ 是单射的情形，并注意此时对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，$\gamma(T+\lambda B)$ 是 $\lambda$ 的连续函数．）

5）一般的假定与问题 4 相同，并假定 $B$ 是 $E$ 到 $F$ 的紧算子．

a）试证若 $\mathrm{Ker}(T)$ 是有限维的且 $\mathrm{Im}(T)$ 是闭的，则 $\mathrm{Ker}(T+B)$ 是有限维的且 $\mathrm{Im}(T+B)$ 是闭的．（考虑 $\mathrm{Ker}(T)$ 的正交补空间 $M$，先证明 $M \cap \mathrm{Ker}(T+B) \subset M \cap \mathrm{dom}(T)$ 是有限维的，为此注意存在 $m > 0$，使对 $x \in M \cap \mathrm{dom}(T)$，有 $\|T \cdot x\| \geqslant m\|x\|$，并利用(5.9.4)．然后取 $M \cap \mathrm{Ker}(T+B)$ 在 $M$ 内的正交补空间 $N$，证明在 $N \cap \mathrm{dom}(T)$ 中不存在序列 $(x_n)$，使得 $\|x_n\| = 1$ 且 $T(x_n) + B(x_n)$ 趋于 0．）

b）由 a）推断，若 $T$ 是指标算子，则 $T+B$ 也是指标算子且 $i(T+B) = i(T)$．（为证明 $\mathrm{Im}(T+B)$ 是有限余维的，考虑 $T^* + B^*$；然后根据问题 4）证明 $\lambda \to i(T+\lambda B)$ 在 $[0, 1]$ 上是 $\lambda$ 的连续有限函数．）

c）假定 $E = F$ 且存在关于 $T$ 的正则值 $\zeta_0$，使得 $(T - \zeta_0 I)^{-1}$ 是紧算子．试证此时对每个 $\zeta \in \mathbf{C}$，$T - \zeta I$ 是指标为 0 的算子；$T$ 的谱在 $\mathbf{C}$ 内是离散可数集，它的所有点是 $T$ 的特征值，并且对 $T$ 的每个正则值 $\zeta$，$(T - \zeta I)^{-1}$ 是紧算子．（注意

$$\zeta I - T = (I + (\zeta - \zeta_0)(\zeta_0 I - T)^{-1})(\zeta_0 I - T)$$

并利用 Riesz 定理(11.4.1)．）由此导出指标为 0 而谱为空集的算子的例子（利用 11.6 问题 9）．

6）采用(15.12.8)证明中的记号，试证算子 $N_n$ 的谱包含在圆环 $S_n$；

$\sqrt{n-1}\leqslant|\zeta|\leqslant\sqrt{n}$内. 对 $F_n$ 的每对点 $x_n$, $y_n$, 存在支集包含在 $S_n$ 内的测度 $m^{(n)}_{x_n,y_n}$ 与 $N_n$ 对应. 若 $x=\sum_n x_n$, $y=\sum_n y_n$ 是 $E$ 的两个点, 其中 $x_n\in F_n$, $y_n\in F_n$, 则和 $m_{x,y}=\sum_n m^{(n)}_{x_n,y_n}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的有界复测度, 其范数 $\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$; $m_{x,x}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的质量为 $(x|x)$ 的有界测度; 子空间 $\operatorname{dom}(N)$ 是使得函数 $\zeta\to|\zeta|^2$ 关于 $m_{x,x}$ 为可积的 $x\in E$ 的集. 对 $\operatorname{dom}(N)$ 的每对点 $x, y$, 有 $m_{y,x}=\bar{m}_{x,y}$, $(x|y)=\int dm_{x,y}$, 且 $(N\cdot x|y)=\int f(\zeta)dm_{x,y}(\zeta)$.

7) 采用(15.12.13)与问题 6 的记号, 试证 $\operatorname{dom}(f(N))$ 是使得函数 $\zeta\to|f(\zeta)|^2$ 关于测度 $m_{x,x}$ 为可积的 $x\in E$ 的集, 且对 $\operatorname{dom}(f(N))$ 内的 $x, y$, 有$(f(N)\cdot x|y)=\int f(\zeta)dm_{x,y}(\zeta)$. 又证明 $\operatorname{Sp}(f(N))$ 包含在 $f(\operatorname{Sp}(N))$ 的闭包内. 若 $g$ 是 $\boldsymbol{C}$ 到自身的另一普遍可测映射, 试证 $(f\circ g)(N)=f(g(N))$ (参阅 13.9 问题 21). 若 $N=M_\mu(1_{\boldsymbol{C}})$ 是单连续正规算子 (15.11.3), 则 $\operatorname{dom}(f(N))$ 是使得 $fu$ 属于 $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(\mu)$ 的函数 $u\in\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(\mu)$ 的类所成的集, 且 $f(N)$ 是乘以 $f$ 的类的乘法.

8) 设 $N$ 是正规算子, $x$ 是 $\operatorname{dom}(N)$ 的点, $\|x\|=1$. 令 $\alpha_x=(N\cdot x|x)$, $\beta_x=\|N\cdot x\|$. 试证对每个 $\varepsilon>0$, 以 $\alpha_x$ 为心、以 $(\beta_x^2-|\alpha_x|^2)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon$ 为半径的开圆盘 $\Delta_x$ 与 $\operatorname{Sp}(N)$ 相交 (**Крылов–Weinstein 定理**)(在问题 6 的记号下, 证明

$$\beta_x^2-|\alpha_x|^2=\int|\zeta-\alpha_x|^2dm_{x,x}(\zeta),$$

于是导出 $\Delta_x$ 关于 $m_{x,x}$ 是零测度的, 这与假定相矛盾.)

9) 设 $H$ 是 $E$ 上的(有界或无界)自伴算子. 对每个(有界或无界)开区间 $J\subset\boldsymbol{R}$, 设 $P_J$ 是正交投影算子 $\varphi_J(H)$. 试证对每个 $x\in E$, 有 (**Titchmarsh-Kodaira 公式**)

$$2\pi iP_J\cdot x=\lim_{v\to0,v>0}\int_J\left(((u-iv)I-H)^{-1}\cdot x-((u+iv)I-H)^{-1}\cdot x)\right)du.$$

(对每个满足 $\|y\|\leqslant1$ 的 $y\in E$, 证明 $y$ 与 $2\pi iP_J\cdot x$ 减去上式右边的积分的差的纯量积对 $\|y\|\leqslant1$ 一致趋于 0, 为此利用这个差借助测度 $m_{x,y}$ (问题 6)的表达式, Lebesgue-Fubini 定理与控制收敛定理.)

10) 试证, 对每个使得 $\operatorname{dom}(T)$ 在 $E$ 内为稠密的 $E$ 上的闭算子 $T$, 存在正自伴算子 $R$, 使得 $\operatorname{dom}(R)=\operatorname{dom}(T)$, 并存在 $\overline{R(\operatorname{dom}(R))}$ 到 $\overline{T(\operatorname{dom}(T))}$ 上的等距 $V$, 使得 $T=VR$. (如(15.12.8)的证明那样进行, 定义 $F_n\subset\operatorname{dom}$

$(T^*T)\subset\mathrm{dom}(T)$，使得 $T^*T$ 在 $F_n$ 上的限制是连续正自伴算子 $H_n$，对于 $H_n$ 我们可以取平方根 $R_n$；对 $x_n\in F_n$，有 $\|T\cdot x_n\|=\|R_n\cdot x_n\|$，因而存在 $R_n(F_n)$ 到 $T(F_n)$ 上的等距 $V_n$，使得 $T|F_n=V_nR_n$。设 $R$ 是正自伴算子，它在每个 $F_n$ 上的限制是 $R_n$；证明 $V_n$ 是 $\overline{R(\mathrm{dom}(R))}$ 到 $\overline{T(\mathrm{dom}(T))}$ 上的等距 $V$ 的限制，为此考虑 $F_n$ 的有限和并利用 $T$ 为闭与 $\mathrm{dom}(R)$ 在 $\mathrm{dom}(T)$ 内为稠密这个事实；最后证明 $V^{-1}T$ 是闭算子，它在每个 $F_n$ 上与 $R_n$ 相同，并由此推断 $\mathrm{dom}(R)=\mathrm{dom}(T)$ 与 $V^{-1}T=R$。）

11）设 $T$ 是 $E$ 上的闭算子，使得 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密且 $T(\mathrm{dom}(T))\subset\mathrm{dom}(T^*)$，试证 $\mathrm{dom}(T)=E$，并且 $T$ 是连续的。（若 $B=(I+TT^*)^{-1}$ 且若对每个 $y\in E$，有 $x=B\cdot y$，则利用 $x\in\mathrm{dom}(T^*)$ 可证明所作假定蕴涵 $y\in\mathrm{dom}(T^*)$。）

12）设 $N$ 是 $E$ 上的正规算子，试证，若 $\mathrm{dom}(N^2)=\mathrm{dom}(N)$，则 $N$ 是连续的。(注意在相反情形下，将存在 $E$ 的闭子空间 $F$，使得 $F$ 是非零子空间的无穷序列 $(F_n)$ 的 Hilbert 和，且这些 $F_n$ 在 $N$ 与 $N^*$ 下都是稳定的，并使得 $N$ 在 $F_n$ 上的限制 $N_n$ 是连续算子，且对 $x_n\in F_n$ 有 $a_n\|x_n\|\leqslant\|N_n\cdot x_n\|\leqslant a_{n+1}\|x_n\|$，其中序列 $(a_n)$ 递增且趋于 $+\infty$。)

## 13. Hermite 算子的延拓

**(15.13.1)** 设 $E$ 是可分 Hilbert 空间。$E$ 上的未必有界算子 $H$ 称为 **Hermite 算子**，如果 1°$\mathrm{dom}(H)$ 在 $E$ 内稠密；2°$\mathrm{dom}(H)\subset\mathrm{dom}(H^*)$，且 $H^*$ 在 $\mathrm{dom}(H)$ 上的限制等于 $H$；换言之，对 $\mathrm{dom}(H)$ 中任何 $x$，$y$，有

**(15.13.1.1)** $$(H\cdot x|y)=(x|H\cdot y).$$

特别，对一切 $x\in\mathrm{dom}(H)$，$(H\cdot x|x)$ 是实的。

注意 $H^*$ 一般不是 Hermite 算子。当 $H$ 为连续时，这个定义与(11.5)中的定义一致，并且连续 Hermite 算子就是连续自伴算子。未必有界自伴算子是 Hermite 算子，但下面即将看到，存在非自伴的闭 Hermite 算子。

**(15.13.2)** 例．设 $\mathscr{D}$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 内任意次可导且具有紧支集的复值函数组成的向量空间；若 $\beta$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度，则 $\mathscr{D}$ 等同于

$L^2_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{R},\beta)$ 的一个子空间 (13.19)，这个子空间在 $L^2_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{R},\beta)$ 内处处稠密 (17.1.2)。由分部积分公式 (8.7.5) 与属于$\mathscr{D}$的函数在某个紧区间之外为零这一事实立即推出，对$\mathscr{D}$中的 $x$, $y$, 有

$$(Dx|y) = \int Dx(t)\overline{y(t)}\,dt = -\int x(t)\overline{Dy(t)}\,dt = -(x|Dy),$$

这也能表述为 $iD = H$ 是 Hermite 算子. 当用 $L^2_{\mathbf{C}}(I,\beta)$ (其中 $I$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内的一个(有界或无界)开区间)代替 $L^2_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{R},\beta)$，并用在 $I$ 内任意次可导且具有紧支集的复值函数所成的子空间 $\mathscr{D}(I)$ 代替$\mathscr{D}$时，结论完全相同. 显然$D$的图象不是闭的，因为它的闭包含有，例如，这样的二元组 $(x, Dx)$，其中 $x$ 是 $C^1$ 类但不是 $C^2$ 类的函数，且 $\mathrm{Supp}(x)$ 是紧集 (17.1.2)。

**(15.13.3)** 设$H$是 Hermite 算子；因为 $\mathrm{dom}(H^*)$ 在 $E$ 内稠密，所以$H$的闭包 $H^{**}$ 存在，且由于 $H^{**}$ 的图象是 $H$ 的图象的闭包 (15.12.4)，故通过连续性由 (15.13.1.1) 推出 $H^{**}$ 也是 Hermite 算子. 于是我们就可以限于研究闭 Hermite 算子.

**(15.13.4)** (i) 设$H$是$E$上的闭 Hermite 算子，则对每个实数 $\alpha \neq 0$，闭算子 $H + \alpha iI: x \to H\cdot x + \alpha ix$ 是 $\mathrm{dom}(H)$ 到$E$的单射，它的象 $F_\alpha$ 是$E$的闭子空间，且算子 $(H + \alpha iI)^{-1}$(15.12.5) 在 $F_\alpha$ 上连续.

(ii) $F_1$ 到$E$的线性映射

**(15.13.4.1)** $\qquad V: x \to (H - iI)(H + iI)^{-1}\cdot x$

是 $F_1$ 到闭子空间 $V(F_1) = F_{-1}$ 上的等距；映射 $I - V: F_1 = \mathrm{dom}(V) \to E$ 是 $\mathrm{dom}(V)$ 到 $\mathrm{dom}(H)$ 上的双射，且对一切 $y \in \mathrm{dom}(H)$，有

**(15.13.4.2)** $\qquad H\cdot y = i(I + V)(I - V)^{-1}\cdot y.$

(iii) 反之，设$F$是$E$的闭子空间，$U$是$F$到$E$的一个子空间上的等距，使得 $F = \mathrm{dom}(U)$ 在 $I - U$ 下的象$G$在$E$内稠密，则算子 $I - U$ 是$F$到$G$上的双射，且若对每个 $y \in G$，令

**(15.13.4.3)** $\qquad H\cdot y = i(I + U)(I - U)^{-1}\cdot y,$

则$H$是闭 Hermite 算子，$\mathrm{dom}(H) = G$；而且由 (15.13.4.1) 所定义

的算子 $V$ 等于 $U$.

根据(15.13.1.1)，对一切 $y\in \operatorname{dom}(H)$，有

(15.13.4.4) $$\|H\cdot y+\alpha iy\|^2=(H\cdot y|H\cdot y)+\alpha i(y|H\cdot y)-\alpha i(H\cdot y|y)+\alpha^2(y|y)=\|H\cdot y\|^2+\alpha^2\|y\|^2\geqslant\alpha^2\|y\|^2,$$

这表明 $H+\alpha iI$ 是单射且 $F_\alpha$ 到 $\operatorname{dom}(H)$ 上的逆映射连续(5.5.1). 此外，由于算子 $(H+\alpha iI)^{-1}$ 连续且它的图象是闭的(15.12.5)，所以 $F_\alpha$ 是 $E$ 的闭子空间(15.12.2). 若在(15.13.4.4)中令 $\alpha=-1$，$y=(H+iI)^{-1}\cdot x$，其中 $x\in F_1$，即得 $\|(H-iI)\cdot y\|^2=\|(H+iI)\cdot y\|^2$，即对一切 $x\in F_1$ 有 $\|V\cdot x\|=\|x\|$；由于子空间 $V(F_1)$ 与 $F_1$ 等距，故它是完备的，因而是闭的(3.14.4). 另一方面，对于一切 $x\in F_1$，由关系 $H\cdot y+iy=x$ 与 $H\cdot y-iy=V\cdot x$ 推出

$$iy=\frac{1}{2}(x-V\cdot x),\quad H\cdot y=\frac{1}{2}(x+V\cdot x);$$

这表明对 $x\in F_1$，若 $x-V\cdot x=0$，则必有 $x+V\cdot x=0$，于是 $x=0$，从而(i)与(ii)的证明得以完成.

现在来证明(iii). 由 $U$ 为等距的假定推出，对 $F$ 中的 $x,y$，有

(15.13.4.5) $$(x|y-U\cdot y)+(x-U\cdot x|U\cdot y)=0.$$

因而，若 $x-U\cdot x=0$，则 $x$ 正交于 $G$. 又因为 $G$ 在 $E$ 内稠密，所以 $x=0$. 其次，证明由(15.13.4.3)所定义的 $H$ 是 Hermite 算子. 事实上，对 $G$ 中的 $x,y$，可写 $x=u-U\cdot u, y=v-U\cdot v$，其中 $u,v$ 都属于 $F$. 因为 $(U\cdot u|U\cdot v)=(u|v)$，由此得到

$$\begin{aligned}(H\cdot x|y)&=(i(u+U\cdot u)|v-U\cdot v)\\&=i((U\cdot u|v)-(u|U\cdot v))\\&=(u-U\cdot u|i(v+U\cdot v))=(x|H\cdot y),\end{aligned}$$

这就证明了刚才的论断. 下面证明 $H$ 是闭的. 若 $(y_n)$ 是 $G$ 中的点列，它趋于 $E$ 中的点 $y$，并使序列 $(H\cdot y_n)$ 收敛于点 $z\in E$，则点

$$x_n=H\cdot y_n+iy_n=2i(I-U)^{-1}\cdot y_n$$

属于 $F$，且点列 $(x_n)$ 收敛于 $x=z+iy\in F$；由于 $U$ 在 $F$ 上连续，从而 $(I-U)\cdot x_n=2iy_n$ 所成的序列收敛于 $G$ 的一个点，这表明

$y \in G$，且 $(I-U)\cdot x=2iy$。另一方面，基于同样的理由，点 $(I+U)\cdot x_n=2H\cdot y_n$ 所成的序列收敛于 $(I+U)\cdot x=2z$，因此 $H\cdot y=z$，这表明 $H$ 是闭的。最后，若 $x=u-U\cdot u$，其中 $u\in F$，则 $H\cdot x=i(u+U\cdot u)$，而验证关系式 $V\cdot u=U\cdot u$ 是简单的。

(15.13.4.1) 中定义的等距线性映射 $V$ 称为 $H$ 的 **Cayley 变式**，而命题 (15.13.4) 使得对于 Hermite 算子的研究归结为对于它的 Cayley 变式的研究。

**(15.13.5)** 保持 (15.13.4) 的记号，设 $E_H^+$ 是闭子空间 $F_1=\mathrm{dom}(V)$ 的正交补空间 $(\mathrm{dom}(V))^\perp$，$E_H^-$ 是闭子空间 $V(F_1)=F_{-1}$ 的正交补空间 $(V(\mathrm{dom}(V)))^\perp$。

**(15.13.6)** (i) 子空间 $E_H^+$（相应地，$E_H^-$）是使得 $H^*\cdot x=ix$（相应地，$H^*\cdot x=-ix$）的 $x\in\mathrm{dom}(H^*)$ 所成的集，而 $\mathrm{dom}(H^*)$ 是 $\mathrm{dom}(H)$，$E_H^+$ 与 $E_H^-$ 的直和。

(ii) 设 $G^+$（相应地，$G^-$）是 $\Gamma(H^*)$ 的子空间，使得它在 $E$ 上的第一个投影是 $E_H^+$（相应地，$E_H^-$），则 $G^+$ 与 $G^-$ 在 $E\times E$ 内是闭的，并且 $\Gamma(H^*)$ 是 $\Gamma(H)$，$G^+$ 与 $G^-$ 的 Hilbert 和。

$x\in E_H^+$ 当且仅当对一切 $y\in\mathrm{dom}(H)$，都有

$$(H\cdot y+iy|x)=2i((I-V)^{-1}\cdot y|x)=0,$$

即 $(H\cdot y|x)=(y|ix)$；由定义 (15.12.3)，这意味着 $x\in\mathrm{dom}(H^*)$ 且 $H^*\cdot x=ix$。对 $x\in E_H^-$，推理相同，只须注意 $V(F_1)$ 是当 $y$ 取遍 $\mathrm{dom}(H)$ 时 $H\cdot y-iy$ 的集。

设 $x$ 是 $\mathrm{dom}(H^*)$ 的任一点，把 $H^*\cdot x+ix$ 分解为它在正交补空间 $\mathrm{dom}(V)$ 与 $E_H^+$ 上的投影，就给出 $H^*\cdot x+ix=H\cdot y+iy+z$，其中 $y\in\mathrm{dom}(H)$，$z\in E_H^+$；由于 $H\cdot y=H^*\cdot y$ 且 $H^*\cdot z=iz$，故 $z=H^*\cdot z_1+iz_1$，其中 $z_1=z/2i$，我们可以写 $H^*\cdot x+ix=H^*\cdot y+iy+H^*\cdot z_1+iz_1$。令 $z_2=x-y-z_1$，则有 $H^*\cdot z_2=-iz_2$，因而 $z_2\in E_H^-$，这表明 $\mathrm{dom}(H^*)$ 是 $\mathrm{dom}(H)$，$E_H^+$ 与 $E_H^-$ 的和。由此推出 $\Gamma(H^*)$ 是 $\Gamma(H)$，$G^+$ 与 $G^-$ 的和。

$G^+$（相应地，$G^-$）为闭的事实由这个子空间是 $E\times E$ 的闭子

空间 $\Gamma(H^*)$ 与使得 $y=ix$（相应地，$y=-ix$）的 $(x,y)$ 所成的子空间（它显然是闭的）的交得到．于是只须证明，$G^+$ 与 $G^-$ 正交于 $\Gamma(H)$，且 $G^+$，$G^-$ 互相正交．后者是显见的，因为按照定义，有

$$((x_1,ix_1)|(x_2,-ix_2))=(x_1|x_2)+(ix_1|-ix_2)=0.$$

另一方面，若 $x\in\text{dom}(H)$，$y\in E_H^-$，则有

$$((x,H\cdot x)|(y,-iy))=(x|y)+i(H\cdot x|y)$$
$$=(x|y)+i(x|H^*\cdot y),$$

按照定义有 $H^*\cdot y=-iy$，所以我们又得到上式等于 0．同理可证 $G^+$ 与 $\Gamma(H)$ 正交．证毕．

**(15.13.7)** 闭 Hermite 算子 $H$ 的**亏量**定义为数偶 $(m,n)$，其中 $m$，$n$ 分别等于 $E_H^+$，$E_H^-$ 的维数，如果此维数为有限，否则令它等于 $+\infty$．$m$ 与 $n$ 分别称为 $H$ 的**正亏量与负亏量**．

**(15.13.8)** 为使闭 Hermite 算子 $H$ 是自伴的，必须且只须它的亏量是 $(0,0)$，换言之，必须且只须 $H$ 的 Cayley 变式是酉变换．为使 $H$ 能延拓为一个自伴算子，必须且只须它的亏量具有 $(m,m)$ 的形式．

第一个论断由 (15.13.6) 立即得到．另一方面，若 $H$ 是自伴算子 $A$ 的限制，则 $H$ 的 Cayley 变式 $V$ 是 $A$ 的 Cayley 变式 $U$ 的限制，而 $U$ 是酉变换；于是按定义有 $E_H^-=U(E_H^+)$，因为 $U$ 是 Hilbert 空间 $E$ 的自同构，因而 $H$ 的亏量正好具有 $(m,m)$ 的形式．反之，如果 $H$ 的亏量具有这样的形式，则存在 Hilbert 空间 $E$ 的自同构 $U$，使得在 $\text{dom}(V)$ 上，$U$ 与 $V$ 相同，并且 $U(E_H^+)=E_H^-$（因为两个维数相等的有限维 Hilbert 空间或两个无穷维可分 Hilbert 空间是同构的 (6.6.2)）．由于 $U$ 是 $E$ 上的酉算子，且 $E$ 在 $I-U$ 下的象（它包含 $\text{dom}(H)$）在 $E$ 内稠密，所以 $U$ 是延拓 $H$ 的一个自伴算子的 Cayley 变式．

如果 Hermite 算子 $H$ 的闭包 $H^{**}$ 是自伴算子，则称 $H$ 是**本质自伴的**．

**(15.13.9)** 例．设 $(e_n)_{n\geq 0}$ 是无穷维可分 Hilbert 空间 $E$ 的一个 Hilbert 基，$F$ 是 $E$ 的由指标 $n\geq 1$ 的 $e_n$ 所生成的闭超平面，它是直

线 $\boldsymbol{C}e_0$ 的正交补空间，记 $U'$ 为 $F$ 到 $E$ 上的等距，满足：对 $n \geqslant 1$，有 $U' \cdot e_n = e_{n-1}$。我们证明 $I - U'$ 的象 $G'$ 在 $E$ 内稠密。事实上，$G'$ 含有向量 $e_n - e_{n+1} (n \geqslant 0)$，且若 $E$ 的向量 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ 与所有向量 $e_m - e_{m+1} (m \geqslant 0)$ 正交，则必有 $\xi_m = \xi_{m+1} (m \geqslant 0)$，从而所有 $\xi_n (n \geqslant 0)$ 都相等，而这与下述事实矛盾：若对一切 $n$ 有 $\xi_n = 0$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2$ 收敛。由此得到 $U'$ 是亏量为 $(1, 0)$ 的一个闭 Hermite 算子的 Cayley 变式；因而 $H'' = -H'$ 是亏量为 $(0,1)$ 的闭 Hermite 算子(15.13.6)。可以证明，存在亏量为 $(m, n)$ 的闭 Hermite 算子，其中 $m$ 与 $n$ 是集 $\boldsymbol{N} \cup \{+\infty\}$ 中任意的元(问题 7)。

在第二十三章中，我们将借助广义函数理论来研究如何描述(15.13.2)中定义的 Hermite 算子 $H = iD$ 的闭包。在那里将证明，若区间 $I$ 有界，则 $H^{**}$ 的亏量为 $(1, 1)$；若 $I$ 上有界而下无界，则为 $(1, 0)$；若 $I$ 下有界而上无界，则为 $(0, 1)$；最后，若 $I = \boldsymbol{R}$，则为 $(0,0)$。

定理 (15.13.6) 可推广如下：

**(15.13.10)** 对每个满足 $\mathscr{I}\lambda > 0$ 的复数 $\lambda$，$\operatorname{dom}(H^*)$ 内由 $H^* \cdot x = \lambda x$ (相应地，$H^* \cdot x = -\lambda x$) 的解组成的子空间 $E^+(\lambda)$(相应地，$E^-(\lambda)$) 同构于 $E_H^+$(相应地，$E_H^-$)。

由于 $\Gamma(H^*)$ 的子空间 $G^- + \Gamma(H)$ 在 $E \times E$ 内是闭的(15.13.6)，所以 $H^*$ 在 $\operatorname{dom}(H_1) = E_H^- + \operatorname{dom}(H)$ 上的限制 $H_1$ 是闭算子。令 $\lambda = \mu + i\nu$，其中 $\mu, \nu$ 为实数且 $\nu > 0$，并对 $x = y + z \in \operatorname{dom}(H_1)$ (其中 $y \in \operatorname{dom}(H)$，$z \in E_H^-$) 计算 $\|(H_1 - \lambda I) \cdot x\|^2$。为此注意，

$$(H_1 \cdot x | x) = (H \cdot y - iz | y + z) = (H \cdot y | y) + (H \cdot y | z) - i(z | y) - i\|z\|^2,$$

且由于 $H^* \cdot z = -iz$，故 $(H \cdot y | z) = (y | H^* \cdot z) = i(y | z)$。根据前面的计算与 $\nu > 0$ 的假定，有

**(15.13.10.1)** $\|(H_1 - \lambda I) \cdot x\|^2 = \|(H_1 - \mu I) \cdot x\|^2 + \nu^2\|x\|^2$

$$+ i\nu((H_1 \cdot x | x) - (x | H_1 \cdot x))$$
$$= \|(H_1 - \mu I) \cdot x\|^2 + \nu^2\|x\|^2 + 2\nu\|x\|^2 \geqslant \nu^2\|x\|^2.$$

若令 $F = \operatorname{Im}(H_1 - \lambda I)$，则 $H_1 - \lambda I$ 是 $\operatorname{dom}(H_1)$ 到 $F$ 上的双射且逆算子 $(H - \lambda I)^{-1}$ 是赋范空间 $F$ 到 $E$ 的连续线性映射；由于 $H_1$ 是闭算子，所以 $H_1 - \lambda I$ 也是闭算子，因而得知 (15.12.2) $E$ 的子空间 $F$ 在 $E$ 内是闭的． 现在证明，实际上还有 $F = E$． 注意当 $\lambda = i$ 时此论断为真．为此只须证明，若对一切 $x \in \operatorname{dom}(H_1)$ 有 $((H_1 - iI) \cdot x | z) = 0$，则必有 $z = 0$．而由伴随算子的定义(15.12.3)，首先有 $z \in \operatorname{dom}(H_1^*)$，又对一切 $x \in \operatorname{dom}(H_1)$ 有 $(x | H_1^* \cdot z + iz) = 0$．由于 $\operatorname{dom}(H_1)$ 在 $E$ 内稠密，故 $H_1^* \cdot z + iz = 0$．因为 $\operatorname{dom}(H) \subset \operatorname{dom}(H_1)$，我们有

$$\operatorname{dom}(H_1^*) \subset \operatorname{dom}(H^*),$$

且 $H_1^*$ 是 $H^*$ 的限制，因而 $H^* \cdot z + iz = 0$，换言之，$z \in E_H^-$．然而按照定义有 $E_H^- \subset \operatorname{dom}(H_1)$，所以

$$0 = (z | (H_1^* + iI) \cdot z) = ((H_1 - iI) \cdot z | z)$$
$$= ((H^* - iI) \cdot z | z) = -2i\|z\|^2,$$

由此最后得到 $z = 0$．

为证明 $\mathscr{I}\lambda > 0$ 时也有 $F = E$，注意到如果这个关系对 $\lambda = \lambda_0$ 为真，则根据 (15.13.10.1)，算子 $(H_1 - \lambda_0 I)^{-1}$ 处处有定义并连续，且有

$$\|(H_1 - \lambda_0 I)^{-1}\| \leqslant |\mathscr{I}\lambda_0|^{-1}.$$

由 (15.12.11) 得到，对 $|\lambda - \lambda_0| < |\mathscr{I}\lambda_0|$，$(H_1 - \lambda I)^{-1}$ 处处有定义并连续．由归纳法可知，对 $\left|\lambda - \left(\frac{3}{2}\right)^n i\right| < \left(\frac{3}{2}\right)^n$，$(H_1 - \lambda I)^{-1}$ 处处有定义并连续，而因为整数 $n$ 是任意的，所以对半平面 $\mathscr{I}\lambda > 0$ 内的一切 $\lambda$，$(H_1 - \lambda I)^{-1}$ 都有定义．

这样，我们就对满足 $\mathscr{I}\lambda > 0$ 的一切 $\lambda$ 定义了 $E$ 上的连续算子 $A(\lambda) = (H_1 - \lambda I)^{-1}$，它的象等于 $\operatorname{dom}(H_1) \subset \operatorname{dom}(H^*)$． 由于 $(H_1 - \lambda I)A(\lambda) = I$，所以对满足 $\mathscr{I}\alpha > 0$，$\mathscr{I}\beta > 0$ 的两个复数 $\alpha, \beta$，算子 $K(\alpha, \beta) = (H_1 - \alpha I)A(\beta) = I + (\beta - \alpha)A(\beta)$ 处处有定义且连续；又算子 $A(\beta)(H_1 - \beta I)$ 在 $\operatorname{dom}(H_1)$ 上是恒等算

子，因而有

(15.13.10.2) $K(\alpha,\beta)K(\beta,\gamma)=K(\alpha,\gamma),\ K(\alpha,\alpha)=I,$

故算子 $K(\alpha,\beta)$ 是可逆的与双方连续的。

这样，对一切 $x\in\operatorname{dom}(H^*)$，有 $K(i,\lambda)\cdot x\in\operatorname{dom}(H^*)$，$(H^*-\lambda I)\cdot(K(i,\lambda)\cdot x)=(H^*-\lambda I)\cdot x+(\lambda-i)(H^*-\lambda I)A(\lambda)\cdot x=(H^*-iI)\cdot x$，同样地有 $(H^*-\lambda I)\cdot(K(\lambda,i)\cdot x)=(H^*-\lambda I)\cdot x$。这表明 $K(i,\lambda)$ 是 $E_H^+$ 到 $E^+(\lambda)$ 上的双方连续双射。对 $E^-(\lambda)$ 可作同样的推理。

## 问　题

1) 可分 Hilbert 空间 E 上的无界自伴算子 $H$ 称为单的，如果存在 $x\in\operatorname{dom}(H)$，使得向量 $H^n\cdot x(n\geqslant1)$ 属于 $\operatorname{dom}(H)$ 且在 $\operatorname{dom}(H)$ 内形成一个全子集。

a) 试证若 $H$ 是单的，则存在 $\boldsymbol{R}$ 上的有界正测度 $\mu$ 与 $L_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 到 $E$ 上的同构 $T$，使得 $H=TM_\mu T^{-1}$，其中 $M_\mu$ 是乘以 $L_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 中的函数 $1_{\boldsymbol{R}}:\xi\to\xi$ 的类的乘法，因而子空间 $\operatorname{dom}(M_\mu)$ 由使得 $\xi\to\xi f(\xi)$ 为平方 $\mu$ 可积的函数 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 的类所构成。(利用 15.12 问题 7，考虑有界算子 $\varphi_{I_n}(H)$，其中 $I_n=[n,n+1]$，$n\in\boldsymbol{Z}$。)

b) 设 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界正测度，试证函数 $\xi\to\exp(-\xi^2)$ 的类 $\tilde{g}$ 使得 $\tilde{g}_n=M_\mu^n\cdot\tilde{g}(n\geqslant0)$ 属于 $\operatorname{dom}(M_\mu)$ 且在 $L_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 内形成一个全子集。(设 $f\in\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 是使得

$$\int t^n\exp(-t^2)f(t)d\mu(t)=0$$

对一切非负整数 $n$ 都成立的函数，则作为测度 $f\cdot\mu$ 的正则化的任一连续函数 (14.11) $F=\rho*(f\cdot\mu)$ 关于 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度正交于所有函数 $\xi\to\xi^n\exp(-\xi^2)(n\geqslant0)$，因而它恒等于零；由此推断 $f\cdot\mu=0$，于是 $f$ 关于 $\mu$ 等价于 0。

c) 如果把正交规范化过程 (6.6) 应用于向量 $\tilde{g}_n(n\geqslant0)$，就得到 $L_{\mathbf{C}}^2(\mu)$ 的一个 Hilbert 基 $(e_n)_{n\geqslant0}$，其中 $e_n$ 是形如 $P_n(\xi)\exp(-\xi^2)$ 的函数的类，$P_n$ 是完全确定的 $n$ 次实系数多项式，且其 $n$ 次项系数大于 0. 由此推断，若令 $a_{mn}=(M_\mu\cdot e_n|e_m)$，则当 $|m-n|>1$ 时有 $a_{mn}=0$，且 $a_{n,n+1}>0$. 为简单起见，令 $a_n=a_{nn}$，$b_n=a_{n,n+1}=a_{n+1,n}$，于是算子 $M_\mu$ 关于 Hilbert 基 $(e_n)$ 的无穷矩阵

是 Jacobi 矩阵

$$(1)\qquad J=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

d) 设 $\nu$ 是关于 $\mu$ 以 $\exp(-t^2)$ 为密度的测度，对 $n\geqslant 0$，令

$$c_n=\int t^n d\nu(t)$$

($\nu$ 的"矩"，参阅 13.20 问题 5)；对 $\nu$ 乘以一个常数，可以假定 $c_0=1$。如果作 Gram 行列式 (6.6 问题 3)

$$(2)\qquad D_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}\quad (n\geqslant 0)$$

(这些行列式全部大于 0)，则有 $P_0(\xi)=1$，且对 $n\geqslant 1$ 有

$$(3)\qquad P_n(\xi)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & \xi & \cdots & \xi^n \end{vmatrix};$$

此外还有

$$(4)\qquad b_n=\frac{\sqrt{D_{n-1}D_{n+1}}}{D_n}.$$

e) 反之，对 $\boldsymbol{R}$ 上的每个(有界或无界)正测度 $\mu$，试证算子 $M_\mu$ (它一般是无界的)是自伴的并且是单的.

2) 反之，给定 Jacobi 矩阵 $J$ (问题 1 中的公式(1))，其中 $a_n$ 是实数，$b_n$ 是正实数，此外不加任何别的条件. 设 $(e_n)_{n\geqslant 0}$ 是 Hilbert 空间 $L^2_{\mathbf{C}}$(6.5)的典则 Hilbert 基. 我们如下地定义 Hermite 算子 $H$：它的定义域等于 $L^2_{\mathbf{C}}$ 的由 $e_n$ 的(有限)线性组合所生成的子空间 $G$，且令

$$H\cdot e_n=b_{n-1}e_{n-1}+a_ne_n+b_ne_{n+1}(n\geqslant 0),$$

约定 $e_{-1}=0, b_{-1}=0$. 在使用记号比较随便时，我们还是以 $H$ 记 Hermite 算子 $H$ 的闭包.

a) 设 $\zeta$ 是一个复数，$y=\sum_{n=0}^{\infty} y_ne_n$ 是 $H^*$ 的对应于特征值 $\zeta$ 的特征向量.

试证必有 $y_n = P_n(\zeta)y_0$，其中 $P_n$ 是 $n$ 次多项式，它由下面的递推公式确定：

$$P_0(\zeta) = 1,$$

(1) $$b_n P_{n+1}(\zeta) = (\zeta - a_n)P_n(\zeta) - b_{n-1}P_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1.$$

由此推断，如果对某个满足 $\mathscr{I}\zeta \neq 0$ 的 $\zeta \in \boldsymbol{C}$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\zeta)|^2 < +\infty$，则 $H$ 的亏量等于(1,1)；在这种情形下，关系式 $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\zeta)|^2 < +\infty$ 对于满足 $\mathscr{I}\zeta \neq 0$ 的一切 $\zeta$ 成立．在相反的情形下，$H$ 的亏量等于 (0,0)，换言之，$H$ 是自伴的(采用上面所作的比较随便的语言)．在这两种情形下，都存在 $H$ 的自伴延拓．

b) 设 $F$ 是 $\mathscr{C}_C(\boldsymbol{R})$ 的由复系数多项式组成的子空间，试证在 $F$ 上存在唯一的线性形式 $\alpha_F$，使得

$$\alpha_F(P_n P_m) = \delta_{mn}$$

($\delta_{mn}$ 是 Kronecker 指标)．(注意若一个多项式可写成 $RS$ 的形式，其中 $R = \sum_j u_j P_j$，$S = \sum_j v_j P_j$，则应有 $\alpha_F(RS) = \sum_j u_j v_j$，这就证明了 $\alpha_F$ 的唯一性．为证明存在性，只须证明，如果把乘积 $U(x) = (x - x_0)R(x)S(x)$ 写成 $((x - x_0)R(x))S(x)$ 与 $R(x)((x - x_0)S(x))$ 两种形式(这里 $x_0$ 是任一复数)，则从这两个乘积出发计算 $\alpha_F(U)$ 必给出相同的值；为此归结为 $R$ 与 $S$ 都等于某个 $P_n$ 的情形并利用关系式 (1).)

c) 由 b) 推断，在 $\boldsymbol{R}$ 上至少存在一个有界正测度 $\nu$，使得幂 $t^n(n \geq 0)$ 关于 $\nu$ 是可积的且可延拓为线性形式 $\alpha_F$，使得 $(P_n)$ 成为 $\mathscr{L}^2_C(\nu)$ 中的一个(不一定是全的)正规正交系 (利用 13.20 问题 5)．所有这样的测度都具有同样的“矩”

$$c_n = \int t^n d\nu(t) \quad (n \geq 0);$$

每个 $c_n$ 是 $a_j$ 与 $b_j(0 \leq j \leq n-1)$ 的整系数有理分式，且 $P_n(\xi)$ 作为 $c_n$ 的函数由问题 1 中的公式 (3) 给出．

d) 对 c) 中定义的每个测度 $\nu$，若 $\mathscr{I}\zeta \neq 0$，可以写

$$\int \frac{1}{t - \zeta} P_n(t) d\nu(t) = Q_n(\zeta) + w_\nu(\zeta)P_n(\zeta),$$

其中

(2) $$Q_n(\zeta) = \int \frac{P_n(t) - P_n(\zeta)}{t - \zeta} d\nu(t)$$

是次数不大于 $n-1$ 的多项式，而

$$(3)\qquad w_\nu(\zeta)=\int\frac{d\nu(t)}{t-\zeta}.$$

由此推断，对 $\mathscr{I}\zeta\neq 0$，有

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|Q_n(\zeta)+w_\nu(\zeta)P_n(\zeta)|^2\leqslant\int\frac{d\nu(t)}{|t-\zeta|^2}=\frac{w_\nu(\zeta)-\overline{w_\nu(\zeta)}}{\zeta-\bar\zeta}.$$

为使(4)中等号对于满足 $\mathscr{I}\zeta\neq 0$ 的某个 $\zeta$ 成立(此时等号对所有这样的 $\zeta$ 成立)，必须且只须多项式在 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\nu)$ 内形成一个稠密集.（为证明所述条件是充分的，试证由此可以推出，若函数 $g\in\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\nu)$ 与所有多项式正交，则对 $\mathscr{I}\zeta>0$ 有 $\int\frac{g(t)d\nu(t)}{t-\zeta}=0$，并且利用 14.11 问题16.）

3) a) 假定与记号同问题 2，考虑两个复数序列 $(y_n)$，$(z_n)$，它们满足递推关系

$$(1)\qquad \lambda y_n=b_{n-1}y_{n-1}+a_ny_n+b_ny_{n+1},$$

$$(2)\qquad \mu z_n=b_{n-1}z_{n-1}+a_nz_n+b_nz_{n+1}$$

($\lambda$，$\mu$ 是任意复数)，试证

$$(3)\ (\mu-\lambda)\sum_{k=m}^{n-1}y_kz_k=b_{n-1}(y_{n-1}z_n-y_nz_{n-1})-b_{m-1}(y_{m-1}z_m-y_mz_{m-1}).$$

b) 由 a) 推断公式

$$(4)\qquad P_{n-1}(\lambda)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)=\frac{1}{b_{n-1}}$$

(证明 $Q_n(\lambda)$ 满足 (1))；

$$(5)\ (\mu-\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\lambda)P_k(\mu)=b_{n-1}(P_{n-1}(\lambda)P_n(\mu)-P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu))$$

(**Christoffel-Darboux 公式**)；

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(P_k(\lambda))^2=b_{n-1}(P_{n-1}(\lambda)P_n'(\lambda)-P_n(\lambda)P_{n-1}'(\lambda)).$$

c) 对于满足 $\mathscr{I}\lambda>0$ 的复数 $\lambda$，记 $K_n(\lambda)$ 为使得

$$\sum_{k=0}^{n-1}|wP_k(\lambda)+Q_k(\lambda)|^2\leqslant\frac{w-\bar w}{\lambda-\bar\lambda}$$

的复数 $w$ 所成的集，试证 $K_n(\lambda)$ 是包含在半平面 $\mathscr{I}w>0$ 内的闭圆盘，其圆心为

$$\frac{Q_{n-1}(\lambda)\overline{P_n(\lambda)}-Q_n(\lambda)\overline{P_{n-1}(\lambda)}}{P_n(\lambda)\overline{P_{n-1}(\lambda)}-P_{n-1}(\lambda)\overline{P_n(\lambda)}},$$

半径为

$$\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}|P_k(\lambda)|^2};$$

$K_n(\lambda)$ 的边界是当 $t$ 取遍 $\boldsymbol{R}$ 时点

$$w_n(\lambda,t)=-\frac{Q_n(\lambda)-tQ_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)-tP_{n-1}(\lambda)}$$

所成的集的闭包。我们有 $K_{n+1}(\lambda)\subset K_n(\lambda)$，且这两个圆盘的边界有公共点。如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}|P_n(\lambda)|^2=+\infty,$$

则这些圆盘的交 $K_\infty(\lambda)$ 是单点集；而在相反的情形下，这个交是以

$$\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}\;\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}|P_n(\lambda)|^2}$$

为半径的圆盘.

d）试证下而三个性质是等价的:

$\alpha$）由 Jacobi 矩阵 $J$ 导出的算子 $H$ 是自伴的.

$\beta$）存在延拓线性形式 $\alpha_F$ 的唯一的正测度 $\nu$（换言之，对于序列 $(c_n)$ 的“矩问题”存在唯一解）.

$\gamma$）对满足 $\mathscr{I}\lambda>0$ 的某个 $\lambda$，集 $K_\infty(\lambda)$ 是单点集(因而对满足 $\mathscr{I}\lambda>0$ 的一切 $\lambda$，$K_\infty(\lambda)$ 都是单点集).

(为证明 $\beta$) 与 $\gamma$) 等价，考虑从 $J$ 中去掉指标大于 $n$ 的行与列后所得到的 $n$ 阶矩阵 $J_n$，并在空间 $\boldsymbol{C}^n$ 中考虑相应的问题，然后取极限.)

e）若 d) 中所述条件满足，则所有 $P_n$ 在 $\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(\nu)$ 内形成一个全子集.

4）保持问题 2 与 3 中的记号，试证，若对于序列 $(c_n)$ 的矩问题有两个不同的解，则对 $\mathscr{I}\lambda\neq0$，级数 $\sum_n|P_n(\lambda)|^2$ 与 $\sum_n|Q_n(\lambda)|^2$ 收敛(利用问题 2 的公式(4)).

由此推断，在下述每种情形下，矩问题只有唯一解:

a) $\sum_n \frac{1}{b_n} = +\infty$ (利用问题 3 中的关系式(4)).

b) $\sum_n \frac{|a_{n+1}|}{b_n b_{n+1}} = +\infty$ (利用关系式

$$P_n(\lambda)Q_{n+2}(\lambda) - P_{n+2}(\lambda)Q_n(\lambda) = \frac{\lambda - a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}\Big).$$

c) 存在有限数 $r$, 使对一切 $n$, 有

$$b_{n-1} + a_n + b_n < r.$$

(注意当 $\lambda = r$ 时,问题 3 中的方程(1)可写为

$$b_n(y_{n+1} - y_n) - b_{n-1}(y_n - y_{n-1}) = (r - b_{n-1} - a_n - b_n)y_n,$$

由此推断序列 $(Q_n(r))$ 是正数的递增序列.)

5) a) 若 $(u_n)$ 是正数的收敛序列,试证 **Carleman** 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_1 u_2 \cdots u_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

为此写 $u_1 u_2 \cdots u_n = (u_1 a_1 u_2 a_2 \cdots u_n a_n)/(n+1)^n$, 其中 $a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 待定,并利用几何平均不等式(13.8 问题 14).

b) 记号与问题 2 相同,试证若

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{-1/2n} = +\infty,$$

则相应的矩问题只有唯一解 (**Carleman** 准则). (注意

$$b_0 b_1 \cdots b_{n-1} \int (P_n(t))^2 d\nu(t) = \int t^n P_n(t) d\nu(t),$$

由此推出 $b_0 b_1 \cdots b_{n-1} \leqslant \sqrt{c_{2n}}$,然后利用 a).)

6) 设 $H$ 是单无界自伴算子(问题 1),试证 $\mathrm{dom}(H)$ 内每个在 $H$ 下为稳定的闭子空间具有 $\mathrm{dom}(H) \cap E(A)$ 的形式,其中 $A$ 是 $E$ 的普遍可测子集,$E(A)$ 是 $E$ 的闭子空间,它是 $E$ 在正交投影算子 $\varphi_A(H)$ 下的象. (利用问题 3d) 与 3e), 注意可以假定 $H$ 具有 $M_\nu$ 的形式,其中 $\nu$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界测度, 它使得多项式所成的集在 $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}(\nu)$ 内稠密.)

7) 利用亏量为(1, 0)或(0, 1)的闭 Hermite 算子的存在性(15.13.9), 给出亏量为任意 $(m, n)$ ($m, n$ 为非负整数或 $+\infty$) 的闭 Hermite 算子的例子.

8) 复 Hilbert 空间 $E$ 上的共轭定义为 $E$ 到自身的一个半线性双射 $C$ (因而 $C \cdot (\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} C \cdot x + \bar{\beta} C \cdot y$), 满足 $(C \cdot x | C \cdot y) = (y | x)$ 与 $C^{-1} =$

$C$. 试证，若 $E$ 上的闭算子 $T$ 与 $C$ 可交换(这就蕴涵 $C(\mathrm{dom}(T))\subset\mathrm{dom}(T)$)，且若 $\mathrm{dom}(T)$ 在 $E$ 内稠密，则 $C$ 与 $T^*$ 也可交换. 由此推断，若 Hermite 算子 $T$ 与 $C$ 可交换，则 $C(E_H^+) = E_H^-$，因而 $H$ 的亏量相等. 特别应用于下述情形：$E$ 是由实 Hilbert 空间 $E_0$ 出发通过纯量扩张得到的，$H$ 是定义在 $E_0$ 的一个处处稠密子空间 $\mathrm{dom}(H_0)$ 上的无界算子 $H_0$ 在 $E$ 上的延拓，而 $H_0$ 满足：对 $\mathrm{dom}(H_0)$ 中任何 $x, y$，有 $(H_0\cdot x|y) = (x|H_0\cdot y)$.

9) 试证满射 Hermite 算子 $H$ 必是自伴的(注意对每个 $y\in\mathrm{dom}(H^*)$，存在 $z\in\mathrm{dom}(H)$，使得 $H^*\cdot y = H\cdot z$，并证明必有 $z = y$).

10)设 $E$ 是无穷维可分 Hilbert 空间.

a) 对 $E$ 中任一无穷序列 $(a_n)$，由所有 $a_n$ 生成的向量子空间(即这些 $a_n$ 的(有限)线性组合所成的集)不等于 $E$ (参阅 (12.16.1)).

b) 试证在 $E$ 内存在两个 Hilbert 基 $(a_n)$, $(b_n)$，使得由这些 $a_n$ 与 $b_n$ 分别生成的向量子空间 $F$ 与 $G$ 满足 $F\cap G = \{0\}$. (从任一 Hilbert 基 $(a_n)$ 出发，先利用 a) 归纳地构造一个全序列 $(c_n)$，使得由这个序列所生成的子空间 $G$ 满足 $F\cap G = \{0\}$. 然后对 $(c_n)$ 进行正交规范化.)

c) 设 Hilbert 基 $(a_n)$ 与 $(b_n)$ 具有 b) 中所述的性质，在 $E$ 上考虑两个紧自伴算子 $A$, $B$，它们分别由 $A\cdot a_n = \lambda_n a_n$ 与 $B\cdot b_n = \lambda_n b_n$ 所定义，其中 $(\lambda_n)$ 是趋于 0 的正数列. 试证能够选出序列 $(\lambda_n)$，使得 $A(E)\cap B(E) = \{0\}$. (通过归纳法进行：设 $S_n$ 是 $F$ 内形如 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k\lambda_k a_k$ (其中 $\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 = 1$) 的点所成的集，$d_n>0$ 是 $S_n$ 到由 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所生成的子空间 $G_n$ 的距离；选取指标大于 $n$ 的 $\lambda_k$，使得 $\sum_{k>n}\lambda_k<\frac{1}{n}d_n$. 证明，若 $U$ 是 $E$ 内以 0 为心，以 1 为半径的闭球，则 $A(U)\cap B(U) = \{0\}$.)

d) 算子 $A$, $B$ 是单射；因而 $A^{-1}$, $B^{-1}$ 是两个自伴闭算子(问题 8)，满足 $\mathrm{dom}(A^{-1})\cap\mathrm{dom}(B^{-1}) = \{0\}$.

e) 由 d) 给出 $E$ 上的自伴算子 $H$ 与酉算子 $U$ 的例子，使得 $U^2 = 1_E$, $\mathrm{dom}(H)\cap\mathrm{dom}(U^{-1}HU) = \{0\}$. (取 $E = F\oplus F$, $U\cdot(x, y) = (y, x)$, $H$ 在 $E$ 的一个因子空间上等于 $A^{-1}$，而在另一个上等于 $B^{-1}$，其中 $A$, $B$ 的定义如上.) 由此导出闭算子 $T$ 的例子，使得 $\mathrm{dom}(T)$ 处处稠密，但 $\mathrm{dom}(T^2) = 0$.

11) 设 $T$ 是可分 Hilbert 空间 $E$ 上的闭算子；使得 $\mathrm{Im}(T-\xi I)$ 非闭的 $\xi\in\boldsymbol{C}$ 所成的集称为 $T$ 的**本质谱**，这是 $T$ 的谱的一个子集.

a) 试证若 $N$ 是 $E$ 上的无界正规算子，则 $\mathrm{Sp}(N)$ 的任何孤立点都不属于

$N$的本质谱.（若$\lambda$是$\mathrm{Sp}(N)$的孤立点且$M$是$\{\lambda\}$在$\mathrm{Sp}(N)$内的余集，试证$\mathrm{Im}(N-\lambda I)$是$E$在投影算子$P=\varphi_M(N)$（15.12问题7)下的象，为此注意存在在$\boldsymbol{C}$内连续且有界的函数$f$，使对一切$y\in P(E)$，有$f(N)\cdot y\in\mathrm{dom}(N)$与$(N-\lambda I)\cdot(f(N)\cdot y)=y$.）

b）反之，试证对$E$上的任一无界自伴算子$A$，不属于$A$的本质谱的点$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$在$\mathrm{Sp}(A)$内是孤立的且是$A$的特征值；因而$A$的本质谱是$\mathrm{Sp}(A)$的非孤立点集.（归结为$\lambda=0$的情形，并利用15.12问题1归结为$\mathrm{Ker}(A)=\{0\}$的情形，证明此时0是关于$A$的正则值；然后利用(15.12.11).）

c）对于亏量为$(m,n)$的闭 Hermite 算子$H$，若$m>0$（相应地，$n>0$），则$\mathrm{Sp}(H)$包含半平面$\mathscr{I}z\geqslant 0$（相应地，$\mathscr{I}z\leqslant 0$）；而$H$的本质谱包含在$\boldsymbol{R}$内.若$m$与$n$为有限，且若$H_1$是延拓$H$的闭 Hermite 算子，则$H$与$H_1$的本质谱相同（15.12问题1h)）.

12）设$H$是可分 Hilbert 空间$E$上的无界 Hermite 算子.

a）设$H_1$是$H^*$在子空间$\mathrm{dom}(H_1)=\mathrm{dom}(H)+\mathrm{Ker}(H^*)$上的限制，试证$H_1$是 Hermite 算子.

b）试证若$\mathrm{Im}(H)$在$E$内是闭的，则$H_1$是自伴的.（若$x\in\mathrm{dom}(H_1^*)$，证明$H_1^*\cdot x$正交于$\mathrm{Ker}(H^*)$，因而$H_1^*\cdot x\in\mathrm{Im}(H)$（15.12问题1c)）；由此推断$x\in\mathrm{dom}(H_1)$.）若$H$是闭的且若存在不属于$H$的本质谱的实数，推断$H$的亏量相等.

c）试证$E_{H_1}^+$（相应地，$E_{H_1}^-$）((15.13.6)中的记号)是$E_H^+$（相应地，$E_H^-$)与$\mathrm{Ker}(H^*)$的正交补空间的交.由此推断，如果存在不属于$H$的本质谱的$\lambda\in\boldsymbol{R}$，且如果$H$的亏量(必定相等）具有一个有限值$m$，则$\mathrm{Ker}(H^*-\lambda I)$具有不小于$m$的维数.

d）假定$H$是闭的，$x$是$H^*$对应于实特征值$\lambda$的特征向量.令$x=x_0+y+z$，其中$x_0\in\mathrm{dom}(H)$，$y\in E_H^+$，$z\in E_H^-$，试证$\|y\|=\|z\|$（归结为$\lambda=0$的情形).

e）假定$H$是闭的，$\lambda$是$\boldsymbol{R}$中不属于$H$的本质谱的点，又假定$H$的亏量等于一个有限数$m$，并且$\dim(\mathrm{Ker}(H-\lambda I))$为有限且等于$k$，则$\dim(\mathrm{Ker}(H^*-\lambda I))$等于$m+k$.（可以限于$\lambda=0$的情形.考虑$H$在$\mathrm{Ker}(H)$的正交补空间上的限制从而归结为$k=0$的情形.于是利用假定$\mathrm{Ker}(H^*)\cap\mathrm{dom}(H)=\{0\}$，由d)推出$\mathrm{Ker}(H^*)$的维数不可能大于$m$；借助c)作出结论.）

13）设$H$是闭 Hermite 算子，其亏量等于同一个有限数$m$.

a）设$V$如(15.13.4)那样定义，则$H$的自伴延拓$A$具有$A=i(I+U)$

$(I-U)^{-1}$ 的形式，其中 $U$ 是延拓 $V$ 的一个酉算子且使得 $U(E_H^+)=E_H^-$；因而 $\mathrm{dom}(A)$ 是 $\mathrm{dom}(H)$ 与子空间 $(I-U)(E_H^+)$ 的直和，后者包含在 $\mathrm{dom}(H^*)$ 内且具有维数 $m$.

b) 为使实数 $\lambda$ 是 $H$ 的自伴延拓 $A$ 的特征值，必须且只须 $\lambda$ 是 $H^*$ 的特征值（利用问题 12d)）. 试证，若 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ 不是 $H$ 的特征值，则存在 $H$ 的自伴延拓 $A$，使得 $\lambda$ 不是 $A$ 的特征值.（利用问题 12d) 与 e)，并适当选择 a) 中的酉算子 $U$.）

c) 假定 $m>0$，试证对每个 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，存在 $H$ 的自伴延拓 $A$，使得 $\lambda$ 属于 $A$ 的谱.（注意，若对于 $H$ 的自伴延拓 $A_0$ 有 $\lambda\notin\mathrm{Sp}(A_0)$，则由问题 12e)与问题 11c)得知 $\lambda$ 是 $H^*$ 的特征值.）

d) 设 $A_1$, $A_2$ 是 $H$ 的两个自伴延拓. 若 $P^+$（相应地，$P^-$）是 $E_H^+$（相应地，$E_H^-$）上的正交投影算子，试证连续算子 $D=(A_2+iI)^{-1}-(A_1+iI)^{-1}$ 满足 $D=P^-D=DP^+$，因而它的秩等于 $m$（注意若 $y\in E$ 且 $x_i=(A_i+iI)^{-1}\cdot y$，则 $x_i\in\mathrm{dom}(H^*)$ 且 $y=(H^*+iI)\cdot x_i$）.

14) $E$ 上的无界闭 Hermite 算子 $H$ 称为上(相应地，下)有界的，如果存在实数 $c$，使对一切 $x\in\mathrm{dom}(H)$，有 $(H\cdot x|x)\leqslant c(x|x)$（相应地，$(H\cdot x|x)\geqslant c(x|x)$）. $H$ 称为**正 Hermite 算子**，如果对一切 $x\in\mathrm{dom}(H)$，有 $(H\cdot x|x)\geqslant 0$. $H$ 为上(相应地，下)有界等价于存在 $c\in\boldsymbol{R}$，使得 $cI-H$（相应地，$H-cI$）是正的.

a) 设 $H$ 是 $E$ 上的正闭 Hermite 算子，$\mathrm{dom}(H)$ 上的 Hermite 形式 $f(x,y)=(x+H\cdot x|y)$ 使这个空间成为准 Hilbert 空间，它可以看作 Hilbert 空间 $G$ 的处处稠密子空间. 试证 $\mathrm{dom}(H)$ 到 $E$ 的典则单射 $j$ 可以连续延拓为 $G$ 到 $E$ 的一个单射，从而 $G$ 能等同于 $E$ 的一个子空间；我们把 $G$ 上的纯量积仍记作 $f(x,y)$. 试证存在 $E$ 到 $G$（把 $G$ 看作 Hilbert 空间）的连续线性映射 $B$，使对任何 $x\in E$, $y\in G$，有 $(x|y)=f(B\cdot x,y)$；把 $B$ 看作 $E$ 到 $E$ 的映射，它是正连续自伴算子，其范数不大于 1，且满足 $(B\cdot x|x)\geqslant\|B\cdot x\|^2$，并对一切 $y\in\mathrm{dom}(H)$ 有 $B(I+H)\cdot y=y$. 由此推断 $A=B^{-1}-I$ 是大于或等于 0 的无界自伴算子，使得 $\mathrm{dom}(A)=B(E)$，且 $A$ 延拓 $H$. $H$ 的亏量相等.

b) 假定 $H$ 的亏量等于同一有限数 $m$，试证对于 $H$ 的任一自伴延拓 $A_1$，$\mathrm{Sp}(A_1)$ 与 $]-\infty,0[$ 的交由 $A_1$ 的特征值组成，这些特征值的总数(按照它们的重数计数)不超过 $m$.（对于包含在 $]-\infty,0[$ 内的每个紧区间 $J$，证明 $E$ 在投影算子 $\varphi_J(A_1)$（15.12 问题 7）下的象包含在 $\mathrm{dom}(A_1)$ 内且不可能有大于 $m$ 的维数，否则它含有属于 $\mathrm{dom}(H)$ 的一个向量 $x\neq 0$（问题 13a)），证明这

个结论与$H$的正性相矛盾.)

15) 设$H$是$E$上的闭 Hermite 算子;其亏量为$(m, n)$,因而$-H$的亏量为$(n, m)$,试证$H$是 Hilbert 和$E\oplus E$上的无界自伴算子$A$在$E$上的限制.

16) a) 设$G$是在圆盘$B: |z|<1$内解析的函数且在该圆盘内有$\mathscr{R}G(z)\geqslant 0$,试证在$B\times B$内,函数

$$K(u, v)=(G(u)+\overline{G(v)})/(1-u\bar{v})$$

是正型的(6.3 问题 4).(利用 14.11 问题 18.)

b) 设$F$是在半平面$D: \mathscr{I}z>0$内解析的函数,且在$D$内有$\mathscr{I}F(z)\geqslant 0$,试证函数$K(u, v)=(F(u)-\overline{F(v)})/(u-\bar{v})$在$D\times D$内是正型的(把$D$保角地映到圆盘$B$上并利用 a)).

c) 设$S$是半平面$\mathscr{I}z>0$的一个无穷可数子集,对$0<\varphi<\pi/2$,以$C(\varphi)$记这个半平面内由$|\mathscr{R}z|\leqslant(\mathscr{I}z)\cos\varphi$所定义的角扇形. 假定存在$S$中的点列$(\sigma_n)$,这些点均含于某个集$C(\varphi_0)$内且$(\sigma_n)$趋于 0. 设$f$是$S$到半平面$\mathscr{I}z>0$的一个映射. 为使存在定义于半平面$\mathscr{I}z>0$内的解析函数$F$,使得$F$延拓$f$,在该平面内$\mathscr{I}F(z)>0$且$|F(z)/z|$在每个集$C(\varphi)$内有界,必须且只须$f$满足下面两个条件: 1°序列$(f(\sigma_n)/\sigma_n)$有界;2°函数

$$k(s, t)=\frac{f(s)-\overline{f(t)}}{s-\bar{t}}$$

在$S\times S$上是正型的(为证明这些条件的充分性,注意存在可分 Hilbert 空间$E$与$S$到$E$的映射$s\to u_s$,使得$k(s,t)=(u_s|u_t)$(6.3 问题 8c)),我们还能假定这些$u_s$所成的集是$E$内的全子集. 证明此时序列$(u_{\sigma_n})$在$E$内有界且弱收敛于点$u_0$(利用(12.15.7.1)与(7.5.5)); 对一切$s\in S$,有$(u_s|u_0)=f(s)/s$. 证明存在$E$上的无界 Hermite 算子$H$,使对一切$s\in S$,有

$$H\cdot u_s=(u_s-u_0)/s;$$

利用问题 15,证明存在包含$E$的 Hilbert 空间$H$与$H$上的无界自伴算子$A$,使对$\mathscr{I}z>0$,函数

$$F(z)=z((I-zA)^{-1}\cdot u_0|u_0)$$

满足问题中所提的条件; 对此,若$v_z=(I-zA)^{-1}\cdot u_0$,证明$\mathscr{I}F(z)=\mathscr{I}(z\|v_z\|^2)$,且对$z\in C(\varphi)$,有$\|v_z\|\sin\varphi\leqslant\|u_0\|$.)

# 参 考 文 献

## 第 一 卷

[1] Ahlfors, L., Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1963.
(中译本：L. A. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1962.)

[2] Bachmann, H., Transfinite Zahlen, Ergebnisse der Math., Neue Folge, Heft I, Springer, Berlin, 1955.

[3] Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique: Livre I, Théorie des Ensembles", Actual. Scient. Ind., Chap. I, II, n° 1212, Chap. III, n° 1243, Hermann, Paris, 1954—56.

[4] Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique: Livre II, Algébre", Chap. II, Actual. Scient. Ind., n°s 1032, 1236（第三版）, Hermann, Paris, 1962.

[5] Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique: Livre III, Topologie générale", Actual. Scient. Ind., Chap. I—II, n° 1142（第四版）, Chap, IX, n°1045（第二版）Chap. X, n°, 1084（第二版）. Hermann Paris 1958—61.

[6] Bourbaki, N., "Éléments de Mathématique: Livre V, Espaces vectoriels topologiques", Actual. Scient. Ind., Chap. I—II, n° 1189, Chap. III—V, n° 1229, Hermann, Paris, 1953—55.

[7] Cartan, H., Séminaire de L'Ecole Normale Supérieure, 1951—52: Fonctions analytiques et faisceaux analytiques.

[8] Cartan, H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, Paris, 1961.

[9] Coddington, E. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[10] Courant, R. und Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik, I（第二版）, Berlin, Springer, 1931.（中译本：R. 柯朗, D. 希伯尔特，数学物理方法，卷 I，科学出版社，1958.）

[11] Halmos, P., Finite-Dimensional vector spaces（第二版）, D. Van Nostrand, New York, 1958.

[12] Ince, E., Ordinary differential equations. Dover Publ., New York, 1949.

[13] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra: II, Linear algebra, D. Van Nostrand, New York, 1953.（中译本：N. 贾柯勃逊，抽象代数学，卷2，线性代数，科学出版社，1960.）

[14] Kamke, E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akad. Verlag, Leipzig, 1930.

[15] Kelley, J., General topology, D. Van Nostrand, New York, 1955.

[16] Landau, E., Foundations of Analysis, Chelsea, New York, 1951.
(中译本：E. 兰道，分析基础，高等教育出版社，1958.)
[17] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.
[18] Weil, A., "Introduction à l'étude des variétés kählériennes", Actual. Scient. Ind., n° 1267, Hermann, Paris, 1958.
[19] Weyl, H., Die Idee der Riemannschen Fläche(第三版) Teubner, Stuttgart, 1955.

## 第 二 卷

[20] Ахиезер, Н. И., Классическая Проблема Моментов и Некоторые Вопросы Анализа, Связанные с Нею, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1961 (中译本：Н. И. 阿希叶泽尔，经典矩量问题及其有关的若干分析问题，上海科学技术出版社，1966.)
[21] Arnold, V. et Avez, A., Théorie ergodique des systèmes dynamiques, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[22] Bourbaki, N., "Éléments de mathématique. Livre VI, Intégration", Actual. Scient. Ind., Chap. I—IV, n° 1175 (第二版), Chap. V, n°1244, (第二版), Chap VII—VIII, n°1306, Hermann Paris, 1963—67.
[23] Bourbaki, N., "Éléments de mathématique: Théories spectrales", Chap. I—II, Actual. Scient. Ind., n° 1332, Hermann, Paris, 1967.
[24] Dixmier, J., Les algèbres d'opérateurs dens L'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
[25] Dixmier, J., Les C*-algèbres et leurs représeutations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
[26] Garsia, A. M., Topics in almost everywhere convergence, Markham, Interscience, New York-London, 1963.
[26*] Garsia, A. M., Topics in almost everywhere convergence, Markham, Chicago, 1970.
[27] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, oberfläche und Isoperimetrie, Springer, Berlin, 1957.
[28] Halmos, P., "Lectures on ergodic theory", Math. Soc. of Japan, 1956.
[29] Hoffman, K., Banach spaces of analytic functions, New York, 1962.
[30] Jacobs, K., "Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie", Ergebnisse der Math., Neue Folge, Heft 29, Springer, Berlin, 1960.
[31] Kaczmarz, S. und Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, New York, 1951.
[32] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, 1966.
[33] Montgomery, D. and Zippin, L., Topological transformation groups Interscience, New York, 1955.
[34]* Наймарк, М. А., Нормированные Кольца, Гостехидат, Москва, 1956.
[35] Rickart, C., General theory of Banach algebras, D Van Nostrand, New

York, 1960.

[36] Weil, A., Adeles and algebraic groups, The Institute for advanced Study, Princeton, 1961.

# 索　　引

本索引按首字画数排列．首字画数相同的，按起笔笔形一丨丿丶フ的顺序排列．同一单字起首的术语按字数顺序排列；字数相同的，按第二字的画数排列．外文字母起首的术语排在最后．

## 一　　画



## 二　　画



## 三　　画

## 四　画



## 五　画

## 六 画

## 七 画

## 八 画

## 九 画

## 十　画

## 十 一 画



## 十 二 画

## 十 三 画



## 十 四 画 以 上